

VERHANDELINGEN  
DER  
KONINKLIJKE AKADEMIE  
VAN  
WETENSCHAPPEN

---

EERSTE SECTIE

(Wiskunde - Natuurkunde - Scheikunde - Kristallenleer - Sterrenkunde -  
Weerkunde en Ingenieurswetenschappen.)

---

DEEL X  
MET 2 PLATEN

---

AMSTERDAM — JOHANNES MÜLLER  
April 1911

*California Academy of Sciences*

---

RECEIVED BY EXCHANGE







VERHANDELINGEN  
DER  
KONINKLIJKE AKADEMIE  
VAN  
WETENSCHAPPEN

---

EERSTE SECTIE

(Wiskunde - Natuurkunde - Scheikunde - Kristallenleer - Sterrenkunde -  
Weerkunde en Ingenieurswetenschappen.)

---

DEEL X

MET 2 PLATEN

---

AMSTERDAM — JOHANNES MÜLLER

April 1911



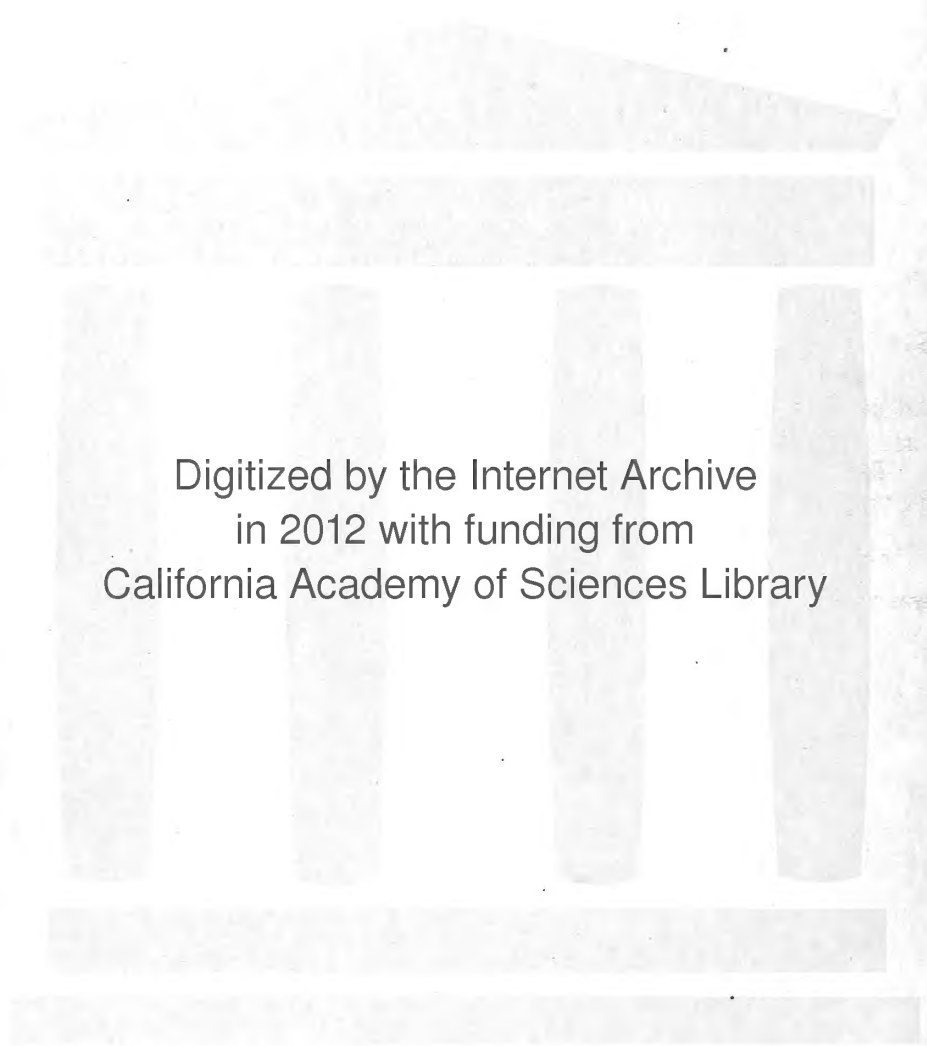
13271

LIBRARY  
OF THE  
MUSEUM  
OF  
NATURAL HISTORY  
OF  
THE  
NEDERLANDS  
INDIEN

# INHOUD.

---

1. M. BRÜCKNER. Ueber die Ableitung der allgemeinen Polytope und die nach Isomorphismus verschiedenen Typen der allgemeinen Achtzelle (Oktatope). Mit 2 Tafeln.
  2. M. J. VAN UVEN. Algebraische Strahlencongruenzen und verwandte complexe Ebenen als Schnitte derselben.
-



Digitized by the Internet Archive  
in 2012 with funding from  
California Academy of Sciences Library

Ueber die Ableitung der allgemeinen Polytope  
und die nach Isomorphismus verschiedenen Typen  
der allgemeinen Achtzelle (Oktatope)

VON

Prof. Dr. M. BRÜCKNER (Bautzen, Sachsen).

---

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE).

Deel X. N<sup>o</sup> 1.

(Mit 2 Tafeln.)

---

AMSTERDAM,  
JOHANNES MÜLLER.  
Maart 1909.





Ueber die Ableitung der allgemeinen Polytope  
und die nach Isomorphismus verschiedenen Typen  
der allgemeinen Achtzelle (Oktatope)

VON

Prof. Dr. M. BRÜCKNER (Bautzen, Sachsen).

---

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(**EERSTE SECTIE**).

**Deel X. N° 1.**

(Mit 2 Tafeln.)

---

AMSTERDAM,  
JOHANNES MÜLLER.  
1909.



## Einleitung: Von den allgemeinen konvexen Polyedern.

Das Problem der Bestimmung der allgemeinen konvexen Polyeder (mit nur dreikantigen Ecken) einer gewissen bestimmten Zahl von Begrenzungsflächen ist auf verschiedene Weise gelöst worden <sup>1)</sup>. Am nächstliegenden ist die Ableitung der von  $n + 1$  Flächen begrenzten Polyeder aus den als bekannt vorausgesetzten  $n$ -flächen durch die sogen. *Fundamentalkonstruktionen* <sup>2)</sup>, die wir im Folgenden einer kurzen Betrachtung zu unterziehen haben, ehe wir die Konstruktionen der allgemeinen Polytope erläutern können <sup>3)</sup>.

Sollen aus den allgemeinen  $n$ -flächen  $p_n$  alle  $p_{n+1}$  abgeleitet werden, so schneidet man von den  $p_n$  durch eine Ebene eine, zwei, drei . . . (benachbarte) Ecken einer Fläche ab, fügt also der Oberfläche des  $p_n$  ein Dreieck, Viereck, Fünfeck . . . ein, wobei die Kantenzahlen einiger anderer Flächen des  $p_n$  geändert werden. Es mögen die  $p_n$  von der *ersten, zweiten, dritten . . . Klasse* heissen, je nachdem die Begrenzungsflächen geringster Kantenzahl Drei-, Vier-, Fünf- . . . ecke sind. Dann ergibt sich ein  $p_{n+1}$  *erster Klasse*, wenn irgend eine Ecke eines  $p_n$  beliebiger Klasse durch einen dreiseitigen Schnitt entfernt wird; denn das  $p_{n+1}$  enthält mindestens ein Dreieck, nämlich das neueingeführte (erste Fundamentalkonstruktion). Die zweite Fundamentalkonstruktion zur Erzeugung der allgemeinen  $p_{n+1}$  besteht darin, dass durch einen vierseitigen Schnitt eine Kante  $AB$  des  $p_n$  entfernt wird. Nur die beiden Scheitelflächen in  $A$  und  $B$  erhalten dadurch in  $p_{n+1}$  je eine Kante mehr. Hieraus folgt: Die  $p_{n+1}$  zweiter Klasse sind durch die zweite Fundamentalkonstruktion aus allen  $p_n$  von der zweiten

<sup>1)</sup> Vergl. BRÜCKNER, Vielecke und Vielfache, Leipzig 1900. S. 93.

<sup>2)</sup> A. a. O. S. 84.

<sup>3)</sup> Für die Polytope beziehen wir uns bes. auf P. H. SCHOUTE, Mehrdimensionale Geometrie, 2. Teil. Leipzig 1905.

Klasse ab zu konstruieren, sowie aus den  $p_n$  erster Klasse, die *nur ein Dreieck* besitzen (man schneide eine Scheiteltkante dieses Dreiecks ab) oder *zwei Dreiecke mit gemeinsamer Scheiteltkante  $AB$*  (man unterwerfe diese Scheiteltkante der zweiten Konstruktion). Schneidet man zwei aufeinanderfolgende Kanten  $AB$ ,  $BC$  einer Grenzfläche des  $p_n$  durch ein Fünfeck ab, so erhalten die beiden Scheitelflächen in  $A$  und  $C$  je eine Kante mehr, aber an Stelle der das Kantenpaar  $AB$ ,  $BC$  enthaltenden Fläche tritt eine Fläche mit um eins geringerer Kantenzahl. Diese dritte Fundamentalkonstruktion zur Erzeugung der  $p_{n+1}$  dritter Klasse braucht offenbar die  $p_n$  erster Klasse nicht mehr zu berücksichtigen und von den  $p_n$  zweiter Klasse kommen nur solche Polyeder in Frage, bei denen die Scheitelflächen in  $A$  und  $C$  allein Vierecke sind, während die Fläche mit dem Kantenzuge  $ABC$  mindestens sechskantig sein muss. Ueberdies sind zur Konstruktion der  $p_{n+1}$  dritter Klasse sämtliche  $p_n$  dritter Klasse zu verwenden; aber auch dabei muss die Fläche mit dem Kantenzuge  $ABC$  mindestens sechskantig sein. Es existieren nun bekanntlich nur allgemeine Polyeder dieser drei ersten Klassen, da stets

$$3f_3 + 2f_4 + f_5 = 12 + f_7 + 2f_8 + \dots$$

sein muss.<sup>1)</sup> Somit ist eine vierte Fundamentalkonstruktion nicht nötig; denn die Einführung eines Sechsecks erübrigt sich, da das dadurch zu erzeugende  $p_{n+1}$  sicher Drei-, Vier- oder Fünfecke enthalten muss, also durch eine der 3 ersten Fundamentalkonstruktionen sich aus einem  $p_n$  ergeben würde.<sup>2)</sup> Nur mit Rücksicht auf die Ableitung der allgemeinen Polytope betrachten wir noch weitere Schnitte der Polyeder. In erster Linie kommen hier die Schnitte durch Ebenen in Betracht, die sich als Weiterführung der bisherigen drei Konstruktionen auffassen lassen, wenn nämlich ein Polyeder durch eine Ebene so geschnitten wird, dass  $\mu$  auf einanderfolgende von den  $\lambda$  Ecken *einer* Grenzfläche ( $\mu \leq \lambda - 1$ ) auf eine Seite dieser Ebene zu liegen kommen, ohne dass auch irgend eine seitende Fläche des  $\lambda$ -ecks ihrer ganzen Erstreckung nach mit auf diese Seite der Ebene fällt. Es entsteht dann durch diese „ $\mu$ -te Konstruktion“ aus dem  $p_n$  ein  $p_{n+1}$ , das sich natürlich auch durch eine der Konstruktionen  $\mu = 1, 2, 3$  erhalten liess. Jedenfalls kann man an einem  $p_n$  das als Vieleck grösster Kantenzahl ein  $\lambda$ -eck enthält  $\mu = \lambda - 1$  solcher Konstruktionen an dieser

<sup>1)</sup> Vielecke u. Vielfache, S. 84. SCHOUTE, a. a. O. S. 56.

<sup>2)</sup> Die dritte Konstr. wird erst nötig bei Ableitung der  $p_{12}$  aus den  $p_{11}$  und führt auf das einzige  $p_{12}$  dritter Klasse, ein von 12 Fünfecken begrenztes Polyeder, das mit dem regulären Dodekaeder isomorph ist.

Fläche ausführen. Von besonderer Bedeutung sind im Folgenden mit Rücksicht hierauf solche  $p_n$ , die von zwei  $(n-1)$ -ecken mit gemeinsamer Kante und in Folge dessen von 2 Dreiecken und  $n-4$  Vierecken begrenzt werden. Man bezeichnet sie als *Hufe*. Von den  $n-1$  Ecken  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$  einer Grenzfläche eines solchen Hufes  $p_n$  [ $A_1 A_{n-1}$  sei die gemeinsame Kante der beiden  $(n-1)$ -ecke] werden durch die  $\mu$ -te Konstruktion die  $\mu$  aufeinanderfolgenden Ecken des Kantenzuges  $A_i A_{i+1} \dots A_{i+\mu-1}$  durch ein  $(\mu+2)$ -eck abgeschnitten. Durch die letzte zulässige, d. h. die  $(n-2)$ -te Konstruktion ergeben sich dann die folgenden  $p_{n+1}$ , je nachdem die nicht mit abgeschnittene letzte Ecke eine der am Ende vermerkten Ecken ist:

- a) Der Huf  $p_{n+1}$  ( $2f_3; (n-3). f_4; 2f_n$ ).  $A_1$  oder  $A_{n-1}$ .
- b) Ein  $p_{n+1}$  ( $2f_3; (n-4). f_4; 1.f_5; 1.f_{n-1}; 1.f_n$ ).  $A_2$  oder  $A_{n-2}$ .
- c)  $\tau$  Typen  $p_{n+1}$  ( $3f_3; (n-6). f_4; 2f_5; 1.f_{n-1}, 1.f_n$ )  
 $A_3$  oder  $A_{n-3}, A_4$  oder  $A_{n-4}$  u. s. w.

Unter c) sind  $\tau = \frac{n-4}{2}$  oder  $\tau = \frac{n-5}{2}$  *allomorphe* Typen enthalten, je nachdem  $n$  gerade oder ungerade ist.

Für  $\mu=\lambda$  fällt das oben erwähnte  $\lambda$ -eck völlig auf die eine Seite der schneidenden Ebene, und das erzeugte Polyeder, aus dem gegebenen durch Abschneiden eines  $\lambda$ -seitigen Prismas entstanden, ist wieder ein  $p_n$ , das mit dem ursprünglichen isomorph ist. Es existieren aber für jedes  $p_n$  noch weitere zulässige Schnitte, wenn nur verlangt wird, dass keine seiner Grenzflächen ihrer ganzen Ausdehnung nach auf die dem Polyeder abgewandte Seite der schneidenden Ebene fällt: z. B. wenn das Tripel von Kanten einer Ecke durch ein Sechseck abgeschnitten wird, u. s. w. <sup>1)</sup>

Wir werden auf diese Konstruktionen, so weit sie im Folgenden gebraucht werden, an Ort und Stelle zurückkommen.

In den Figuren 1—8 liegen für spätere Verwendung die allgemeinen Polyeder für  $n=5, 6, 7$  gezeichnet vor. Es ist das Polyeder zentral so aus einem ausserhalb liegenden Punkte auf eine seiner Grenzflächen projiziert, dass alle seine Eckpunkte innerhalb dieser Fläche liegen. Man bezeichnet diese Bilder der Polyeder als ihre *Diagramme*. <sup>2)</sup> Das Problem, alle  $p_n$  zu bestimmen, unter deren Grenzflächen ein  $\lambda$ -eck vorkommt ist dann, da ein allgemeines  $p_n$   $2n-4$  Ecken besitzt, identisch mit dem,  $2n-4-\lambda$  Punkte

<sup>1)</sup> Vergl. O. HERMES, Ueber Anzahl und Form von Vielfachen. Progr. d. Kölln. Gymn. Berlin 1894.

<sup>2)</sup> SCHOUTE, a. a. O. S. 23. Die Diagramme aller allgem. Vielfache bis  $n=10$  vergl. Vielecke u. V. Taf. II—V.

innerhalb des Perimeters eines  $\lambda$ -ecks so unter einander und mit den  $\lambda$  Ecken des Aussenpolygons zu verbinden, dass jeder der Binnenpunkte mit nur je 3 andern Punkten, jeder der äussern Polygonpunkte aber nur mit einem Binnenpunkte verbunden und die Fläche des  $\lambda$ -ecks in  $n - 1$  einfachzusammenhängende Zellen geteilt wird. Es ist ersichtlich, dass dieses Problem der *Polygonteilung*, weil gewisse Zerlegungen verschiedenkantiger Vielecke Diagramme desselben Polyeders  $p_n$  auf verschiedenkantige seiner Grenzflächen bezogen <sup>1)</sup> darstellen, seine wahre Bedeutung erst erhält, wenn man die geteilten Polygone als Diagramme dreidimensionaler Polyeder auffasst. <sup>2)</sup>

### § 1. Von den allgemeinen konvexen Polytopen.

Unter einem Polytop (Vielzell) versteht man eine Reihe von Polyedern, die im vierdimensionalen Raume derart mit einander verbunden sind, dass je ein Polyeder jede seiner begrenzenden Flächen mit einem und nur einem andern Polyeder gemein hat, wobei durch diese Reihe der Polyeder der  $R_4$  in 2 getrennte Gebiete zerlegt wird, ein „inneres“ (endliches) und ein „äusseres“ (unendliches). Jedes der dreidimensionalen Polyeder liegt dabei in einem anderen dreidimensionalen Raume. Die gemeinsame Fläche zweier Grenzpolyeder liegt in der Schnittebene der beiden benachbarten Räume. Ein Polytop heisst allgemein, wenn jede seiner Ecken von nur 4 Polyedern gebildet wird, also in jeder seiner Kanten 3 Polyeder aneinandergrenzen. <sup>3)</sup> An jeder Ecke nehmen 6 Flächen Teil. Ist  $e$  die Zahl der Ecken,  $k$  der Kanten,  $f$  der Flächen und  $p$  der Polyeder des Polytopes, so gelten neben der Gleichung

$$e - k + f - p = 0$$

für ein allgemeines Polytop die Relationen <sup>4)</sup>:

$$k = 2e; f = e + p.$$

Während für ein allgemeines Polyeder des dreidimensionalen Raumes, das von  $n$  Flächen begrenzt wird, die Zahlen der Ecken und Kanten durch die Gleichungen  $e = 2n - 4$ ,  $k = 3n - 6$  be-

<sup>1)</sup> Vergl. die Diagramme Fig. 1<sup>a</sup> und 1<sup>b</sup> desselben  $p_5$ .

<sup>2)</sup> Wir bezeichnen die allgemeinen  $n$ -fläche mit  $p_n$  und verstehen unter  $p_n'$  stets den Huf, unter  $p_n''$  das Prisma, während die mit weiteren Indices versehenen  $p_n^{\text{III}}$ ,  $p_n^{\text{IV}}$ , ... die übrigen (für  $n=7$  durch die Figuren 6–8 erläuterten) Polyeder  $p_n$  sind.

<sup>3)</sup> SCHOUTE, a. a. O. S. 28.

<sup>4)</sup> SCHOUTE, a. a. O. S. 65.



stimmt sind, gilt der *Satz*: Die Anzahl der Ecken eines allgemeinen Polytopes mit  $p$  Polyedern ( $p > 5$ ) ist nur an die Ungleichung bzw. Gleichung gebunden:

$$3p - 10 < e \leq \frac{p(p-3)}{2}.$$

In Verbindung mit den obigen Gleichungen folgt hieraus für die Anzahl der 2- und 3-dimensionalen Begrenzungsstücke:

$$2(3p - 10) \leq k \leq p(p - 3);$$

$$2(2p - 5) \leq f < \frac{p(p-1)}{2}.$$

Dabei werden für jede Zahl  $p$  der Polyeder die unteren und oberen Grenzen für  $e$ ,  $k$  und  $f$  wirklich erreicht, wie später zu beweisen ist.

Ein konvexes Polytop in  $R_4$  wird von einer Geraden, die nicht vollständig in einem Grenzraum  $R_3$  liegt, in 2 Punkten geschnitten. <sup>1)</sup> Verbindet man also einen Punkt ausserhalb des Polytopes in  $R_4$  mit allen seinen Ecken, so schneiden diese Geraden bei passender Wahl der Lage des Punktes einen Grenzraum in ebensoviel Punkten, wie die ausserhalb dieses Grenzraumes noch liegenden Ecken des Polytopes betragen, und es ergibt sich somit eine zentrale Projektion der übrigen begrenzenden Polyeder in diesen Raum, die als *Diagramm* der Polytopes zu bezeichnen ist. Wir werden im allgemeinen das Polytop möglichst in ein Grenzpolyeder grösster Flächenzahl projizieren.

Ein in Zellen geteiltes allgemeines Polyeder ist also als Diagramm eines allgemeinen Polytopes aufzufassen, wenn in jedem der Binnenpunkte 4 Zellen, in jeder Verbindungskante zweier Punkte 3 Zellen aneinandergrenzen; das umhüllende allgemeine Polyeder ist der letzte Grenzraum. Die Figuren 9—13 stellen die Diagramme der allgemeinen Polytope  $P_7$  dar. Projiziert man dasselbe Polytop in verschiedene seiner Grenzräume, so erhält man verschiedene Diagramme d. h. *Polyederteilungen*, wie die Figuren 10 und 10<sup>a</sup> erläutern, in denen dasselbe  $P_7$  einmal in ein begrenzendes  $p_6'$ , das zweite Mal in ein  $p_5$  projiziert ist. Als Polyederteilung hat man somit zwei verschiedene Lösungen, die ihr wahres Wesen erst offenbaren, wenn man die Figuren als Diagramme vierdimensionaler Polytope auffasst. — Unter diesen besitzen 2 Arten besonders ein-

<sup>1)</sup> SCHOUTE, a. a. O. S. 28, N°. 10.

fachen Charakter. Unter einem *Hufe* verstehe man ein Polytop, <sup>1)</sup> dessen sämtliche Ecken zwei isomorphen  $p_n$  zugehören, die eine homologe Grenzfläche gemeinsam haben. Für dasselbe  $p_n$  lassen sich demnach soviel Hufe in  $R_4$  konstruieren, als wesentlich nach Isomorphismus verschiedene Grenzflächen von  $p_n$  in Frage kommen, und es sind die erhaltenen Hufe der Zahl der Ecken etc nach verschieden. Ist die gemeinsame Fläche der beiden  $p_n$  ein  $\lambda$ -eck so ist für den Huf <sup>2)</sup>:

$$e = 4n - 8 - \lambda; k = 8n - 16 - 2\lambda;$$

$$f = 5n - 7 - \lambda; p = n + 1.$$

Es sind z. B. die drei Siebenzelle  $P_7^1, P_7^2, P_7^4$  (Fig. 9, 10 und 12) Hufe aus zwei  $p_6'$ , in denen der Reihe nach ein Fünfeck, Viereck und Dreieck gemeinsame Fläche der beiden  $p_6'$  ist. <sup>3)</sup> Das Siebenzell  $P_7^3$  (Fig. 11) ist ein Huf aus zwei  $p_6''$ . — Die zweite Art von Polytopen besonders Charakters sind die *Prismen*. Ein vierdimensionales Prisma entsteht, wenn ein Polyeder  $p_n$  so in  $R_4$  bewegt wird, dass seine Ecken aequipollente Strecken <sup>4)</sup> beschreiben, aber nicht in demselben Raume  $R_3$  bleiben. Es besitzt also 2 kongruente „Deckräume“ und  $n$  dreidimensionale Prismen als „Mantelräume“. Der Huf  $P_7^3$  ist zugleich ein Prisma aus einem  $p_5$  als Deckraum, wie sich erkennen lässt, wenn man das Polytop in eines der vier  $p_5$  (z. B.  $EIA, FKB$ ) projiziert <sup>5)</sup>, oder aus Fig. 11; nur sind die von den Ecken  $E, I$ , u. s. w. beschriebenen Strecken  $EH, IM, \dots$  im Diagramm nicht aequipollent. Wir teilen nun analog den Polyedern zur Uebersicht die Polytope in  $R_4$  in *Klassen*, wobei wir das Vorkommen von Polyedern bestimmter Flächenzahl als Grenzpolyeder zum Einteilungsprincip wählen. Ein Polytop der *ersten Klasse* besitze unter seinen Grenzräumen  $p_4$  (d. i. Tetraeder) und irgend welche  $p_n$  grösserer Flächenzahl (wenn  $p > 5$  ist). Ein Polytop der *zweiten Klasse* besitze keine  $p_4$  mehr, aber  $p_5$  und Polyeder grösserer Flächenzahl. Ein Polytop *i-ter Klasse* besitzt keine  $p_4, p_5, \dots p_{i+2}$ , wohl aber  $p_{i+3}$

<sup>1)</sup> Das Beiwort *allgemein* ist künftig stets weggelassen.

<sup>2)</sup> Vergl. meine „Elemente der vierdimens. Geometrie“. Zwickau 1894. S. 46.

<sup>3)</sup> In Fig. 9 ist das Fünfeck  $ABCDG$  gemeinsame Fläche der beiden  $p_6^1$ ; in den andern Figuren ist die gemeinsame Fläche schraffiert und für das innenliegende Polyeder ist die fünfeckige Fläche mit dem Kantenzuge  $LIGAB$  bzw.  $NMFBK$  aus dem hintersten Fünfeck der äusseren Umhüllungszelle bis auf eine Kante heraustretend vorzustellen.

<sup>4)</sup> SCHOUTE, a. a. O. S. 37.

<sup>5)</sup> Vergl. Elem. der vierdim. Geom. Taf. II. Fig. 17<sup>b</sup>. Die Diagramme der  $P_5$  und  $P_6$  sind dort auf den Tafeln gezeichnet.  $P_5$  (Taf. I Fig. 8) ist das aus 5 Tetraedern gebildete „Simplex“ (vergl. SCHOUTE a. a. O. S. 1) des  $R_4$ .  $P_6^1$  (Fig. 13<sup>a</sup> auf Taf. II) ist ein Prisma aus  $p_4$  als Deckraum;  $P_6^2$  (Fig. 14<sup>a</sup>) ein Huf über  $p_5$ .

und weitere. Da unter den Grenzpolyedern eines konvexen  $P_p$  ein  $p_{p-1}$  das Vielfach höchster Flächenzahl sein kann (es sind dann noch  $p-1$  Polyeder vorhanden, von denen jedes eine seiner Flächen mit dem  $p_{p-1}$  gemein hat) so kann ein  $P_p$  zur 1, 2, 3 . . . . ( $p-4$ )-ten Klasse gehören.

Es wird sich zeigen, dass für jeden Wert von  $p$  Polytope dieser sämtlichen Klassen existieren <sup>1)</sup> und sich konstruieren lassen. Diese unsre nächste Aufgabe: Die Konstruktion sämtlicher Polytope  $P_{p+1}$  aus den als bekannt vorauszusetzenden  $P_p$ , werden wir an den Diagrammen erläutern.

Ist  $A$  eine Ecke eines Polytopes  $P_p$ , und sind  $A_1, A_2, A_3, A_4$  Punkte auf den 4 von  $A$  ausgehenden Kanten, so konstruiere man das Tetraeder  $A_1 A_2 A_3 A_4$  und tilge die innerhalb desselben liegenden Teile jener 4 Kanten sowie die Ecke  $A$  selbst. Dadurch wird auf die 4 Polyeder in  $A$  die erste Polyederkonstruktion angewandt, d. h. von jedem wird eine Ecke abgeschnitten. Das neue Polytop  $P_{p+1}$  gehört der *ersten Klasse* nach obiger Einteilung an, denn es enthält mindestens das eine  $p_4 \equiv A_1 A_2 A_3 A_4$ .

Aus einem  $P_p(e, k, f, p)$  beliebiger Klasse ergibt sich durch diese *erste Polytopkonstruktion* ein Polytop erster Klasse  $P_{p+1}(e+3, k+6, f+4, p+1)$ . Da durch alle weiterhin zu besprechenden Konstruktionen die Zahl der Ecken um mehr als 3 erhöht wird, so ergeben sich die Polytope mit der Minimalzahl der Ecken durch wiederholte Anwendung dieser ersten Konstruktion. Es besitzt daher, weil für  $p=5$  auch  $e=5$  ist, ein  $P_p$  das Minimum der Ecken  $e=5+(p-5) \cdot 3=3p-10$ , wie früher behauptet war. Ueberdies leuchtet ein, dass zur Erzeugung der  $P_{p+1}$  erster Klasse diese erste Konstruktion auf *sämtliche*  $P_p$  zu erstrecken ist, und es sind alle deren Ecken zu berücksichtigen. Ebenso wie bei Konstruktion der Polyeder in  $R_3$  wird auch hier dasselbe  $P_{p+1}$  sich zuweilen aus mehreren  $P_p$  ergeben, ja in Folge der Symmetrie selbst mehrere Male aus demselben  $P_p$ . Inverse d. h. spiegelbildlich-isomorphe Diagramme sollen dabei überhaupt als gleichwertig angesehen werden.

*Die zweite Polytopkonstruktion.* Ist  $AB$  eine Kante im Diagramm eines  $P_p$ , so seien  $A_1, A_2, A_3$  und  $B_1, B_2, B_3$  Punkte auf den übrigen je 3 von  $A$  und  $B$  ausgehenden Kanten, derart dass  $A_1$  und  $B_1, A_2$  und  $B_2, A_3$  und  $B_3$  je auf Kanten derselben von den 3 Flächen liegen, die die Kante  $AB$  gemein haben. Diese 6 Ecken  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$  sind die eines  $p_5$ , das nach Tilgung der

<sup>1)</sup> Man beachte den Unterschied der Klassenzahl der Gebilde in  $R_3$  und  $R_4$ .

Kante  $AB$  und der innerhalb  $p_5$  liegenden Kantenteile  $AA_1$  u. s. w. als neues Grenzpolyeder dem Polytope bezw. Diagramme eingefügt ist. Dabei wird auf die 2 Scheitelpolyeder der Kante  $AB$  in  $A$  und  $B$  die erste Polyederkonstruktion angewandt; aus den 3 Polyedern, die die Kante  $AB$  gemeinsam hatten, wird durch die zweite Polyederkonstruktion ebenfalls je ein Polyeder mit um 1 vermehrter Flächenzahl. Aus dem  $P_p(e, k, f, p)$  wird ein  $P_{p+1}(e+4, k+8, f+5, p+1)$ . Da diese zweite Polytopkonstruktion zu einem  $P_{p+1}$  mit mindestens dem eingefügten  $p_5$  führt, so ist sie zur Ableitung der  $P_{p+1}$  zweiter Klasse zunächst auf alle  $P_p$  zweiter und höherer Klasse anzuwenden. Zweitens aber noch auf alle diejenigen  $P_p$  erster Klasse die *nur ein*  $p_4$  besitzen; sowohl auf dessen Kanten selbst als Kanten  $AB$ , sowie auf seine Scheiteltanten, denn in beiden Fällen tritt an Stelle dieses  $p_4$  ein  $p_5$ . Endlich sind auch die  $P_p$  erster Klasse zu berücksichtigen, unter deren Grenzkörpern nur 2 Tetraeder  $A_1 A_2 A_3 A_4$  und  $B_1 B_2 B_3 B_4$  mit der Scheiteltante  $A_i B_j$  auftreten, wobei an Stelle dieser Kante  $A_i B_j$  das neue  $p_5$  tritt.

Mit dieser zweiten Polytopkonstruktion ist die Eindeutigkeit der Konstruktionen schon erschöpft, da bereits für  $p_6$  zwei verschiedene Typen existieren, d. h. die Polytope dritter Klasse ihren Charakter als solcher sowohl dem Vorkommen von  $p_6'$  wie  $p_6''$  verdanken können. Es soll nun zunächst die Einfügung der *Hufe*  $p_6', p_7', \dots, p_n'$  genauer betrachtet werden und wir bezeichnen die dazu nötige Konstruktion als Polytopkonstruktion 3', 4' ...<sup>1)</sup>. Es liege das Diagramm irgend eines  $P_p$  vor, das 2 Polyeder mit einem gemeinsamen  $\lambda$ -eck enthält.  $\mu+2$  aufeinander folgende Ecken dieses  $\lambda$ -ecks seien  $e_0, e_1, e_2, \dots, e_{\mu-1}, e_\mu, e_{\mu+1}$ , wobei im ungünstigsten Falle  $e_0$  mit  $e_{\mu+1}$  identisch ist.<sup>2)</sup> (Allgemein sei  $\mu+2 < \lambda$ , so dass noch weitere Ecken des  $\lambda$ -ecks vorhanden sind). Man verbinde einen Punkt  $e_1^3$  auf  $e_1 e_0$  mit einem Punkte  $e_\mu^3$  auf  $e_\mu e_{\mu+1}$  durch die Strecke  $e_1^3 e_\mu^3$ , die also ganz innerhalb des Perimeters des  $\lambda$ -ecks verläuft. Auf den noch verbleibenden je 2 Kanten von den Ecken  $e_1, e_2, \dots, e_\mu$  im Diagramm, die nicht dem  $\lambda$ -eck angehören, fixiere man die Punkte  $e_1^1, e_1^2; e_2^1, e_2^2; e_3^1, e_3^2; \dots, e_\mu^1, e_\mu^2$  so, dass die Punkte  $e_1^1, e_2^1, e_3^1, \dots, e_\mu^1$ , sowie die Punkte  $e_1^2, e_2^2, e_3^2, \dots, e_\mu^2$  für sich je in einer Ebene durch die Kante  $e_1^3 e_\mu^3$  liegen. Durch diese beiden  $(\mu+2)$ -ecke, die beiden Dreiecke  $e_1^1 e_1^2 e_1^3, e_\mu^1 e_\mu^2 e_\mu^3$  und die  $\mu-1$  Vierecke  $e_1^1 e_1^2 e_2^2 e_2^1, e_2^1 e_2^2 e_3^2 e_3^1, \dots, e_{\mu-1}^1 e_{\mu-1}^2$

<sup>1)</sup> Es werde allgemein die Einfügung eines  $p_n', p_n'', p_n'''$ , ... in das Diagramm durch die Konstruktion  $(n-3)', (n-3)'', (n-3)''', \dots$  geleistet.

<sup>2)</sup> Vergl. Fig. 13<sup>a</sup> für  $\mu=4$ .

$e_{\mu-1}^2 e_{\mu}^2 e_{\mu}^1$  wird ein Huf  $p_{\mu+3}$  begrenzt, durch dessen Einfügung das Diagramm eines  $P_{p+1}$  entsteht.<sup>1)</sup> Wir bezeichnen diese Konstruktion als die Konstruktion  $\mu'$ .

Aus dem Polytop  $P_p(e, k, f, p)$  entsteht durch sie ein

$$P_{p+1}(e + \mu + 2, k + 2\mu + 4, f + \mu + 3, p + 1);$$

denn es ist  $e' = e - \mu + (2\mu + 2)$ ,  $k' = k - (\mu - 1) + (3\mu + 3)$ , während Flächen und Polyeder nicht verloren gehen, sondern nur neu hinzukommen. Bei Ausführung der geschilderten Konstruktion erleiden die beteiligten Polyeder des Diagrammes die folgenden Veränderungen. Durch die dreikantigen Schnitte  $e_1^1 e_1^2 e_1^3$  und  $e_{\mu}^1 e_{\mu}^2 e_{\mu}^3$  wird von den beiden Scheitelpolyedern  $\Pi_1$  und  $\Pi_{\mu}$  des Kantenzuges  $e_1 e_2 \dots e_{\mu}$  eine Ecke abgeschnitten (erste Polyederkonstruktion). Durch die  $\mu - 1$  Vierecke  $e_1^1 e_1^2 e_2^2 e_2^1$  u. s. w. werden die Kanten  $e_1 e_2 \dots$  von  $\mu - 1$  Polyedern  $\Pi_{1,2}, \Pi_{2,3}, \dots, \Pi_{\mu-1,\mu}$  abgeschnitten (zweite Polyederkonstruktion), während die beiden Polyeder  $\Lambda$  und  $\Lambda'$ , die das  $\lambda$ -eck gemein hatten, der als  $\mu$ -te bezeichneten Polyederkonstruktion unterworfen wurden. Beachten wir jetzt, das die Polytopkonstruktion nur dazu dienen soll, einen Huf  $p_{\mu+3}$  dem  $P_p$  einzufügen, so darf sie nur ausgeführt werden, wenn nach ihrer Erledigung das Polytop  $P_{p+1}$  keine Polyeder geringerer Flächenzahl, also auch keinen Huf niedrer Flächenzahl besitzt, denn sonst hätte dessen Einfügung die höhere Konstruktion unnötig gemacht, *Wir setzen allerdings hierbei die Erledigung der Einfügung aller Polyeder geringerer Flächenzahl überhaupt voraus.* Es dient die Einfügung eines Hufes  $p_{\mu+3}$  sonach erst zur Ableitung der  $P_{\mu+1}$   $\mu$ -ter Klasse aus den  $P_p$  und es ist diese Konstruktion auf *alle*  $P_p$  von der  $\mu$ -ten Klasse ab (die niedern Klassen ausgeschlossen) anzuwenden. Nur von der  $(\mu - 1)$ -ten Klasse der  $P_p$  sind noch gewisse Typen mit zuzuziehen, nämlich solche, die das  $\lambda$ -eck in der geschilderten Weise im Diagramm besitzen, und bei denen die Polyeder  $p_{\mu+2}$  lediglich längs des zu entfernenden Kantenzuges  $e_1, e_2, \dots, e_{\mu}$  liegen, also eine Kante dieses Zuges, oder wenigstens eine der Ecken  $e_1$  und  $e_{\mu}$  besitzen.

Das Maximum der Eckenzahl eines allgemeinen  $P_p$  ist vorhanden, wenn *alle* begrenzenden Polyeder  $(p-1)$ -flache sind. Da ein  $(p-1)$ -flach  $2p-6$  Ecken hat, so besitzen die  $p$  Polyeder  $p(2p-6)$  Ecken und das Polytop, da dann jede Ecke vierfach gezählt ist,  $\frac{p(2p-6)}{4}$  d. h.  $\frac{p(p-3)}{2}$  Ecken, wie oben angegeben wurde. Wir

<sup>1)</sup> Für  $\mu=1$  und 2 sind die eingefügten Polyeder ein  $p_4$  und  $p_5$ , und wir haben die schon erläuterte 1. und 2. Konstruktion.

beweisen jetzt den früher behaupteten Satz, dass für jeden Wert von  $p$  ( $> 5$ ) Polytope existieren, deren Eckenzahl dieses Maximum erreicht, durch den Schluss von  $p$  auf  $p + 1$ . Es existiere das Maximum  $M = \frac{p(p-3)}{2}$  für ein  $P_p$ , und wir setzen voraus, dass dann das Polytop einen Huf  $p'_{p-1}$  besitze (das vorher mit  $\Lambda$  bezeichnete Polyeder).

Die Zulässigkeit dieser Annahme wird sich zeigen.<sup>1)</sup> Auf diesen Huf wenden wir die Konstruktion  $\mu' = p-3$  an. Dies ist statthaft, denn die Fläche mit der Maximalzahl der Kanten des Hufes  $p'_{p-1}$  ist ein  $(p-2)$ -eck; man kann also einen Kantenzug mit  $p-3$  Ecken abschneiden, und zwar geschehe dies nach dem Schema  $a$ ) der Einleitung. Der dem Polytopdiagramm dadurch eingefügte Huf hat dann  $2(p-3) + 2 = 2p-4$  Ecken. Das neue Polytop besitzt also sicher mindestens diesen einen Huf! Die Zahl seiner Ecken ist aber gleich der Zahl der Ecken des ursprünglichen Polytopes, vermindert um  $p-3$  und vermehrt um  $2(p-3) + 2$ , d. h. es ist  $e' = M + p-1$ , oder

$$e' = \frac{p(p-3)}{2} + p-1 = \frac{(p+1)(p-2)}{2} = \frac{p'(p'-3)}{2}$$

für  $p' = p + 1$ , d. h. das neue  $P_{p+1}$  hat die Maximalzahl  $M'$  der Ecken. Nun existieren für  $p = 5, 6, 7$  Polytope mit der Maximalzahl der Ecken und mit Hufen, also . . . u. s. w.

Dass umgekehrt sämtliche Grenzpolyeder eines  $P_{p+1}$  mit  $M'$  Ecken  $p$ -flache sind, ist nach dem Vorhergehenden selbstverständlich. Für  $p = 5, 6, 7$  existiert nur je ein Polytop mit der Maximalzahl der Ecken und es sind sämtliche Grenzpolyeder in diesen drei Fällen Hufe  $p'_{p-1}$ . Schon für  $p = 8$  gibt es vier nach Isomorphismus verschiedene Polytope mit der Maximalzahl von 20 Ecken, und unter diesen wieder eins, das lediglich von Hufen  $p'_7$  begrenzt wird. Solche Polytope gibt es für jeden Wert von  $p$ . Zum Beweise dieses Satzes betrachten wir das Polytop  $P_7^5$ , bezw. sein Diagramm (Vergl. Fig. 13).

Sind  $e_1 e_2 e_3 e_4 e_5$  und  $e_1 e_2' e_3' e_4' e_5$  die beiden Fünfecke irgend eines beliebigen Hufes von  $P_7^5$ , so sind  $e_1 e_2$  und  $e_4' e_5$  gemeinsame Kanten je eines verschiedenen Dreiecks und Fünfecks. Die 4 Nachbarkanten dieser beiden Kanten, die nicht Scheiteltanten der beiden Fünfecke sind, sind stets Scheiteltanten der beiden Fünf-

<sup>1)</sup> Damit ist natürlich nicht ausgeschlossen, dass überdies auch Polytope mit der Maximalzahl der Ecken existieren, unter deren Grenzpolyedern sich keine Hufe befinden.



ecke eines benachbarten Hufes, und zwar die Scheiteltanten, die einem Dreieck und Viereck gemeinsam sind, so dass die 7 Dreiecke im Diagramm derart eine geschlossene Reihe bilden, dass jedes eine Ecke mit dem folgenden gemein hat:

$$A'EI' - I'KN' - N'MO' - O'GH' - H'DC' - C'LB' - B'FA'.$$

Daraus folgt, dass die dritte durch  $e_1 e_2$  bzw.  $e_4' e_5$  gehende gemeinsame Fläche der beiden weiteren Hufe in diesen Kanten stets ein Fünfeck ist. Die übrigen Kanten der Fünfecke des ersten Hufes sind somit stets Scheiteltanten der Fünfecke der Nachbarhufe. Wendet man nun auf den Kantenzug  $e_2 e_3 e_4 e_5$  die vierte Polytopkonstruktion an (auf das Polyeder die Konstruktion des Schema a) der Einleitung), so sieht man leicht ein, dass sämtliche in Anspruch genommenen Polyeder wieder zu Hufen werden <sup>1)</sup> und es ergibt sich ein neues Diagramm (Vergl. Fig. 49), das wieder denselben oben geschilderten Bau aufweist, wie das ursprüngliche. Durch die gleiche Betrachtung dieses und der folgenden Diagramme erschliesst man also, dass für jedes  $p$  ein Polytop aus lauter Hufen  $p'_{p-1}$  existiert.

Schliesslich ist auch noch durch Betrachtung des Diagrammes eines  $P_p$  mit der Maximalzahl der Ecken zu zeigen, wie man aus ihm Diagramme von Polytopen  $P_{p+1}$  sämtlicher zugehöriger Klassen ableitet, womit deren Existenz bewiesen ist. An dem Hufe  $\Lambda \equiv p'_{p-1}$  befinde sich der Kantenzug  $e_1, e_2, e_3, \dots, e_{p-3}$ . Wendet man auf je 1, 2, 3 . . .  $(p-3)$  aufeinanderfolgende Ecken die Konstruktion  $1', 2', 3' \dots (p-3)'$  an, so erhält man  $p-3$  Polytope der 1., 2., 3 . . .  $(p-3)$ -ten Klasse, d. h. aller für  $P_{p+1}$  vorhandenen Klassen der Polytope, denn es ist  $p-3 \equiv (p+1) - 4$ .

Wir kehren nun zurück zur Ableitung der  $P_{p+1}$  dritter und höherer Klasse aus den  $P_p$ . Dass die bisher betrachteten Konstruktionen  $\mu'$  der Einfügung von Hufen in die Diagramme nicht hinreichend sein können zur Ableitung sämtlicher  $P_{p+1}$ , geht schon daraus hervor, dass Polytope existieren, unter deren Polyedern sich keine Hufe befinden. <sup>2)</sup> Als fernere Konstruktionen allgemeineren

<sup>1)</sup> Die Abschneidung der Ecken  $e_2$  und  $e_5$  der Hufe in den Enden des Kantenzuges unterwirft diese der ersten Polyederkonstruktion in der gemeinsamen Ecke der beiden Fünfecke; die Abschneidung von Scheiteltanten  $e_3 e_4$  u. s. w. der Fünfecke eines Hufes durch die zweite Polyederkonstruktion führt aber stets wieder auf Hufe.

<sup>2)</sup> Z. B. die (allgemeinen) regulären Polytope  $Z_8$  und  $Z_{120}$  (SCHOUTE, a. a. O. S. 207 und 213) — Hiernach sind auch die in „Elemente d. vierdim. Geom.“ S. 40 etc. erläuterten Konstruktionen zur Ableitung der Tetraederpolytope (SCHOUTE, a. a. O. S. 34) nicht hinreichend; denn sie sind nur die den bisher abgehandelten Konstruktionen der allgemeinen Polytope dualistisch zugeordneten. Der kundige Leser wird sich die weiteren Tetraederpolytopkonstruktionen leicht ergänzen.

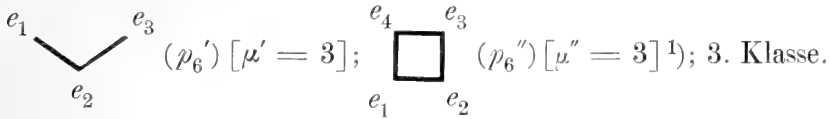
Charakters, die wir mit  $3''$ ,  $4''$ ,  $\dots \mu''$  bezeichnen wollen, betrachten wir die Einfügung eines *Prisma*  $p''_{\mu+3}$  in das Diagramm des  $P_p$ . Da seine Grund- und Deckfläche  $(\mu - 1)$ -Ecke sind, so ist die Konstruktion folgendermassen auszuführen. Es sei  $e_1 e_2 \dots e_{\mu+1}$  eine gemeinsame Fläche zweier Polyeder  $\Lambda$  und  $\Lambda'$  des Diagramms. Nimmt man auf den zwei von jeder der Ecken  $e$  ausgehenden weitem Kanten die Punkte  $e^1$  und  $e^2$  an, so dass die je  $\mu + 1$  Punkte  $e_1^1 e_2^1 \dots e_{\mu+1}^1$  und  $e_1^2 e_2^2 \dots e_{\mu+1}^2$  in einer Ebene liegen, so bilden diese beiden  $(\mu + 1)$ -ecke und die  $\mu + 1$  Vierecke  $e_i^1 e_i^2 e_{i+1}^1 e_{i+1}^2$  ein *Prisma*  $p''_{\mu+3}$ , das dem Diagramm eingefügt ist. Die beiden Polyeder  $\Lambda$  und  $\Lambda'$  sind dadurch morphologisch nicht geändert, sämtliche dritte Polyeder an den Kanten  $e_i e_{i+1}$  sind der zweiten Polyederkonstruktion unterworfen. Aus dem  $P_p (e, k, f, p)$  entsteht durch die Konstruktion  $\mu''$  ein  $P_{p+1} (e + \mu + 1, k + 2\mu + 2, f + \mu + 2, p + 1)$ .

Dabei ist festzuhalten, dass eine Konstruktion  $\mu''$  nur zur Erzeugung eines  $P_{p+1}$   $\mu''$ -ter ( $= 3, 4, 5 \dots$ ) Klasse auszuführen ist, also das neue Polytop keine Polyeder  $p_{\mu+2}$  (oder niederer Flächenzahl) mehr besitzt, oder mit andern Worten nur an den  $P_p$   $\mu$ -ter und höherer Klasse und überdies an den  $P_p$   $(\mu - 1)$ -ter Klasse, wenn die hierin noch vorkommenden  $p_{\mu+2}$  durch die Konstruktion in  $p_{\mu+3}$  übergehen. Dabei soll noch vorausgesetzt werden, dass die Konstruktionen  $\mu'$  den  $\mu''$  voranzustellen sind. Durch diese Bedingung wird die Anwendbarkeit von  $\mu''$  bereits bedeutend eingeschränkt. Was nun die weiteren Konstruktionen zur Ableitung der Diagramme der  $P_{p+1}$  vierter und höherer Klasse anbetrifft, <sup>1)</sup> so wollen wir nur die Erzeugung der Polytope vierter Klasse noch betrachten, da sich von da aus das weitere Verfahren klar überblicken lässt. Wir hatten bei den Konstruktionen  $\mu'$  und  $\mu''$  gewisse ebene Kantenzüge  $e_1 e_2 \dots e_\mu$  bzw.  $e_1 e_2 \dots e_{\mu+1}$  zweier Polyeder  $\Lambda$  und  $\Lambda'$  mit gemeinsamer Grenzfläche ins Auge gefasst, die für  $\mu = 1, 2, 3$  durch folgende einfache Figuren gegeben sind, durch deren Eliminierung und Ersetzung durch das beivermerkte Polyeder das  $P_p$  in ein  $P_{p+1}$  übergang, und zwar in eins der am Ende angezeigten Klasse:

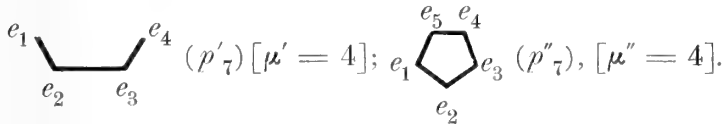
$$\dot{e}_1 (p_4) [\mu' = 1]; 1. \text{ Klasse.}$$

$$e_1 \text{---} e_2 (p_5) [\mu' = 2]; \begin{array}{c} e_3 \\ \triangle \\ e_1 \quad e_2 \end{array} (p_5) [\mu'' = 2]; 2. \text{ Klasse.}$$

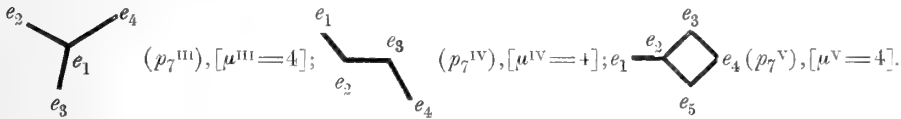
<sup>1)</sup> Die Polytope dritter Klasse sind erledigt, da nur der *Huf*  $p_e'$  und das *Prisma*  $p_e''$  existieren.



Für die Konstruktion der  $P_{p+1}$  vierter Klasse kommen nun zunächst die beiden schon erledigten Polyedereinfügungen in Frage, die durch die folgenden Figuren charakterisiert sind:



Weiter kann aber ein  $P_{p+1}$  vierter Klasse dadurch erzeugt werden, dass in das Diagramm  $P_p$  eins der drei noch verfügbaren Siebenfläche  $p_7^{\text{III}}$ ,  $p_7^{\text{IV}}$ ,  $p_7^{\text{V}}$  eingefügt wird. Für diese Polyeder sind die der Konstruktion zu Grunde liegenden Kantenzüge die folgenden:



Von den 3 Kanten der ersten Figur gehören je 2 derselben Grenzfläche einer Polyeders des Diagrammes an. Von den Ecken  $e_2, e_3, e_4$  gehen demnach noch 3 freie Kanten, von  $e_1$  noch eine freie Kante aus. Bestimmt man auf diesen 10 Kanten die Punkte  $e_1^1, e_2^1, e_3^1, e_4^1; e_2^2, e_3^2, e_4^2; e_1^3, e_2^3, e_3^3; e_1^4, e_2^4, e_3^4$  und  $e_1^5$ , so lässt sich aus diesen 10 Punkten ein  $p_7^{\text{III}}$  konstruieren (vergl. Fig. 7) mit den Flächen:  $\alpha \equiv e_2^2 e_3^2 e_4^2 e_1^1 e_2^1 e_3^1; \beta_1 \equiv e_2^2 e_3^2 e_4^2 e_1^1 e_2^1 e_3^1; \beta_2 \equiv e_1^1 e_2^1 e_3^1 e_4^1 e_1^4 e_2^4 e_3^4; \beta_3 \equiv e_1^1 e_2^1 e_3^1 e_4^1 e_1^4 e_2^4 e_3^4; \gamma_1 \equiv e_3^3 e_4^3 e_1^3 e_2^3 e_3^3 e_4^3; \gamma_2 \equiv e_3^3 e_4^3 e_1^3 e_2^3 e_3^3 e_4^3; \gamma_3 \equiv e_3^3 e_4^3 e_1^3 e_2^3 e_3^3 e_4^3$ . Das  $P_p (e, k, f, p)$  wird durch Einfügung dieses  $p_7^{\text{III}}$  zu einem  $P_{p+1} (e + 6, k + 12, f + 7, p + 1)$ .

Von den 3 Kanten der zweiten obigen Figur liegen  $e_1 e_2$  und  $e_2 e_3$ , sowie  $e_2 e_3$  und  $e_3 e_4$  je in einer Ebene eines Polyeders des Diagrammes. Auf den 10 freien Kanten dieser 4 Ecken setze man die Punkte  $e_1^1 e_2^1 e_3^1; e_1^2, e_2^2; e_1^3, e_2^3; e_1^4, e_2^4, e_3^4$  so fest, dass diese die Ecken eines  $p_7^{\text{IV}}$  bilden, das dem Diagramm einzufügen ist.

<sup>1)</sup> Die Konstruktion  $\mu'' = 2$  ist entbehrlich. Denn hat sich ein gewisses  $P_{p+1}$  durch sie aus einem  $P_p$  ergeben, so reduciere man dieses  $P_{p+1}$  durch Anwendung der Umkehrung von  $p' = 2$  auf dieses eingefügte  $p_5$  in ein  $P_p$ , das natürlich ein andres sein muss, wie das ebengenannte, denn die Konstruktion  $\mu' = 2$  erhöhte die Eckenzahl um 4,  $\mu'' = 2$  jedoch nur um 3. Es wird sich also das durch  $p'' = 2$  erzeugte  $P_{p+1}$  bereits unter den mittels  $\mu' = 2$  gefundenen Polytopen finden.

(Vergl. Fig. 52<sup>a</sup> und den Text in § 2). Es entsteht dadurch ein  $P_{p+1}$  mit derselben Formel wie vorher.

Es ist kaum nötig, die Einfügung eines  $p_7^V$  in das Diagramm eines  $P_p$  durch Benutzung der dritten der obigen Figuren, bei der die Kante  $e_1 e_2$  nicht in der Ebene des Vierecks  $e_2 e_3 e_4 e_5$  liegt, zu erläutern. Das neue  $P_{p+1}$  besitzt aber hier die Formel  $P_{p+1}(e+5, k+10, f+6, p+1)$ , da das Viereck  $e_2 e_3 e_4 e_5$  bei der Konstruktion getilgt wird. *Die oben gezeichneten Linearfiguren der Kanten eines Polyeders im Diagramme des  $P_p$  sind nun nichts anderes, als die Deckkantensysteme der  $p_7$  im Sinne von O. Hermes; <sup>1)</sup> und es lässt sich also die betreffende Konstruktion  $\mu$  so oft an dem Diagramme des  $P_p$  ausführen, als das zugehörige Deckkantensystem an den Polyedern des Diagrammes ausfindig gemacht werden kann. Abgesehen von dem mehrfachen Ergebnis desselben  $P_{p+1}$  durch verschiedene Konstruktionen erfährt die Anwendung jeder eine Einschränkung durch die früher festgesetzte Folge der Einfügung der Polyeder  $p_7$  nach ihrem oberen Index. Es ist nun leicht zu übersehen, wie die Konstruktionen  $\mu^{III}, \mu^{IV}, \mu^V \dots (\mu = 5, 6, 7 \dots)$  mit den Deckkantenzügen der  $p_8, p_9 \dots$  in Zusammenhang zu bringen sind. Wir erläutern jetzt den bisherigen theoretischen Teil durch die Ableitung aller allgemeinen Oktatope aus den bekannten fünf allgemeinen Siebenzellen.*

## § 2. Die allgemeinen Oktatope oder Achtzelle.

a). *Die Oktatope erster Klasse.* Die Konstruktion  $\mu' = 1$ , d. h. die Einfügung eines Tetraeders  $p_4$  in die Diagramme der Siebenzelle zur Erzeugung sämtlicher  $P_8$  erster Klasse ist an allen Ecken der  $P_7$  auszuführen, so weit nicht schon ein Blick auf das Diagramm des  $P_7$  zeigt, dass in Folge seines symmetrischen Baues eine Reihe von Ecken übergangen werden kann, da sich durch ihre Beanspruchung keine weiteren isomorph verschiedenen  $P_8$  ergeben können. Die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen der  $P_7$ , sowie die Zahl der begrenzenden Polyeder  $p_i$  sind zur Uebersicht in der folgenden *Tabelle* zusammengestellt, nebst dem Hinweis auf die Figur des Diagrammes.

<sup>1)</sup> Vergl. Vielecke und Vielfache S. 97.

Bezeichnung u. Figur.	$e$	$k$	$f$	$p$	$p_4$	$p_5$	$p_6'$	$p_6''$	Klasse.
$P_7^1$ Fig. 9	11	22	18	7	2	2	3	—	1
$P_7^2$ Fig. 10 u. 10 <sup>a</sup>	12	24	19	7	1	2	4	—	1
$P_7^3$ Fig. 11					—	4	—	3	2
$P_7^4$ Fig. 12	13	26	20	7	—	2	4	1	2
$P_7^5$ Fig. 13	14	28	21	7	—	—	7	—	3

Das Diagramm Fig. 9 von  $P_7^1$  ist offenbar symmetrisch (natürlich ganz allgemein morphologisch aufgefasst) gegen die Ebene des Dreiecks  $AF L$  und gegen die Ebene des Fünfecks  $CD H F E$ . Es ergibt sich daraus sofort, welche Ecken, Kanten, Kantenpaare u. s. w. morphologisch gleichwertig sind, z. B. die Ecken  $C, D; B, E, K, G, H, I; A, F, L$ . Es ist also die Konstruktion  $\mu' = 1$  nur an 3 Ecken auszuführen, z. B.  $A, B$ , und  $C$ . Ersetzen wir diese Ecken durch die je 4 Ecken  $A_1, A_2, A_3, A_4$  u. s. w., so ergeben sich die folgenden 3 Oktatope erster Klasse. Durch Tilgung von  $A$  entsteht das Achtzell  $P_8^1$  (Fig. 14), ein Huf über der Fläche  $\alpha$  von  $p_7^{\text{III}}$ .<sup>1)</sup> Die Tilgung der Ecke  $B$  gibt das Achtzell  $P_8^2$  (Fig. 15), einen Huf über der Fläche  $\alpha$  von  $p_7^{\text{IV}}$ . Tritt an Stelle der Ecke  $C$  das  $p_4 = C_1 C_2 C_3 C_4$ , so ergibt sich der Huf  $P_8^3$  (Fig. 16) über der Fläche  $\alpha$  von  $p_7'$ . Diese 3 Oktatope erster Klasse sind die einzigen vom Minimum  $e = 14$  der Zahl der Ecken.

Der symmetrische Bau des Diagrammes des Hufes  $P_7^2$  ist am deutlichsten an Fig. 10<sup>a</sup> zu erkennen, in welcher die Ebene des Vierecks  $B E M L$  Symmetrieebene ist. Allgemein gilt: Die gemeinsame Ebene zweier begrenzender dreidimensionaler Hufe eines vierdimensionalen Hufes ist Symmetrieebene des Diagrammes des Polytopes<sup>2)</sup>. Das Diagramm von  $P_7^2$  ist aber auch symmetrisch gegen die Ebene des Vierecks  $K H G I$ , wie sowohl Fig 10 als 10<sup>a</sup> erkennen lässt. In Bezug auf diese beiden Symmetrieebenen sind die Ecken  $A, C; G, H; I, K; D, F$ ; bzw.  $A, D; B, E; C, F; L, M$  gleichwertig; woraus folgt, dass die Konstruktion  $\mu' = 1$  an

<sup>1)</sup> In den Figuren 14 u. s. w. der Diagramme der Oktatope ist den nicht durch die vorgenommene Konstruktion getilgten Ecken der Diagramme der  $P_7$  derselbe Buchstabe belassen. Nur soweit sich die Art der begrenzenden Polyeder leicht aus der Figur der  $P_8$  erkennen lässt, ist sie nicht besonders angeführt (vergl. hierzu auch die Haupttabelle am Schlusse).

<sup>2)</sup> Dies leuchtet sofort ein, wenn man das Diagramm dadurch bildet, dass man die Hufe mit dieser Ebene *aussen* an einander setzt und dann homologe Ecken durch Gerade verbindet.

5 Ecken auszuführen ist, z. B.  $B, L, C, G$  und  $I$ . Es ergeben sich jedoch nur die folgenden 3 Achtzelle erster Klasse. Durch Tilgung der Ecke  $B$  erhält man das Diagramm (Fig. 17) eines  $P_8^4$ , eines Hufes über einer Fläche  $\beta$  von  $p_7^{\text{III}}$ . Die Ersetzung der Ecke  $L$  in  $P_7^2$  durch das  $p_4 = L_1 L_2 L_3 L_4$  gibt das Diagramm (Fig. 18) eines Hufes  $P_8^5$  über einer Fläche  $\beta$  von  $p_7^{\text{IV}}$ . Tritt an Stelle der Ecke  $C$  von  $P_7^2$  das  $p_4 = C_1 C_2 C_3 C_4$ , so ergibt sich das Diagramm (Fig. 19) eines  $P_8^6$  allgemeineren Charakters. Zwei  $p_7^{\text{IV}}$  haben das Sechseck  $C_1 C_4 B L K H$  gemein, und über dem inneren  $p_7^{\text{IV}}$  ist der Punkt  $D$  mit den Ecken  $A$  und  $G$  des untern (bezw. innern) und mit den Ecken  $E$  und  $F$  des umhüllenden  $p_7^{\text{IV}}$  des Diagrammes zu verbinden. Ersetzt man die Ecke  $G$  in  $P_7^2$  durch ein  $p_4$ , so ergibt sich ein mit Fig. 17 isomorphes Diagramm, wenn man das zunächst erhaltene in einen andern Grenzkörper projiziert. Die Ersetzung der Ecke  $I$  durch ein  $p_4$  führt auf ein mit Fig. 18 isomorphes Diagramm. Um nicht zu weitläufig zu werden, sollen im Folgenden solche Ergebnisse isomorpher Diagramme von vornherein unberücksichtigt bleiben.

Die Symmetrieeigenschaften des Diagrammes Fig. 11 von  $P_7^3$  sind leicht zu übersehen. Bei Ersetzung der Ecke  $G$  durch das Tetraeder  $G_1 G_2 G_3 G_4$  ergibt sich das einzige durch  $\mu' = 1$  aus  $P_7^3$  zu erhaltende Achtzell  $P_8^7$  (Fig. 20). Dieses  $P_8^7$  ist ein vierdimensionaler Huf über einer Fläche  $\alpha$  von  $p_7^{\text{V}}$ . Das Diagramm des Siebenzells  $P_7^4$  (Fig. 12) besitzt die Symmetrieebene der Flächen  $IKN$  und  $LMN$ . Daher sind nur noch 5 Ecken zur Konstruktion  $\mu' = 1$  heranzuziehen, z. B.  $B, K, N, G, L$ ; doch ergeben sich nur 3 neue Oktatope. Durch Abschneiden der Ecke  $B$  in Fig. 12 mittels  $p_4 = B_1 B_2 B_3 B_4$  ergibt sich das Diagramm allgemeineren Charakters (Fig. 21) eines  $P_8^8$  erster Klasse, das nur noch ein  $p_4$  enthält. Die Ersetzung der Ecke  $K$  führt zu dem Hufe  $P_8^9$  über einer Fläche  $\gamma$  von  $p_7^{\text{IV}}$ , dessen Diagramm Fig. 22 darstellt. Tritt an Stelle der Ecke  $N$  in Fig. 12 ein  $p_4$ , so ergibt sich das Diagramm (Fig. 23) eines Hufes  $P_8^{10}$  über der Fläche  $\beta_1$  eines  $p_7'$ .

Ehe wir auf die Ecken des Siebenzells  $P_7^5$  (Fig. 13) die Konstruktion  $\mu' = 1$  anwenden, sei es noch einer genaueren Betrachtung unterzogen. Es ist nach Früherem einleuchtend, dass dieses  $P_7^5$  sieben isomorphe Diagramme ergibt, wenn man es der Reihe nach in jedes seiner 7 Grenzpolyeder  $p_6'$  projiziert. Seine Ecken sind zweierlei Art. Sieben Ecken werden von 2 Dreiecken, 1 Viereck und 3 Fünfecken gebildet, nämlich  $A', B', C', H', I', N', O'$ . Die andern 7 Ecken  $D, E, F, G, K, L, M$  von 1 Dreieck, 3 Vierecken



und 2 Fünfecken. In jedem der sieben  $p_6'$  liegen diese Ecken verschiedener Art wie die durch  $e$  und  $e'$  unterschiedenen Ecken des Sechsecks in Fig. 2. Wendet man die Konstruktion  $\mu' = 1$  auf die Ecken derselben Art an, so ergeben sich isomorphe Diagramme, und es resultieren daher nur 2 durch Isomorphismus unterschiedene Oktatope. Um auch bei weitem Konstruktionen, die auf  $P_7^5$  anzuwenden sind, die Zuordnung der Achtzelle leichter übersehen zu können, seien die begrenzenden 7 Sechsecke  $p_6'$  einzeln bezeichnet: (vergl. Fig. 13).

$$\begin{aligned} \text{I} &\equiv A' B' C' D E F G H'; \\ \text{II} &\equiv A' B' C' D E I' K L; \\ \text{III} &\equiv I' A' B' L K N' M F; \\ \text{IV} &\equiv N' I' A' F M O' G E; \\ \text{V} &\equiv O' N' I' E G H' D K; \\ \text{VI} &\equiv O' H' C' L M N' K D; \\ \text{VII} &\equiv C' H' O' M L B' F G. \end{aligned}$$

Das Achtzell  $P_8^{11}$  mit dem Diagramme Fig. 24 ergibt sich durch Tilgung der Ecke  $L$  von  $P_7^5$ . Die begrenzenden Polyeder sind hier:  $\text{I} = p_6'$ ;  $\text{II} \sim p_7^{\text{IV}}$ ;  $\text{III} \sim p_7'''$ ;  $\text{IV} = p_6'$ ;  $\text{V} = p_6'$ ;  $\text{VI} \sim p_7'''$ ;  $\text{VII} \sim p_7^{\text{IV}}$  und das neu eingefügte  $p_4$  ( $L_1 L_2 L_3 L_4$ ), wobei z. B.  $\text{II} \sim p_7^{\text{IV}}$  bedeutet, dass das Polyeder II des Siebenzells durch  $\mu' = 1$  im Achtzell in ein Siebenfläch  $p_7^{\text{IV}}$  übergegangen ist, während  $\text{I} = p_6'$  andeutet, dass das Sechseck I des Siebenzells als  $p_6'$  erhalten blieb.

$P_8^{12}$  ist das Achtzell mit dem Diagramm Fig. 25, entstanden durch Ersetzung der Ecke  $A'$  durch ein  $p_4$ . Die übrigen 7 Grenzpolyeder sind:  $\text{I} \sim p_7^{\text{IV}}$ ;  $\text{II} \sim p_7'$ ;  $\text{III} \sim p_7'$ ;  $\text{IV} \sim p_7^{\text{IV}}$ ;  $\text{V} = p_6'$ ;  $\text{VI} = p_6'$ ,  $\text{VII} = p_6'$ . Hiermit sind die Oktatope erster Klasse erschöpft und es existieren also deren zwölf mit 14 bis 17 Ecken; eins derselben hat  $3p_4$ , vier haben  $2p_4$ , während 7 nur noch ein Tetraeder unter ihren begrenzenden Polyedern besitzen.

b) *Die Oktatope zweiter Klasse.* Um ein solches aus dem Siebenzell  $P_7^1$  zu erhalten, hat man die Konstruktion  $\mu' = 2$  nach den allgemeinen Erörterungen nur auf die Kante  $CD$  in Fig. 9 anzuwenden. Es ergibt sich ein vierdimensionaler Huf  $P_8^{13}$  mit 15 Ecken über einer Fläche  $\alpha$  von  $p_7''$ , dessen Diagramm in Fig. 26 dargestellt ist. Der Huf  $p_5 = C_1 C_2 C_3 D_1 D_2 D_3$  ist das durch die Konstruktion an Stelle der Kante  $CD$  getretene Polyeder.

Aus  $P_7^2$  ergeben sich 3 isomorph verschiedene Oktatope zweiter Klasse durch Tilgung der Kanten  $LK$ ,  $LM$ ,  $KI$  des Tetraeders, bezw. seiner Scheitellkanten  $KH$  und  $ME$ . Tritt an Stelle der Kante  $LK$  das Fünfflach  $L_1 L_2 L_3 K_1 K_2 K_3$ , so ergibt sich das

Achtzell  $P_8^{14}$ , dessen Diagramm Fig. 27 zeigt. Die Ersetzung der Kante  $LM$  von  $P_7^2$  führt auf das  $P_8^{15}$  (Fig. 28), einen vierdimensionalen Huf über der Fläche  $\beta_2$  von  $p_7'$ . Auf dasselbe Achtzell führt die Konstruktion  $\mu' = 2$  an der Kante  $KI$ . Das Diagramm Fig. 29 ist das eines  $P_8^{16}$ , das aus  $P_7^2$  sowohl durch Anwendung von  $\mu' = 2$  auf die Kante  $KH$  als  $ME$  resultiert. Wir haben hier einen vierdimensionalen Huf über einer Fläche  $\beta$  von  $p_7^v$ . Das Siebenzell  $P_7^3$  ergibt nur durch Tilgung einer Kante wie  $ML$  ein Achtzell  $P_8^{17}$ , das nicht mit bereits abgeleiteten isomorph ist. Das Polytop, dessen Diagramm Fig. 30 zeigt, ist ein Huf über einer Fläche  $\beta$  von  $p_7''$  und zugleich ein vierdimensionales Prisma über  $p_6'$ . Wir wenden nun die Konstruktion  $\mu' = 2$  auf das Siebenzell  $P_7^4$  an. Wegen der Symmetrie seines Diagrammes braucht sie nur auf die Kanten  $BC$ ,  $CD$ ,  $CK$ ,  $KI$ ,  $CG$  und  $GL$  angewandt zu werden. Wird die Kante  $BC$  von  $P_7^4$  durch das Fünfflach  $B_1 B_2 B_3 C_1 C_2 C_3$  ersetzt, so ergibt sich das Diagramm Fig. 31 eines Oktatopes  $P_8^{18}$ , das ein Huf über einer Fläche  $\gamma$  von  $p_7^{III}$  ist. Die Ersetzung der Kante  $CD$  führt auf den Huf  $P_8^{19}$  über einem Dreieck  $\delta$  von  $p_7^{IV}$ . Das Diagramm zeigt Fig. 32. Ersetzt man die Kante  $CK$  von  $P_7^4$  durch das Fünfflach  $C_1 C_2 C_3 K_1 K_2 K_3$ , so erhält man das Diagramm Fig. 33 eines  $P_8^{20}$  allgemeineren Charakters. Der vierdimensionale Huf  $P_8^{21}$  (Fig. 34) über einer Fläche  $\gamma$  des  $p_7'$  ist erzeugt durch Anwendung von  $\mu' = 2$  auf die Kante  $KI$  von  $P_7^4$ . Die Ersetzung der Kante  $CG$  von  $P_7^4$  durch ein  $p_5$  führt auf das Oktatop allgemeineren Charakters  $P_8^{22}$ , dessen Diagramm Fig. 35 zeigt. Die Anwendung von  $\mu' = 2$  auf die Kante  $GL$  von  $P_7^4$  endlich ergibt das Achtzell  $P_8^{23}$  mit dem Diagramme Fig. 36.

Um aus dem Siebenzell  $P_7^5$  durch die Konstruktion  $\mu' = 2$  Achtzelle abzuleiten, ist zu beachten, dass die Kanten von  $P_7^5$  von dreierlei Art sind, je nachdem sie 2 Ecken  $e$ , 2 Ecken  $e'$ , oder eine Ecke  $e$  mit einer Ecke  $e'$  nach der früheren Bezeichnung verbinden. Es ergeben sich daher 3 durch Isomorphismus verschiedene Oktatope mit 18 Ecken. Durch Tilgung der Kante  $LM$  vom Typus  $e, e$  ergibt sich das Achtzell  $P_8^{24}$  (Fig. 37) mit den Grenzpolyedern <sup>1)</sup>:  $I = p_6'$ ;  $II \sim p_7^{IV}$ ;  $III \sim p_7'$ ;  $IV \sim p_7^{IV}$ ;  $V = p_6'$ ;  $VI \sim p_7^v$ ;  $VII \sim p_7^v$  und dem eingefügten  $p_5$  ( $L_1 L_2 L_3 M_1 M_2 M_3$ ).

Bei Ersetzung der Kante  $OH$  durch ein  $p_5$  ergibt sich das Diagramm Fig. 38 eines  $P_8^{25}$ , das im übrigen von den Polyedern begrenzt wird:  $I \sim p_7^{IV}$ ;  $II = p_6'$ ;  $III = p_6'$ ;  $IV \sim p_7^{IV}$ ;  $V \sim p_7^{IV}$ ;

<sup>1)</sup> In allen folgenden aus  $P_7^5$  abgeleiteten Diagrammen ist die obere Strichelung der Eckenbuchstaben weggelassen.

$VI \sim p_7''$ ;  $VII \sim p_7^{IV}$ . Die Elimination der Kante  $LC$  endlich ergibt das Achtzell  $P_8^{26}$  (Fig. 39) mit den Polyedern:  $I \sim p_7'$ ;  $II \sim p_7'$ ;  $III \sim p_7^{III}$ ;  $IV = p_6'$ ;  $V = p_6'$ ;  $VI \sim p_7^V$ ;  $VII \sim p_7^{IV}$  und dem Fünfflach  $p_5$  ( $L_1 L_2 L_3 C_1 C_2 C_3$ ). Es haben sich somit im ganzen 14 Oktatope zweiter Klasse mit 15 bis 18 Ecken ergeben.

*c). Die Oktatope dritter Klasse.* Um diese Polytope abzuleiten, haben wir zunächst die Konstruktion  $\mu' = 3$  zu beachten. Nach den allgemeinen Erörterungen braucht sie auf die Siebenzelle  $P_7^1$  und  $P_7^2$  nicht mehr angewandt zu werden, und von dem  $P_7^3$  kommt nur ein Kantenzug in Frage, durch dessen Tilgung sämtliche  $p_5$  in Sechsfache übergehen. Tilgt man den Kantenzug  $M L K$  in Fig. 11, so ergibt sich das Achtzell  $P_8^{27}$  mit 17 Ecken, dessen Diagramm Fig. 40 zeigt. Es ist ein vierdimensionaler Huf über der Fläche  $\gamma_1$  von  $p_7^V$ .

Auf  $P_7^4$  ist die Konstruktion  $\mu' = 3$  nur für solche Kantenaare anzuwenden, bei deren Tilgung die beiden vorhandenen  $p_5$  zerstört werden. Zur leichtern Uebersicht führen wir für die Grenzpolyeder von  $P_7^4$  hier die Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned}
 a &\equiv p_6' (L H D I N K C G); \\
 b &\equiv p_6' (M E A I N K B F); \\
 c &\equiv p_6' (N M F B K C G L); \\
 d &\equiv p_6' (I A E M N L H D); \\
 e &\equiv p_5 (F E H G L M); \\
 f &\equiv p_6'' (A B C D E F G H); \\
 g &\equiv p_5 (A B C D I K).
 \end{aligned}$$

Wie die genauere Untersuchung zeigt, ergeben sich nur 3 neue isomorph verschiedene Achtzelle.  $P_8^{28}$  (Fig. 41) entsteht aus  $P_7^4$ , wenn der Kantenzug  $L N K$  durch ein  $p_6'$  ersetzt wird. Die beiden Polyeder  $a$  und  $c$  werden hierbei durch einen fünfseitigen Schnitt beide zu Siebenflächen  $p_7^V$ , nämlich <sup>1)</sup>  $a \sim p_7^V$  ( $I D H L_1 N_1$ ;  $K_1 K_3 L_3 G C$ ) und  $c \sim p_7^V$  ( $M F B K_2 N_2$ ;  $L_2 L_3 K_3 C G$ ). Die Polyeder  $b$  und  $d$  werden durch vierseitige Schnitte zu  $p_7^{IV}$ , nämlich  $b \sim p_7^{IV}$  ( $N_1 N_2 M E A I$ ,  $K_1 K_2 B F$ ) und  $d \sim p_7^{IV}$  ( $M E A I N_1 N_2$ ;  $L_2 L_1 H D$ ). Die Fünffläche  $e$  und  $g$  gehen durch dreiseitige Schnitte in  $p_6'$  über:  $e \sim p_6'$  ( $M E H L_1 L_2$ ;  $L_3 G F$ ) und  $g \sim p_6'$  ( $I K_1 K_2 B A$ ;  $D C K_3$ ). Das Polyeder  $f$  bleibt das  $p_6''$  ( $A B C D$ ;  $H G F E$ ) und das eingefügte  $p_6'$  ist  $p_6'$  ( $L_3 K_3 K_2 N_2 L_2$ ;  $L_1 N_1 K_1$ ). Hiernach sind die 8 Grenzpolyeder in dem Diagramm Fig. 41 leicht auf-

<sup>1)</sup> Die Reihenfolge der Buchstaben der Ecken der neuen  $p$  ist im Ausschluss an die Figuren 2 bis 8 der Diagramme stets so gewählt, dass zunächst die Ecken der „Grundfläche“ und dann die Ecken des „Deckkantenzuges“ geschrieben sind.

zufinden. Die Ersetzung des Kantenzuges  $MEA$  durch ein  $p_6'$  erzeugt ein  $P_8^{29}$  (Fig. 42) mit den begrenzenden Polyedern:

$$\begin{aligned} b &\sim p_7^{\text{IV}} (NM_3 M_2 F B K; I A_3 A_2 E_2); \\ c &\sim p_7^{\text{IV}} (M_4 N K B F M_2; M_1 L G C); \\ d &\sim p_7'' (H D I N L; M_1 E_1 A_1 A_3 M_3); \\ e &\sim p_6' (G F E_2 E_1 H; L M_1 M_2); \\ f &\sim p_7'' (A_1 A_2 B C D; H E_1 E_2 F G); \\ g &\sim p_6' (A_2 B C D A_1; A_3 I K); \\ a &= p_6' (L N I D H; G C K); \end{aligned}$$

dazu das neu eingefügte  $p_6' (M_3 A_3 A_2 E_2 M_2; M_1 E_1 A_1)$ .

Tritt an Stelle des Kantenzuges  $HDA$  ein  $p_6'$  so ergibt sich ein Achtzell  $P_8^{30}$  (Fig. 43) mit folgenden Polyedern:

$$\begin{aligned} a &\sim p_7^{\text{V}} (N L G C K; I D_1 D_2 H_2 H_1); \\ b &\sim p_7^{\text{III}} (M E A_2 A_1 I N; F B K_1 A_2); \\ d &\sim p_7^{\text{III}} (A_1 A_3 E M N I; D_1 H_1 H_3; L); \\ f &\sim p_7^{\text{V}} (H_3 H_2 G F E; A_3 A_2 B C D_2); \\ e &\sim p_6' (E F G H_2 H_3; H_1 L M); \\ g &\sim p_6' (I K C D_2 D_1; A_1 A_2 B); \\ \text{und } c &= p_6' (N L G C K; B F M). \end{aligned}$$

Dazu das eingefügte  $p_6' (H_3 A_3 A_2 D_2 H_2; H_1 D_1 A_1)$ . Diese 3 Achtzelle besitzen je 18 Ecken.

Um aus dem Siebenzell  $P_7^5$  durch  $\mu' = 3$  Achtzelle abzuleiten, hat man zu beachten, dass die zweikantigen Züge wegen der zu unterscheidenden Ecken  $e$  und  $e'$  verschiedenartig gewählt werden können. Es zeigt die Untersuchung, dass die folgenden Anordnungen auf neue isomorph verschiedene Oktatope führen.

Der Zug  $e', e, e$ , z. B.  $I' K L$  (Kanten eines Fünfeckes); der Zug  $e', e', e$  z. B.  $A' B' L'$  (desgl.); der Zug  $e', e', e'$  z. B.  $A' B' C$  (desgl.), sowie der Zug  $e, e', e$  z. B.  $G H' D$  (Kantenzug eines Vierecks). Ein Zug  $e', e, e'$  tritt nur an Dreiecken auf, ist also zur Konstruktion unbrauchbar, und der Zug  $e, e, e$  der an Vierecken vorkommt (z. B.  $K L M$ ) führt auf dasselbe Polytop wie  $e' e' e'$ . Es ergeben sich danach die folgenden 4 durch Isomorphismus unterschiedenen Oktatope mit 19 Ecken. Das Achtzell  $P_8^{31}$  (Fig. 44), erzeugt durch Ersetzung des Kantenzuges  $I' K L$ , besitzt die begrenzenden Polyeder:

$$\begin{aligned} \text{I} &= p_6' (B C D E A; F G H); \\ \text{II} &\sim p_7'' (A B C D E; I_2 I_3 L_3 L_2 K_2); \\ \text{III} &\sim p_7^{\text{IV}} (I_1 I_3 A F M N; K_1 L_1 L_3 B); \\ \text{IV} &\sim p_7' (I_1 I_3 A F M N; O G E I_2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &\sim p_7' (O G E I_2 I_1 N; K_1 K_2 D H); \\ VI &\sim p_7' (O N K_1 K_2 D H; C L_2 L_1 M); \\ VII &\sim p_7^{IV} (L_2 C H O M L_1; L_3 B F G); \end{aligned}$$

dazu das neu eingeführte  $p_6' (L_3 I_3 I_2 K_2 L_2; L_1 K_1 I_1)$ .

Das Achtzell  $P_8^{32}$  (Fig. 45) entsteht aus  $P_7^5$  durch Ersetzung des Kantenzuges  $A' B' L$  mittels des Sechsfaches

$$p_6' (A_3 L_3 L_2 B_2 A_2; A_1 B_1 L_1).$$

Die übrigen Polyeder sind:

$$\begin{aligned} I &\sim p_7^{IV} (F G H C B_2 B_1; A_1 A_2 E D); \\ II &\sim p_7^V (B_2 A_2 E D C; L_2 L_3 A_3 I K); \\ III &\sim p_7^{IV} (A_1 A_3 I N M F; B_1 L_1 I_3 K); \\ IV &\sim p_7^{IV} (A_3 I N M F A_1; A_2 E G O); \\ V &= p_6' (N O G E I; K D H); \\ VI &\sim p_7^{III} (O M L_1 L_2 C H; D K N; L_3); \\ VII &\sim p_7' (C B_2 B_1 F G H; O M L_1 L_2). \end{aligned}$$

Ersetzt man den Kantenzug  $A' B' C'$  durch das Sechsfach  $p_6' (A_3 C_3 C_2 B_2 A_2; A_1 B_1 C_1)$  so entsteht das Achtzell  $P_8^{33}$  (Fig. 46) dessen übrige Polyeder sind:

$$\begin{aligned} I &\sim p_7^V (A_2 A_3 C_3 C_2 B_2; F G E D H); \\ II &\sim p_7^V (B_1 A_1 A_3 C_3 C; L K I E D); \\ III &\sim p_7^{IV} (A_2 A_1 I N M F; B_2 B_1 L K); \\ IV &\sim p_7^{IV} (A_1 I N M F A_2; A_3 E G O); \\ V &= p_6' (O H D K N; I E G); \\ VI &\sim p_7^{IV} (O H C_2 C_1 L M; N K D C_3); \\ VII &\sim p_7^{IV} (L M O H C_2 C_1; B_1 B_2 F G). \end{aligned}$$

Die Elimination des Kantenzuges  $G H' D$  endlich durch das Sechsfach  $p_6' (G_3 D_3 D_2 H_2 G_2; G_1 H_1 D_1)$  führt auf das Achtzell  $P_8^{34}$  (Fig. 47) mit den weiteren Grenzkörpern:

$$\begin{aligned} I &\sim p_7^{III} (A E D_3 D_1 C B; F G_1 G_3; H_1); \\ II &\sim p_7^{III} (A E D_3 D_1 C B; L K I; D_2); \\ III &= p_6' (I K L B A; F M N); \\ IV &\sim p_7^{III} (G_3 E I N O G_2; G_1 F A; M); \\ V &\sim p_7^{III} (O G_2 G_3 E I N; K D_2 H_2; D_3); \\ VI &\sim p_7^{IV} (M L C H_1 H_2 O; N K D_2 D_1); \\ VII &\sim p_7^{IV} (L M O H_2 H_1 C; B F G_1 G_2). \end{aligned}$$

Weitere Oktatope dritter Klasse können sich nun mittels der Konstruktion  $\mu'' = 3$  d. h. Einfügung eines Sechsfaches  $p_6''$  ergeben.

Da nach Erledigung der Konstruktion das Polytop keine  $p_6'$  enthalten darf, ebensowenig aber Polyeder geringerer Flächenzahl, so ist, da die Einführung des  $p_6''$  nur 4 Grenzpolyeder von  $P_7$  morphologisch ändert, die Konstruktion nur anwendbar, wenn die drei weiteren Polyeder bereits  $p_6''$  sind. Die einzige zulässige Konstruktion ist deshalb in dem Siebenzell  $P_7^3$  (Fig. 11) an dem geschlossenen Kantenzuge  $I K L M$  auszuführen, durch dessen Elimination die vier  $p_5$  in  $p_6''$  übergehen. Das erzeugte  $P_8^{35}$ , dessen Diagramm mit 16 Ecken Fig. 48 zeigt, wird also von acht  $p_6''$  gebildet und ist mit dem bekannten regulären Achtzell<sup>1)</sup> aus 8 Hexaedern (Würfeln) isomorph. Damit haben sich in Summa 9 Achtzelle dritter Klasse mit 16 bis 19 Ecken ergeben.

d.) *Die Oktatope vierter Klasse.* Die erste Konstruktion zur Ableitung der Achtzelle vierter Klasse aus den  $P_7$ , nämlich  $\mu' = 4$ , die in der Einfügung eines  $p_7'$  besteht, kann ebenso wie die noch folgenden Konstruktionen nur an dem Siebenzell  $P_7^5$  in Frage kommen, und ist an den Kanten des gemeinsamen Fünfecks irgend zweier begrenzenden  $p_6'$  auszuführen. Wir bezeichnen dabei die geänderten Polyeder in  $P_8$  wieder mit den entsprechenden Nummern I, II... VII wie in  $P_7^5$  und nennen das neu hinzugefügte Polyeder VIII.

Wählen wir als Polyeder  $\Lambda$  und  $\Lambda'$  der allgemeinen Erörterungen die Polyeder I und VII von  $P_7^5$  mit der gemeinsamen Fläche  $B' C' H' G F$ , so führt die Anwendung von  $\mu' = 4$  auf die 3 Kantenzüge  $B' F G H'$ ,  $C' B' F G$  und  $F B' C' H'$  zu 3 isomorph verschiedenen Achtzellen.

Die Ersetzung des Kantenzuges  $B' F G H'$  durch ein Siebenflach  $p_7'$  führt auf das Achtzell  $P_8^{36}$ , dessen sämtliche Grenzpolyeder  $p_7'$  sind (Fig. 49). Diese 8 Polyeder sind:

$$\begin{aligned} \text{I} &\sim p_7' (A E D C B_3 B_2; F_2 G_2 H_2 H_3); \\ \text{II} &\sim p_7' (A E D C B_3 B_2; B_1 L K I); \\ \text{III} &\sim p_7' (A I K L B_1 B_2; F_2 F_1 M N); \\ \text{IV} &\sim p_7' (N M F_1 F_2 A I; E G_2 G_1 O); \\ \text{V} &\sim p_7' (O G_1 G_2 E I N; K D H_2 H_1); \\ \text{VI} &\sim p_7' (O N K D H_2 H_1; H_3 C L M); \\ \text{VII} &\sim p_7' (H_3 C L M O H_1; G_1 F_1 B_1 B_3); \\ \text{VIII} &= p_7' (B_3 B_2 F_2 G_2 H_2 H_3; H_1 G_1 F_1 B_1). \end{aligned}$$

Wie bereits früher erwähnt bilden die 8 Dreiecke der Polyeder im Diagramm eine geschlossene Kette, die in Fig. 49 kenntlich

<sup>1)</sup> Vergl. SCHOUTE, a. a. O. S. 202 und S. 207.

gemacht ist. Durch Anwendung der Konstruktion  $\mu' = 4$  auf den Kantenzug  $C' B' F G$  in  $P_7^5$  ergibt sich das Diagramm Fig. 50 des Achtzells  $P_8^{37}$ , das von den folgenden Polyedern gebildet wird:  $\text{II} \sim p_7^{\text{IV}}(A B_1 B_2 L K I; E D C_1 C_2)$ , d. h. das äusserste, alle übrigen Polyeder umhüllende im Diagramme;

$$\text{III} \sim p_7'(I A B_1 B_2 L K; N M F_2 F_1),$$

das eine sechskantige Fläche mit dem vorigen gemein hat; in Fig. 50 von den nachfolgenden darüberliegenden verdeckt zu denken;

$$\text{IV} \sim p_7'(I A F_1 F_2 M N; O G_2 G_1 E);$$

$$\text{I} \sim p_7^{\text{IV}}(C_3 G_3 G_1 F_1 B_1 C_1; H D E A);$$

$$\text{V} \sim p_7^{\text{IV}}(G_1 E I N O G_2; G_3 H D K);$$

$$\text{VI} \sim p_7^{\text{IV}}(M L C_2 C_3 H O; N K D C_1);$$

$$\text{VII} \sim p_7'(C_3 G_3 G_2 F_2 B_2 C_2; L M O H) \text{ und}$$

$$\text{VIII} = p_7'(C_3 C_2 B_2 F_2 G_2 G_3; G_1 F_1 B_1 C_1).$$

Die Ersetzung des Kantenzuges  $F B' C' H'$  endlich durch ein  $p_7'$  führt auf ein Polytop  $P_8^{38}$ , dessen Diagramm Fig. 51 zeigt. Die begrenzenden Polyeder sind hier:

$$\text{I} \sim p_7^{\text{III}}(B_1 C_1 H_1 H_3 F_3 F_1; A E D; G);$$

$$\text{II} \sim p_7^{\text{IV}}(B_1 B_2 L K I A; E D C_1 C_2);$$

$$\text{III} \sim p_7'(A B_1 B_2 L K I; N M F_2 F_1);$$

$$\text{IV} \sim p_7^{\text{III}}(N M F_2 F_1 A I; E G O; F_3);$$

$$\text{V} \sim p_7^{\text{IV}}(K D H_1 H_2 O N; I E G H_3);$$

$$\text{VI} \sim p_7^{\text{IV}}(N K D H_1 H_2 O; M L C_2 C_1);$$

$$\text{VII} \sim p_7^{\text{IV}}(B_2 F_2 F_3 H_3 H_2 C_2; L M O G)$$

und das sie im Diagramme alle umhüllende neueingeführte Polyeder

$$\text{VIII} = p_7'(H_3 F_3 F_1 B_1 C_1 H_1; H_2 C_2 B_2 F_2).$$

Wendet man auf das gemeinsame Fünfeck irgend zweier Grenzpolyeder  $\Lambda$  und  $\Lambda'$  von  $P_7^5$  die Konstruktion  $\mu'' = 4$  an, so erscheinen diese Polyeder unverändert wieder als  $p_6'$ ; es ergibt sich also kein Achtzell vierter Klasse. Die Konstruktion  $\mu''' = 4$ , mittels der ein  $p_7^{\text{III}}$  in das Diagramm eingeführt wird, kann nur ein Tripel von Kanten wie die 3 von  $G$  ausgehenden Kanten  $G E$ ,  $G F$ ,  $G H'$  des Diagrammes Fig. 13 entfernen, da nur dann die 3 Zwischenflächen sämtlich mehr als dreikantig sind. Es führt aber diese Konstruktion wieder auf  $P_8^{38}$ . Ein neues, isomorph von den bisherigen verschiedenes, Achtzell ergibt schliesslich noch die Konstruktion  $\mu^{\text{IV}} = 4$ . Schneidet man ein Sechseck  $p_6'$ , z. B.  $V(O' G E I' N'; K D H')$  von  $P_7^5$  durch eine Ebene so, dass der Kantenzug  $G E D K$  auf einer Seite dieser Ebene liegt, sämtliche übrigen Ecken des  $p_6'$  aber

auf der andern Seite der Ebene, so entstehen aus dem Sechsfache zwei Siebenfläche  $p_7^{IV}$ . Durch Elimination des Kantenzuges  $G E D K$  aus dem Diagramme  $P_7^5$  und Ersetzung durch ein  $p_7^{IV}$  tritt also an Stelle des Polyeders V ein  $p_7^{IV} (G_2 G_1 E_1 K_2 K_1 D_1; H O N I)$ . Vergl. Fig. 52<sup>a</sup> und die Fig. 52 des neuen Diagrammes. Die übrigen Grenzpolyeder von  $P_7^5$  werden in folgender Weise verändert. Von dem Sechsfach I wird der Kantenzug  $G E D$  durch einen fünfkantigen Schnitt entfernt (dritte Polyederkonstruktion) und es entsteht ein  $p_7^{IV} (H C B F G_3 G_2; D_1 D_2 E_2 A)$ .

Von dem Sechsfach II wird durch die gleiche Konstruktion der Zug  $E D K$  abgeschnitten, und es ergibt sich das  $p_7^{IV} (B A I K_2 K_3 L; C D_2 E_2 E_1)$ . Der zweiten Polyederkonstruktion, Abschneiden der Kanten  $D K$  und  $G E$  durch einen vierseitigen Schnitt, werden die beiden Sechsfache VI und IV unterworfen. Es entstehen die Siebenfläche  $VI \sim p_7^V (N K_1 D_1 H O; M L C D_2 K_3)$ ;  $IV \sim p_7^V (M F A I N; O G_1 E_1 E_2 G_3)$ .

Die erste Polyederkonstruktion d. h. Abschneiden der Ecken  $G$  und  $K$  durch ein Dreieck wird auf die beiden Sechsfache VII und III angewandt, und es entstehen die Siebenfläche  $VII \sim p_7^{IV} (B F G_3 G_2 H C; L M O G_1)$  und  $III \sim p_7^{IV} (A I K_2 K_3 L B; F M N K_1)$ . Hierzu kommt als achtes Grenzpolyeder des Oktatopes  $P_8^{39}$  das eingeführte Siebenfach  $VIII = p_7^{IV} (K_1 D_1 G_2 G_1 E_1 K_2; K_3 D_2 E_2 G_3)$ . In Fig. 52 sind die sieben aus den Polyedern von  $P_7^5$  entstandenen Grenzkörper des  $P_8$  in das Siebenfach VIII projiziert.

Die Konstruktion  $\mu^V = 4$  kann kein Oktatop vierter Klasse ergeben, da das Abschneiden eines Kantenzuges von der Form wie sie hier vorgeschrieben ist, ein  $p_6'$  wieder in ein solches zurückführt. Es haben sich also nur 4 Oktatope vierter Klasse und damit im ganzen 39 isomorph verschiedene Achtzelle ergeben, die mit ihren Begrenzungsstücken etc. in der am Schlusse folgenden *Tabelle* übersichtlich zusammengestellt sind.

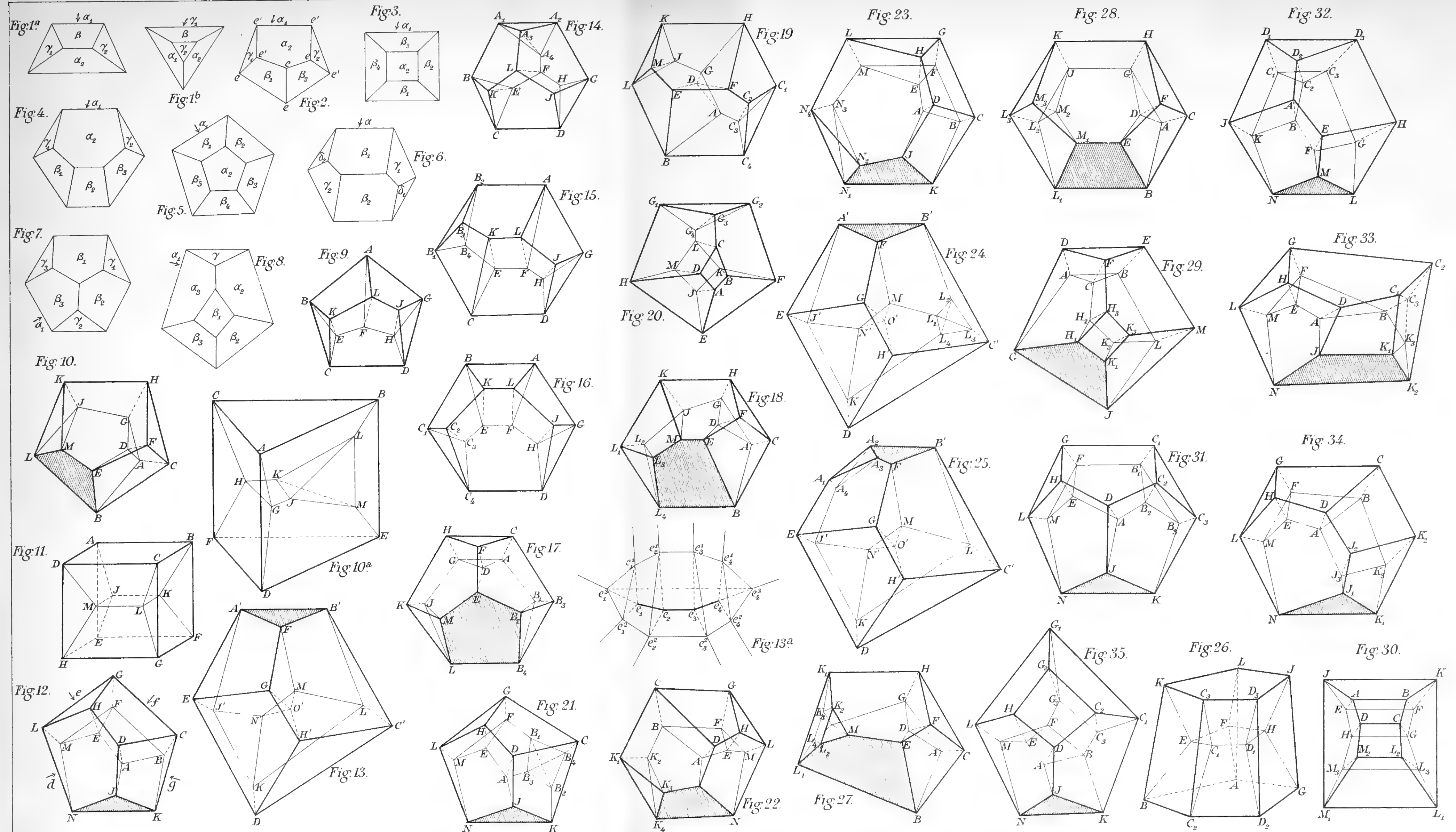
Natürlich sind mit den allgemeinen konvexen Achtzellen auch die Tetraederpolytope mit 8 Ecken bestimmt; aber die Figuren der Diagramme werden weniger übersichtlich. Was aber die weitere Konstruktion der Polytope  $P_9$  aus den nun bekannten  $P_8$  mittels der geschilderten Methoden betrifft, so zeigt sich bald, dass deren Anzahl bereits ganz bedeutend ist, und es darf wohl der Satz Cayleys wiederholt werden, mit dem er die Unterlassung der Ableitung der neuneckigen Trigonalpolyeder aus den achteckigen begründete: „for although perfectly practicable, it would be no commensurate advantage in doing so.”



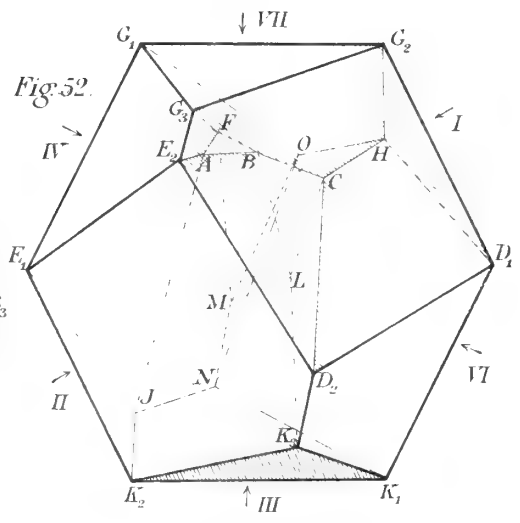
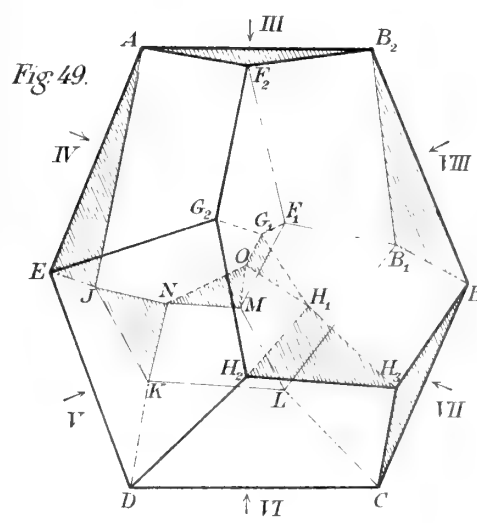
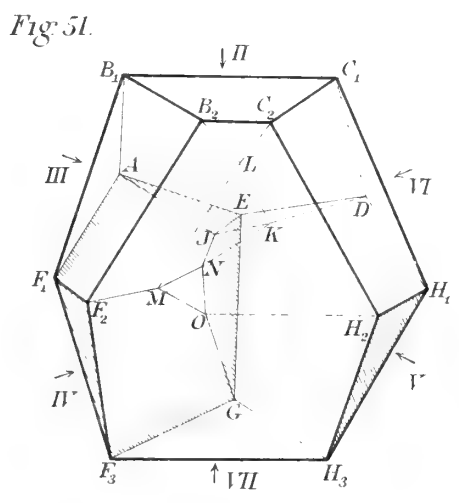
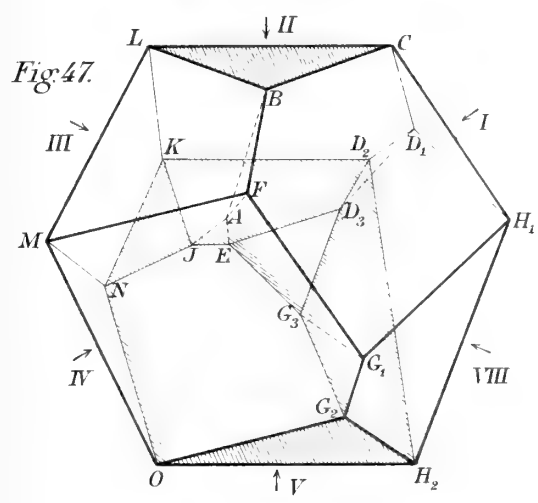
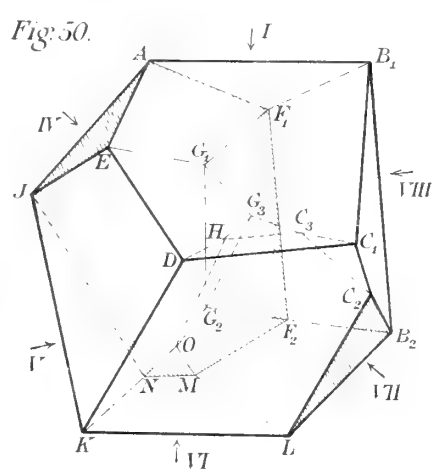
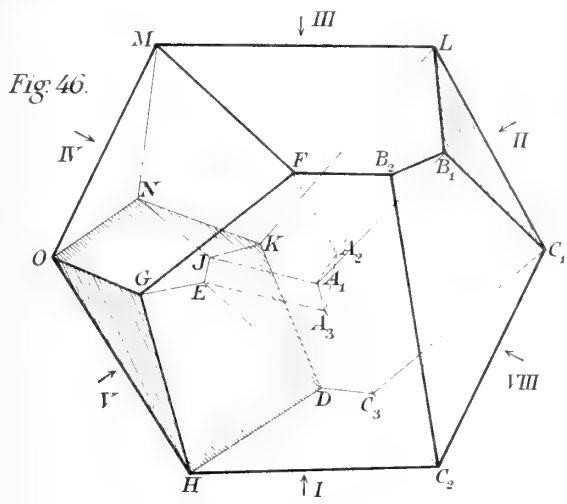
TABELLE.

$e, k, f, p.$	Bez.	Fig.	$p_4$	$p_5$	$p_6'$	$p_6''$	$p_7'$	$p_7''$	$p_7^{III}$	$p_7^{IV}$	$p_1^V$	Klasse.
$e=14. k=28$ $f=22. p=8$	$P_8^1$ $P_8^2$ $P_8^3$	Fig. 14 Fig. 15 Fig. 16	3 2 2	— 2 3	3 2 —	— — —	— — 3	— — —	2 — —	— 2 —	— — —	1 1 1
$e=15. k=30$ $f=23. p=8$	$P_8^4$ $P_8^5$ $P_8^6$ $P_8^7$ $P_8^{13}$	Fig. 17 Fig. 18 Fig. 19 Fig. 20 Fig. 26	2 1 2 1 —	1 3 — 2 5	2 1 4 2 —	— — — 1 —	1 — — — —	— — — — 3	2 — — — —	— 2 2 — —	— — — 2 —	1 1 1 1 2
$e=16. k=32$ $f=24. p=8$	$P_8^8$ $P_8^9$ $P_8^{10}$ $P_8^{14}$ $P_8^{15}$ $P_8^{16}$ $P_8^{17}$ $P_8^{35}$	Fig. 21 Fig. 22 Fig. 23 Fig. 27 Fig. 28 Fig. 29 Fig. 30 Fig. 48	1 1 1 — — — — —	1 1 2 4 4 — 3 —	3 2 — — — 2 2 —	— 1 1 — — — 2 8	— 1 4 — 4 — — —	— — — — — — 1 —	1 2 — — — — — —	1 2 — 4 — — — —	1 — — — — 2 — — —	1 1 1 2 2 2 2 3
$e=17. k=34$ $f=25. p=8$	$P_8^{11}$ $P_8^{12}$ $P_8^{18}$ $P_8^{19}$ $P_8^{20}$ $P_8^{21}$ $P_8^{22}$ $P_8^{23}$ $P_8^{27}$	Fig. 24 Fig. 25 Fig. 31 Fig. 32 Fig. 33 Fig. 34 Fig. 35 Fig. 36 Fig. 40	1 1 — — — — — — —	— — 2 2 2 2 1 2 —	3 3 2 2 2 — 4 2 3	— — — 1 1 — — — 3	— 2 1 — — 4 — — —	— — 1 1 1 1 — 1 — —	2 — 2 — — — — 2 —	2 2 — — 2 — — 2 2	— — — — 1 — 2 2 2	1 1 2 2 2 2 2 2 3
$e=18. k=36$ $f=26. p=8$	$P_8^{24}$ $P_8^{25}$ $P_8^{26}$ $P_8^{28}$ $P_8^{29}$ $P_8^{30}$	Fig. 37 Fig. 38 Fig. 39 Fig. 41 Fig. 42 Fig. 43	— — — — — —	1 1 1 — 4 4	2 2 2 3 4 4	— — — 1 — —	1 1 2 — — —	— — 1 — 2 2	— 4 1 — — 2	2 — 1 2 2 2	2 — 1 2 — 2	2 2 2 3 3 3
$e=19. k=38$ $f=27. p=8$	$P_8^{31}$ $P_8^{32}$ $P_8^{33}$ $P_8^{34}$	Fig. 44 Fig. 45 Fig. 46 Fig. 47	— — — —	— — — —	2 2 2 2	— — — —	1 3 — —	1 — — —	— 1 — 4	2 3 4 2	— 1 2 —	3 3 3 3
$e=20. k=40$ $f=28. p=8$	$P_8^{36}$ $P_8^{37}$ $P_8^{38}$ $P_8^{39}$	Fig. 49 Fig. 50 Fig. 51 Fig. 52	— — — —	— — — —	— — — —	— — — —	8 4 2 —	— — — —	— — 2 4	— 4 4 6	— — — 2	4 4 4 4

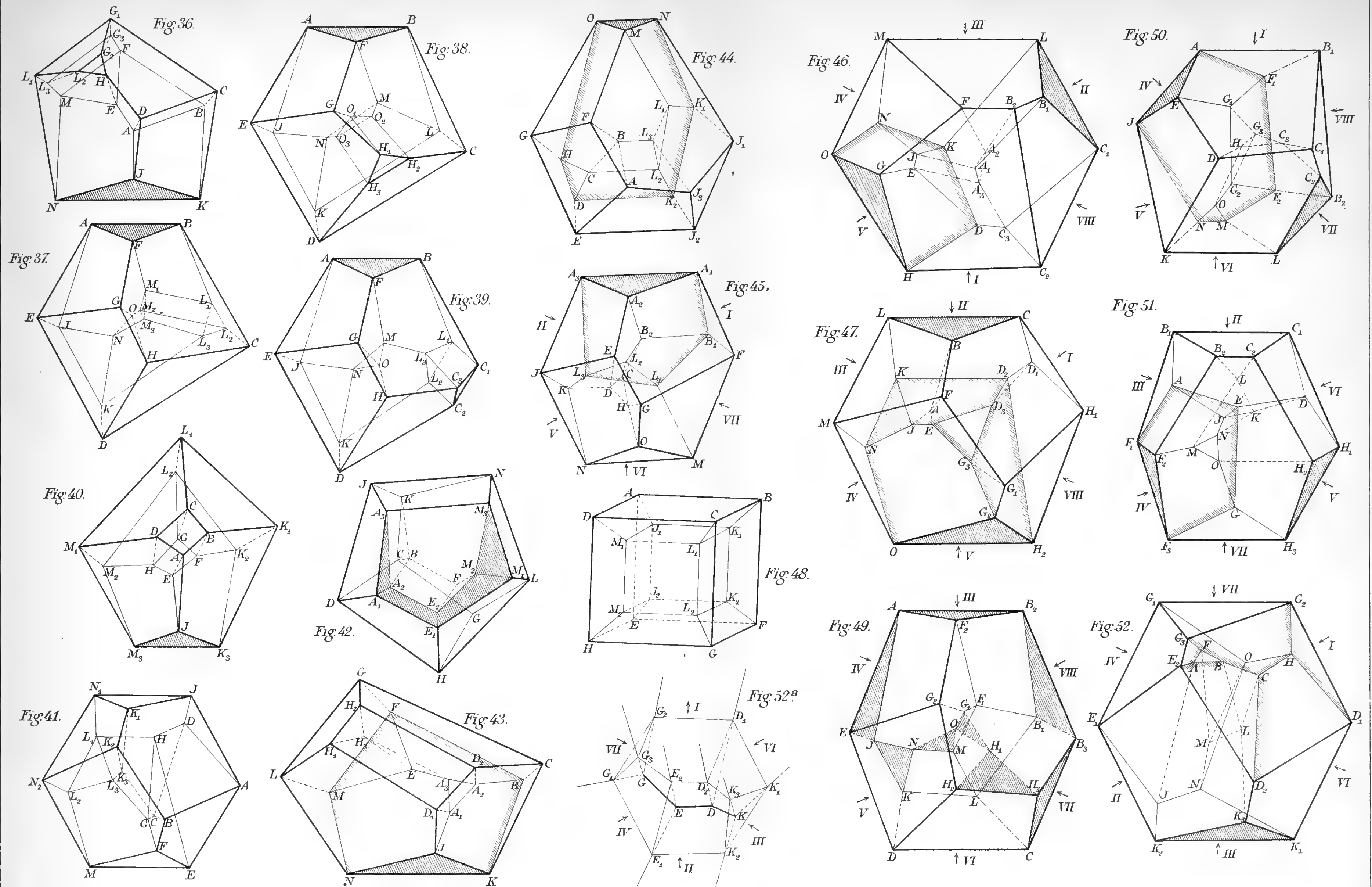


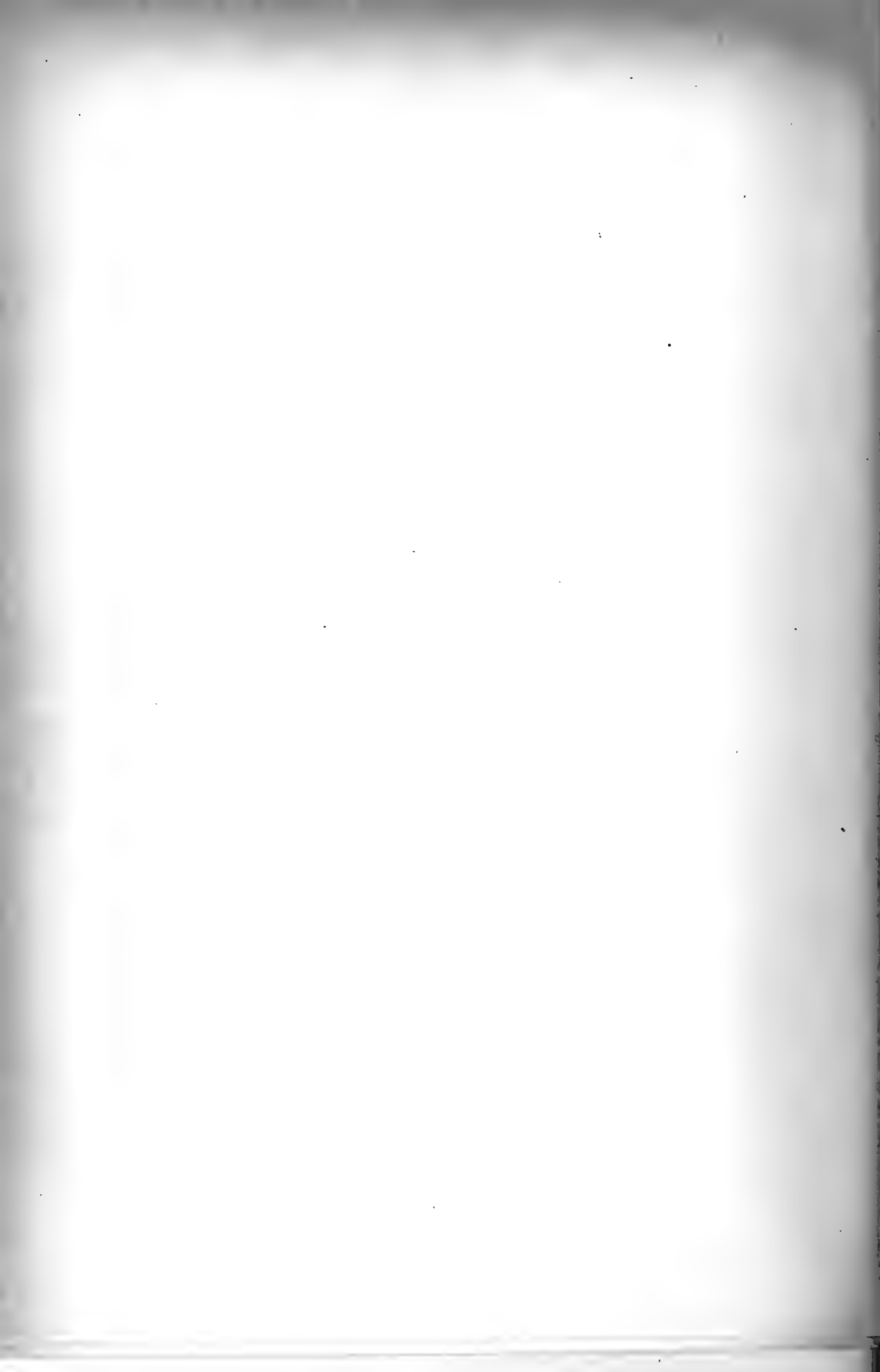


















# Algebraische Strahlencongruenzen und verwandte complexe Ebenen als Schnitte derselben

VON

M. J. VAN UVEN.

---

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.  
(EERSTE SECTIE).

DEEL X. N<sup>o</sup>. 2.



AMSTERDAM,  
JOHANNES MÜLLER.  
April 1911.



# Algebraische Strahlencongruenzen und verwandte complexe Ebenen als Schnitte derselben

VON

M. J. VAN UVEN.

---

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.  
(EERSTE SECTIE).

DEEL X. N<sup>o</sup>. 2.

---

AMSTERDAM,  
JOHANNES MÜLLER.  
1910.



## EINLEITUNG.

Bekanntlich erhält man eine geometrische Darstellung der  $\infty^2$  complexen Zahlen  $w = u + iv$ , indem man jeder Zahl  $w$  denjenigen Punkt einer Ebene zuordnet, der in Bezug auf ein fest angenommenes rechtwinkeliges Axenkreuz die Coordinaten  $u, v$  hat. Handelt es sich um eine geometrische Abbildung der  $\infty^4$  Zahlenpaare  $w, w'$ , so liegt der Gedanke nahe, den vierdimensionalen Strahlenraum heranzuziehen.

In der vorliegenden Arbeit sollen die complexen Grössen  $w$  und  $w'$ , in der oben erwähnten Weise, den Punkten zweier parallelen Ebenen  $[w]$  und  $[w']$  zugeordnet werden, welche im Abstände  $h$  derart gestellt sind, dass die „reelle“ und „imaginäre“ Axen der einen Ebene die orthogonalen Projektionen der analogen Axen der zweiten Ebene sind.

Das Zahlenpaar  $(w, w')$  möge alsdann durch die Gerade vertreten werden, welche die „Punkte“  $w$  und  $w'$  verbindet <sup>1)</sup>.

---

<sup>1)</sup> Als ich bereits einen Teil der vorliegenden Arbeit beendet hatte, erfuhr ich durch eine Fussnote auf Seite 319 von Band III 2, Heft 3 der „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften“, dass Weierstrasz dasselbe Prinzip in seiner Arbeit über die Abelschen Funktionen angewandt hatte (Mathem. Werke. Heft IV).

Allerdings fand ich in Weierstrasz: Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transcendenten, Sechzehntes Kapitel: Die Perioden der Abelschen Integrale erster und zweiter Art, S. 323, folgendes:

„Die Eigenschaft des algebraischen Gebildes, dass zwei beliebige seiner Stellen verbunden werden können, ohne dass die Verbindungslinie einen willkürlich angenommenen Kreis von Werthepaaren kreuzt, kann man sich in folgender Weise geometrisch veranschaulichen: Man denke sich die Werthe von  $x$  und die von  $y$  in zwei parallelen Ebenen durch Punkte dargestellt, und ein Werthepaar  $(x, y)$  durch den Strahl, welcher entsprechende Punkte der beide Ebenen verbindet. Eine stetige Folge von Paaren  $(x, y)$  wird alsdann durch eine stetige Folge von Strahlen repräsentiert, die eine geradlinige Fläche bilden. Dann folgt aus dem vorhergehenden, wenn wir irgend zwei Strahlen  $s_1$  und  $s_2$  ins Auge fassen, dass es möglich ist, den Strahl  $s_1$  so zu bewegen, dass er

Wenn zwei Grössen  $w$  und  $w'$  durch eine Funktionalbeziehung verknüpft sind, so werden einem Punkte  $w$  ein oder mehrere Punkte  $w'$  zugeordnet. Jede Combination  $(w, w')$ , welche der Beziehung genügt, wird durch einen bestimmten Strahl dargestellt.

Ist die Beziehung zwischen den Grössen  $w$  und  $w'$  *algebraisch*, so wird offenbar jeder Punkt von  $[w]$  mit einer *endlichen* Zahl von Punkten  $w'$  durch Strahlen vereinigt. Auf diese Weise wird aus der vierfach unendlichen Menge der Strahlen, welche *alle* Punkte von  $[w]$  mit *allen* Punkten von  $[w']$  verbinden, eine zweifach unendliche Menge abgesondert, also ein zweidimensionales Strahlensystem, d.h. eine **Congruenz**.

Eine algebraische Funktion

$$w' = f(w)$$

wird daher repräsentirt durch eine *algebraische Strahlencongruenz*, deren Eigenschaften durch den Charakter der betrachteten Funktion und durch die Beschaffenheit der gewählten Abbildung bestimmt werden.

Bekanntlich wird durch die Funktion

$$w' = f(w)$$

eine conforme Abbildung auf die complexe Ebene  $[w]$  vermittelt, d. h. die Figuren in  $[w']$  sind in den kleinsten Theilen den entsprechenden Figuren in  $[w]$  ähnlich.

Eine durch den Punkt  $w$  beschriebene Kurve wird bestimmt durch ihre Gleichung

$$\varphi(u, v) = 0.$$

Ist nun aber  $w'$  durch die Funktion

$$w' = f(w)$$

---

beständig ein Strahl des Strahlensystems bleibt und schliesslich in  $s_2$  übergeht, ohne im Verlaufe dieser Bewegung jemals mit einem Strahle der Fläche zusammen zu fallen. Der bewegliche Strahl kann allerdings die Fläche schneiden, aber ihr niemals in seiner ganzen Ausdehnung angehören. Das Strahlensystem verhält sich ähnlich wie eine Ringfläche, die z.B. durch einen erzeugenden Kreis nicht in zwei getrennte Theile zerlegt wird, auf der vielmehr zwei willkürlich angenommene Punkte stets ohne Überschreitung eines solchen Kreises durch eine auf der Fläche liegende Linie verbunden werden können.

Der Gedanke, dass die von mir skizzirte Methode auch dem Genie Weierstrasz' nützlich erschienen, übte freilich auf mich einen gewissen Reiz, obgleich ich es begreiflicherweise bedauerte, den Anspruch auf Priorität, sei es auch einem solchen Riesen abtreten zu müssen.

Dass ich mich aber doch entschloss die von mir angefangenen Untersuchungen fortzusetzen, dürfte gebilligt werden durch die Überlegung, dass *Weierstrasz* obige Methode nur in einem sehr speziellen Fall angewandt hat, indess es sich in meiner Arbeit um einfachere und allgemeinere Problemen handelt.



auf  $w$  bezogen, so wird auch  $w' = u' + iv'$  eine Bahn beschreiben, welche einer Gleichung

$$\varphi'(u', v') = 0$$

entspricht, und die Abbildung der Bahn  $\varphi$  genannt werden kann.

Die Kurve  $\varphi$  werde dann und wann mit dem Namen *Objektkurve*, die Kurve  $\varphi'$  dementsprechend mit dem Namen *Bildkurve* angedeutet.

Die conformen Abbildungen, welche durch Funktionen  $w' = f(w)$  einfacher Natur veranlasst werden, brauchen jetzt nicht eingehend erforscht zu werden; sie sind ja schon gründlich erledigt.

*Es ist vielmehr unsere Absicht die conformen Abbildungen zu ermitteln, welche zusammenhangen mit Funktionen, die in Compliziertheit der Gestalt über die auf diesem Gebiete gewöhnlich auftretenden hinausgehen.*

Die Forschung wird von der oben dargelegten Methode wesentlich unterstützt.

Wie schon vorher bemerkt wurde, giebt jede algebraische Funktion zu einer gewissen Strahlencongruenz veranlassung. Es hat jedoch nicht jede Strahlencongruenz die Eigenschaften, welche es ihr ermöglichen die Darstellung einer Funktion zu sein.

Bekanntlich wird eine Congruenz vertreten durch zwei Gleichungen zwischen den vier unabhängigen Parametern  $p_1, p_2, p_3, p_4$  der Geraden, etwa durch

$$\begin{aligned}\Phi(p_1, p_2, p_3, p_4) &= 0, \\ \Psi(p_1, p_2, p_3, p_4) &= 0.\end{aligned}$$

Es lässt sich zeigen, dass von einer „Abbildungscongruenz“ ( $\Phi, \Psi$ ) die Gleichung  $\Phi = 0$  willkürlich angenommen werden darf, dass jedoch die Funktion  $\Psi = 0$  zwei simultanen partiellen Differentialgleichungen genügen muss.

Für unseren Zweck ist nun folgender Satz von grösster Wichtigkeit: Eine Congruenz, welche eine gewisse Funktion darstellt, vertritt zugleich eine Gruppe anderer Funktionen, die im allgemeinen eine verwickeltere Form aufweisen.

Die Erläuterung dieses Satzes möge auf den sechsten Abschnitt verschoben werden, wo wir ausführlich darlegen werden, wie mit Hülfe einer nämlichen Congruenz mehrere Funktionen abgebildet werden können. Allein möchten wir, in Bezug auf die technische Analyse, welcher wir die zu untersuchende Congruenzen in den folgenden Abschnitten unterwerfen, hier betonen, dass das Haupt-

gewichtet auf die Regelflächen fällt, die durch einen Congruenzstrahl erzeugt werden, wenn dieser beständig eine gewisse Kurve schneidet.

Zum Schluss dieser Einleitung wollen wir eine Übersicht über den Inhalt der folgenden Abschnitte geben.

Den ersten Abschnitt widmen wir der Einführung einiger Coordinatensysteme, wie auch der Bezeichnung, welche wir im folgenden (möglichst consequent) anwenden werden.

Im zweiten Abschnitte werden die einfachsten zwei Strahlencongruenzen (wie zur Vorübung) analytisch untersucht, nämlich die Congruenzen, welche den Funktionen  $w' = c^2 : w$  und  $w' = w^2 : c$  angehören.

Der dritte Abschnitt enthält die Darlegung einer verkürzten algebraischen Operation, welche uns die Rechnung im nächsten Abschnitte zu erleichtern ermöglicht.

Im vierten Abschnitte werden die Congruenzen, welche die Funktionen  $w'^n = w^m$  und  $w'^n = 1 : w^m$  vertreten, eingehend analytisch behandelt.

Im fünften Abschnitte wenden wir die im IV. Abschnitte erhaltenen Resultaten, kurz gefasst, auf die Congruenzen an, welche die Funktionen  $w' = w^3$ ,  $w'^2 = w^3$  und  $w' = 1 : w^2$  repräsentiren.

Der sechste Abschnitt bietet eine möglichst erschöpfende Übersicht über eine Methode, welche gestattet eine nämliche Congruenz für die Abbildung mehrerer Funktionen zu verwenden.

Gern hätten wir wenigstens die einfacheren Congruenzen geometrisch erörtert; der Kürze wegen haben wir diesem Vergnügen entsagen müssen. Daher sind alle Untersuchungen in analytischer Form dargestellt.

Zur Vorbeugung etwaigen Missverständnisses sei es uns erlaubt zu betonen, dass wir *nicht* beabsichtigten: *conforme Abbildungen zu untersuchen, sondern nur die Untersuchung conformer Abbildungen zu erleichtern.*

---

## ERSTER ABSCHNITT.

### *Wahl der Coordinatensysteme.*

#### *Bezeichnungen.*

---

§ 1. In Betracht der folgenden Erörterungen, welche von überwiegend analytischer Art sind, ist es von grösster Wichtigkeit genau zu überlegen, in Bezug auf welches Coordinatensystem wir unsere Gebilde durch Gleichungen bestimmen werden.

Handelt es sich um die wahre Gestalt der Figuren, so liegt es nahe, ein nicht-homogenes Coordinatensystem zu verwenden.

Betrifft es aber Eigenschaften, welche nur die gegenseitige Lage der verschiedenen Grundgebilde in Betracht ziehen, — wollen wir z. B. entscheiden, ob eine Kurve durch einen gewissen Punkt hindurchgehe, ob dieser Punkt singular sei, welche seine Tangenten seien, oder ob eine gewisse Ebene eine gegebene Gerade enthalte, von welcher Ordnung eine gewisse Regelfläche sei, — so bietet ein homogenes Coordinatensystem unschätzbare Vorteile, besonders wenn seine Coordinatenebenen mit Ebenen zusammenfallen, welche in Bezug auf die zu untersuchenden Gebilde eine spezielle Bedeutung haben.

Die wahre Gestalt ist natürlich dann massgebend, wenn wir wissen wollen, wie es steht um die Bildkurve einer gewissen Kurve, z. B. eines Kreises. Es sei z. B. diese Bildkurve eine Lemniscate. Die synthetische Betrachtungen würden uns lehren, dass ein gewisser Kegelschnitt sich abbildet in eine biquadratische Kurve mit drei Doppelpunkten, von denen zwei überdies gewöhnliche Punkte des abgebildeten Kegelschnittes sind. Wenn wir jedoch nachher die beiden letztgenannten Punkte mit den Kreispunkten identifiziert haben, ergibt sich für den Kegelschnitt ein Kreis und für die trinodale Kurve vierter Ordnung eine Lemniscate.

Wollten wir auch die Dimensionen dieser Figuren untersuchen, so würde die Anwendung eines nicht-homogenen Coordinatensystems zweckmässig sein.

Bevor wir jedoch über die Dimensionen und die Gestalt der betrachteten Figuren urteilen können, müssen wir sie erst in Hinsicht ihrer geometrischen Eigenschaften vollständig durchforschen, und hierbei kann ein homogenes Coordinatensystem Vorzügliches leisten.

Es lässt sich jetzt vorhersagen, wie beide Systeme benutzt werden sollen.

Da die Vorstellung der complexen Zahlen an ein rechtwinkliges cartesisches System geknüpft ist, werden wir beim Ansatz des Problems uns eines triorthogonalen, nicht-homogenen Systemes bedienen. So bald die vorliegenden Gebilde auf dieses System bezogen sind, wollen wir ein homogenes Coordinatensystem heranziehen, welches wir so lange beibehalten, bis die erwünschten Figuren in rein geometrischer Hinsicht bekannt geworden sind.

## § 2. I. *Das triorthogonale cartesische System.*

Den Anfangspunkt legen wir in den Nullpunkt  $O$  der  $[w]$ -Ebene.

Die  $Z$ -Axe coincidirt mit der Normale von  $[w]$ , welche die Nullpunkte  $O$  und  $O'$  von  $[w]$  und  $[w']$  verbindet, und ist von  $O$  nach  $O'$  gerichtet.

Die Ebene  $z = 0$  ist deshalb mit der Ebene  $[w]$  identisch.

Die  $X$ -Axe wird längs der Axe der positiven reellen Zahlen in  $[w]$  gelegt.

Die  $Y$ -axe wird mit der Axe der positiven imaginären Zahlen zusammenfallen.

Die Grösse  $w = u + iv$  wird daher durch den Punkt abgebildet mit den Coordinaten

$$x = u,$$

$$y = v,$$

$$z = 0.$$

Die Grösse  $w' = u' + iv'$  wird nun durch den Punkt vertreten der bestimmt ist durch

$$x = u',$$

$$y = v',$$

$$z = h.$$

Eine durch  $w$  beschriebene Bahn bekommt deshalb die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= 0, \\ z &= 0, \end{aligned}$$

während eine durch  $w'$  erzeugte Kurve durch

$$\begin{aligned} \varphi'(x, y) &= 0, \\ z &= h. \end{aligned}$$

dargestellt wird.

Der Strahl, welcher den Punkt  $w = u + iv$  mit dem Punkte  $w' = u' + iv'$  verbindet, wird somit durch

$$\begin{aligned} x &= \lambda u + (1 - \lambda) u', \\ y &= \lambda v + (1 - \lambda) v', \\ z &= (1 - \lambda) h, \end{aligned}$$

oder, nach Elimination von  $\lambda$ , durch

$$\begin{aligned} hx &= u' z + u(h - z), \\ hy &= v' z + v(h - z) \end{aligned}$$

gegeben.

Die Kreispunkte der Ebene  $z = 0$  (also auch der Ebene  $z = h$ ) werden mit  $I$  und  $J$  angedeutet.

Bedenken wir, dass wir fortwährend mit den Combinationen  $u + iv$ ,  $u' + iv'$ , also  $x + iy$  zu schaffen haben, so kann es uns nicht wundern, dass diese Kreispunkte im Folgenden eine bedeutende Rolle spielen werden.

### § 3. II. Die homogenen Coordinatensysteme.

Wir wählen

a) ein festes Coordinatentetraeder  $X_1 X_2 X_3 X_4$ , wo  $X_1$  mit dem Kreispunkte  $I$  ( $x - iy = 0$ ),  $X_2$  mit dem Kreispunkte  $J$  ( $x + iy = 0$ ) zusammenfällt.

Die Ecke  $X_3$  legen wir in  $O$ , die Ecke  $X_4$  in  $O'$ .

Die Gleichungen der Ebenen dieses Tetraeders in Bezug auf das thriorthogonale System sind daher

$$\begin{array}{ll} X_2 X_3 X_4 & \text{oder } x_1 = 0 \dots x + iy = 0, \\ X_1 X_3 X_4 & \text{,, } x_2 = 0 \dots x - iy = 0, \\ X_1 X_2 X_4 & \text{,, } x_3 = 0 \dots z = h, \\ X_1 X_2 X_3 & \text{,, } x_4 = 0 \dots z = 0. \end{array}$$

Wir setzen nun

$$x_1 = \frac{x + iy}{c},$$

$$x_2 = \frac{x - iy}{c},$$

$$x_3 = \frac{h - z}{h},$$

$$x_4 = \frac{z}{h}.$$

Hier ist  $c$  eine reelle Constante, über welche wir erst später verfügen werden.

Die Gleichungen der ehemaligen Coordinatenebenen sind nun

$$Y O Z \text{ oder } x = 0 \dots x_1 + x_2 = 0,$$

$$X O Z \text{ „ } y = 0 \dots x_1 - x_2 = 0,$$

$$X O Y \text{ „ } z = 0 \dots x_4 = 0.$$

Eine zu  $[w]$  und  $[w']$  parallele Ebene wird daher durch

$$x_3 = \mu x_4$$

bestimmt.

Da  $\mu = 0$  die Ebene  $[w']$  und  $\mu = \infty$  die Ebene  $[w]$  darstellt, werden wir gelegentlich die Ebene  $[w']$  mit  $\omega_0$ , die Ebene  $[w]$  mit  $\omega_\infty$  andeuten; das Zeichen  $\omega_\mu$  möge einer willkürlichen zu  $[w]$  und  $[w']$  parallelen Ebene  $x_3 = \mu x_4$  angehören.

Die unendlich ferne Gerade der Ebenen  $z = k$ , welche wir gelegentlich mit  $\Lambda_\infty$  bezeichnen werden, hat somit die Gleichungen

$$x_3 = 0,$$

$$x_4 = 0.$$

Dagegen wird die Gerade  $OO'$  durch

$$x_1 = 0,$$

$$x_2 = 0$$

dargestellt.

Eine durch  $OO'$  gelegte Ebene werden wir durch

$$x_2 = tx_1$$

bestimmen; sie wird auch mit  $\varepsilon_t$  bezeichnet werden; ihr Schnittpunkt mit  $X_1 X_2$  wird  $E_t$  heissen.

Eine spezielle Bedeutung haben die Ebenen  $\varepsilon_t$ , wenn  $t$  eine Einheitswurzel ist.

Nennen wir die  $N$ -te Wurzel der Einheit  $\tau_N$ , so wird offenbar die entsprechende Ebene  $\varepsilon_{\tau_N}$  und ihr Schnittpunkt mit  $X_1 X_2$   $E'_{\tau_N}$  genannt.

Unter diese speziellen Ebenen ragt die Ebene  $\varepsilon_1$ , d. h. die Ebene  $x_2 = x_1$  (die Ebene durch die reellen Axen) besonders hervor. Diese Ebene  $\varepsilon_1$  werden wir häufig nur mit  $\varepsilon$ , ihren Schnittpunkt mit  $X_1 X_2$  durch  $E$  bezeichnen.

Auch die Ebene  $\varepsilon_{-1}$  tritt öfters hervor (namentlich im II. Abschnitte). Sie bekommt dann und wann den Namen  $\varepsilon$ , ihr Schnittpunkt mit  $X_1 X_2$  das Zeichen  $E'$ .  $\varepsilon_{-1}$  oder  $\varepsilon'$  ist offenbar die Ebene durch die imaginären Axen.

Eine willkürliche Gerade  $l$  ist durch ihren Schnittpunkt  $A$  mit  $[w]$  ( $x_4 = 0$  oder  $\omega_\infty$ ) und ihren Schnittpunkt  $B'$  mit  $[w']$  ( $x_3 = 0$  oder  $\omega_0$ ) bestimmt.

Es sei der Punkt  $A$  in  $\omega_\infty$  durch

$$\frac{x_1}{x_3} = a_1, \quad \frac{x_2}{x_3} = a_2, \quad x_4 = 0,$$

der Punkt  $B'$  in  $\omega_0$  durch

$$\frac{x_1}{x_4} = b_1', \quad \frac{x_2}{x_4} = b_2', \quad x_3 = 0$$

festgelegt; die Gerade  $AB'$  wird daher durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 x_3 + b_1' x_4, \\ x_2 &= a_2 x_3 + b_2' x_4. \end{aligned}$$

vertreten.

Ist der Punkt  $B'$  vermöge einer gewissen Funktionalbeziehung dem Punkte  $A$  zugeordnet, so wird er nicht  $B'$  sondern  $A'$  genannt.

Eine Gerade, welche einen Punkt  $P$  in  $\omega_\infty$  mit einem ihm zugeordneten Punkte  $P'$  in  $\omega_0$  vereinigt, ist ein Congruenzstrahl.

Es sei  $P$  durch

$$\frac{x_1}{x_3} = p_1, \quad \frac{x_2}{x_3} = p_2, \quad x_4 = 0,$$

$P'$  durch

$$\frac{x_1}{x_4} = p_1', \quad \frac{x_2}{x_4} = p_2', \quad x_3 = 0$$

bestimmt, so erhellt, dass der Congruenzstrahl  $PP'$  durch

$$\begin{aligned}x_1 &= p_1 x_3 + p_1' x_4, \\x_2 &= p_2 x_3 + p_2' x_4\end{aligned}$$

dargestellt wird.

Oft sind wir gezwungen den Unterschied zu betonen zwischen einem festen Congruenzstrahle und einem beweglichen, welcher z.B. eine Regelfläche erzeugt.

In unserer Bezeichnung heben wir diesen Unterschied hervor, indem wir den festen Congruenzstrahl mit  $s$ , seine Spuren in  $\omega_\infty$  und  $\omega_0$  bez. mit  $S\left(\frac{x_1}{x_3}=s_1, \frac{x_2}{x_3}=s_2, x_4=0\right)$  und  $S'\left(\frac{x_1}{x_4}=s_1', \frac{x_2}{x_4}=s_2', x_3=0\right)$ , den beweglichen Strahl dagegen mit  $p$ ,  $q$  oder  $r$ , seine Spuren in  $\omega_\infty$  mit  $P(p_1, p_2)$ ,  $Q(q_1, q_2)$ ,  $R(r_1, r_2)$ , in  $\omega_0$  mit  $P'(p_1', p_2')$ ,  $Q'(q_1', q_2')$ ,  $R'(r_1', r_2')$  bezeichnen.

Die Bestimmung einer Geraden  $l$  mittelst ihrer Spuren in  $\omega_\infty$  und  $\omega_0$  wird hinfällig, wenn sie den beiden Ebenen parallel ist und diese deshalb in demselben Punkte der unendlich fernen Geraden  $\Lambda_\infty$  schneidet. In diesem Falle wird eine Grenzbetrachtung erfordert um die Schnittpunkte mit  $\omega_\infty$  in  $\omega_0$  in der Rechnung verwenden zu können.

Die in der Ebene  $\omega_\mu$  ( $x_3 = \mu x_4$ ) befindliche Gerade  $l_\mu$  sei durch

$$\begin{aligned}\alpha_x &\equiv \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0, \\x_3 &= \mu x_4\end{aligned}$$

gegeben.

Es ist nun unsere Aufgabe sie mit

$$\begin{aligned}x_1 &= a_1 x_3 + b_1' x_4, \\x_2 &= a_2 x_3 + b_2' x_4\end{aligned}$$

zu identifizieren.

Die Ebene  $x_3 = \mu x_4$  werde vorläufig durch die Gleichung

$$\alpha'_x \equiv \alpha_1' x_1 + \alpha_2' x_2 + \alpha_3' x_3 + \alpha_4' x_4 = 0,$$

dargestellt, in welcher später

$$\alpha_1' = 0, \alpha_2' = 0, \alpha_4' = -\mu \alpha_3'$$

gesetzt wird.

Die Tatsache, dass die Schnittlinie der Ebenen  $\alpha_x = 0$  und  $\alpha'_x = 0$  mit der Gerade

$$\begin{aligned}x_1 &= a_1 x_3 + b_1' x_4, \\x_2 &= a_2 x_3 + b_2' x_4\end{aligned}$$



zusammenfällt, bedingt die folgenden Identitäten

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 &= \lambda_1 (x_1 - a_1 x_3 - b_1' x_4) + \\ &+ \lambda_2 (x_2 - a_2 x_3 - b_2' x_4), \\ \alpha_1' x_1 + \alpha_2' x_2 + \alpha_3' x_3 + \alpha_4' x_4 &= \lambda_1' (x_1 - a_1 x_3 - b_1' x_4) + \\ &+ \lambda_2' (x_2 - a_2 x_3 - b_2' x_4). \end{aligned}$$

Durch Elimination von  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_1'$  und  $\lambda_2'$  ergibt sich hieraus

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_2 &= -\alpha_3, \\ \alpha_1 b_1' + \alpha_2 b_2' &= -\alpha_4, \\ \alpha_1' \alpha_1 + \alpha_2' \alpha_2 &= -\alpha_3', \\ \alpha_1' b_1' + \alpha_2' b_2' &= -\alpha_4'; \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

demnach ist

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{-\alpha_2' \alpha_3 + \alpha_3' \alpha_2}{\alpha_2' \alpha_1 - \alpha_1' \alpha_2}, & a_2 &= \frac{\alpha_1' \alpha_3 - \alpha_3' \alpha_1}{\alpha_2' \alpha_1 - \alpha_1' \alpha_2}, \\ b_1' &= \frac{-\alpha_2' \alpha_4 + \alpha_4' \alpha_2}{\alpha_2' \alpha_1 - \alpha_1' \alpha_2}, & b_2' &= \frac{\alpha_1' \alpha_4 - \alpha_4' \alpha_1}{\alpha_2' \alpha_1 - \alpha_1' \alpha_2}, \end{aligned}$$

und daher

$$\frac{b_1'}{a_1} = \frac{-\alpha_2' \alpha_4 + \alpha_4' \alpha_2}{-\alpha_2' \alpha_3 + \alpha_3' \alpha_2}, \quad \frac{b_2'}{a_2} = \frac{\alpha_1' \alpha_4 - \alpha_4' \alpha_1}{\alpha_1' \alpha_3 - \alpha_3' \alpha_1}.$$

Wegen der Relationen  $\alpha_1' = \alpha_2' = 0$  und  $\alpha_4' = -\mu \alpha_3'$  finden wir

$$\frac{b_1'}{a_1} = -\mu, \quad \frac{b_2'}{a_2} = -\mu,$$

woraus hervorgehen würde

$$a_1 b_2' - a_2 b_1' = 0,$$

wenn nicht  $a_1, a_2, b_1'$  und  $b_2'$  alle unendlich gross wären, weil ihr Nenner null ist.

In wirklichkeit jedoch wird dem Ausdrucke

$$a_1 b_2' - a_2 b_1' = \Delta$$

ein unendlich grosser Wert zukommen, und zwar von derselben Ordnung wie  $a_1, a_2, b_1'$  und  $b_2'$ .

Um dies zu beweisen und zugleich  $a_1, a_2, b_1', b_2'$  und  $\Delta$  zu bestimmen, setzen wir vorläufig

$$\frac{b_1'}{a_1} = -\mu_1,$$

$$\frac{b_2'}{a_2} = -\mu_2.$$

Ersetzen wir in der zweiten Gleichung (1)  $b_1'$  und  $b_2'$  durch die hieraus fließenden Ausdrücke, so folgt

$$\mu_1 a_1 a_1 + \mu_2 a_2 a_2 = a_4.$$

Wir haben nunmehr

$$a_1 a_1 + a_2 a_2 = -a_3,$$

$$\mu_1 a_1 a_1 + \mu_2 a_2 a_3 = +a_4,$$

und bekommen also

$$a_1 = \frac{\mu_2 a_3 + a_4}{a_1 (\mu_1 - \mu_2)},$$

$$a_2 = -\frac{\mu_1 a_3 + a_4}{a_2 (\mu_1 - \mu_2)}.$$

Demnach ist

$$b_1' = -\mu_1 a_1 = -\frac{\mu_1 (\mu_2 a_3 + a_4)}{a_1 (\mu_1 - \mu_2)},$$

$$b_2' = -\mu_2 a_2 = -\frac{\mu_2 (\mu_1 a_3 + a_4)}{a_2 (\mu_1 - \mu_2)},$$

und schliesslich

$$\Delta = a_1 b_2' - a_2 b_1' = \frac{(\mu_2 a_3 + a_4)(\mu_1 a_3 + a_4)(\mu_2 - \mu_1)}{a_1 a_2 (\mu_1 - \mu_2)^2} =$$

$$= -\frac{(\mu_1 a_3 + a_4)(\mu_2 a_3 + a_4)}{a_1 a_2 (\mu_1 - \mu_2)}.$$

Der unendlich grosse Wert von  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1'$ ,  $b_2'$  und  $\Delta$  findet seinen Ausdruck in dem Faktor  $\mu_1 - \mu_2$  des Nenners. Dieser Faktor ist tatsächlich null, weil  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ .

Wir setzen jetzt

$$\mu_1 = \mu + \delta,$$

$$\mu_2 = \mu - \delta.$$

In der Tat ist  $\delta$  eine unendlich kleine Grösse; wir dürfen sie

also *neben* endlichen Grössen vernachlässigen. Mit Rücksicht hierauf finden wir für  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1'$ ,  $b_2'$  und  $\Delta$  die folgenden Ausdrücke

$$\begin{aligned} a_1 &= + \frac{\mu \alpha_3 + \alpha_4}{2 \alpha_1 \delta}, \\ a_2 &= - \frac{\mu \alpha_3 + \alpha_4}{2 \alpha_2 \delta}, \\ b_1' &= - \frac{\mu (\mu \alpha_3 + \alpha_4)}{2 \alpha_1 \delta}, \\ b_2' &= + \frac{\mu (\mu \alpha_3 + \alpha_4)}{2 \alpha_2 \delta}, \\ \Delta &= - \frac{(\mu \alpha_3 + \alpha_4)^2}{2 \alpha_1 \alpha_2 \delta}. \end{aligned}$$

Setzen wir schliesslich

$$\frac{\mu \alpha_3 + \alpha_4}{2 \alpha_1 \alpha_2} = a_0,$$

so erhalten wir die folgenden Werte

$$\begin{aligned} a_1 &= + \frac{\alpha_2 a_0}{\delta}, \\ a_2 &= - \frac{\alpha_1 a_0}{\delta}, \\ b_1' &= - \frac{\mu \alpha_2 a_0}{\delta}, \\ b_2' &= + \frac{\mu \alpha_1 a_0}{\delta}, \\ \Delta &= - \frac{(\mu \alpha_3 + \alpha_4) a_0}{\delta}. \end{aligned}$$

Es ist hieraus ersichtlich, dass  $\Delta$  von derselben Ordnung unendlich gross ist, wie  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1'$  und  $b_2'$ , während überdies ihre Verhältnisse zu Tage treten.

Ein Resultat eine Gerade betreffend, welche  $\omega_\infty$  und  $\omega_0$  im *Endlichen* schneidet, und zwar  $\omega_\infty$  in  $A$  ( $a_1$ ,  $a_2$ ),  $\omega_0$  in  $B'$  ( $b_1'$ ,  $b_2'$ ), kann sofort auf eine zu  $\omega_\infty$  und  $\omega_0$  parallelen Gerade  $l_\mu$  (bestimmt durch  $\Sigma \alpha_i x_i = 0$ ,  $x_3 = \mu x_4$ ) übertragen werden, wenn nur die Grössen  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1'$ ,  $b_2'$  und  $\Delta = a_1 b_2' - a_2 b_1'$  durch die oben abgeleiteten Ausdrücke ersetzt werden; nachher müssen wir noch überall  $\delta$  aus dem Nenner entfernen und schliesslich in die so erhaltene Gleichung  $\delta = 0$  setzen.

Die Gerade  $l_\mu$  schneidet  $X_1 X_2$  oder  $\Lambda_\infty$  im Punkte  $L_\mu$ .

Die zu  $\omega_\infty$  und  $\omega_0$  parallele Ebene  $\omega_\mu$  wird  $X_3 X_4$  ( $OO'$ ) in einem Punkte  $X_\mu$  treffen, die Gerade  $l$  in  $C_\mu$ , die Congruenzstrahlen  $p, q, r, s$  in  $P_\mu, Q_\mu, R_\mu, S_\mu$ .

Wir werden nunmehr eine andere Gruppe geometrischer Gebilde mit Namen versehen, welche ebenfalls in den folgenden Untersuchungen eine bedeutende Stelle einnehmen, nämlich die Kegelschnitte, welche durch die Punkte  $X_1$  und  $X_2$  hindurchgehen, also Kreise in Ebenen  $\omega_\mu$ , parallel oder identisch mit  $[w]$  oder  $[w']$ . Später sollen auch Ebenen parallel mit  $[w]$  und  $[w']$  als Abbildungsebenen verwendet werden; es mögen daher die einfachsten Gebilde (Geraden und Kreise) dieser Ebenen zuvor erörtert werden.

Ein in  $\omega_\mu$  befindlicher Kegelschnitt  $\gamma_\mu$  kann durch

$$\begin{aligned} \alpha_3 \beta_3 x_1 x_2 + x_1 (\alpha_2 \beta_3 x_3 + \alpha_3 \beta_2 x_4) + x_2 (\alpha_1 \beta_3 x_3 + \alpha_3 \beta_1 x_4) + \\ + (\alpha_0 \beta_3 x_3^2 + \alpha_3 \beta_0 x_4^2) = 0, \\ x_3 = \mu x_4 \end{aligned}$$

vertreten werden.

Die erste dieser Gleichungen verdankt ihre ziemlich verwickelte Form dem Umstande, dass sie so wohl für  $\mu = \infty$  wie für  $\mu = 0$  die möglichst einfache Gestalt annimmt.

In der Tat giebt  $\mu = \infty$

$$\gamma_\infty \begin{cases} \alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_2 x_1 x_3 + \alpha_1 x_2 x_3 + \alpha_0 x_3^2 = 0, \\ x_4 = 0, \end{cases}$$

und  $\mu = 0$ :

$$\gamma_0 \begin{cases} \beta_3 \alpha_1 x_2 + \beta_2 \alpha_1 x_4 + \beta_1 x_2 x_4 + \beta_0 x_4^2 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Wie bekannt ist der Ort der Punkte, wo ein Congruenzstrahl durch die ihm unendlich benachbarten geschnitten wird, im Allgemeinen eine Fläche, die s.g. *Fokalfläche*.

Die demnächst zu untersuchenden Congruenzen sind dadurch gekennzeichnet, dass ihre Fokalfläche aus zwei Kegeln besteht, deren Spitzen mit den Kreispunkten der Ebenen  $[w]$  und  $[w']$  zusammenfallen. Diese Kegel sollen *Fokalkegel* genannt werden; den Fokalkegel, dessen Spitze in  $X_1$  liegt, werden wir mit  $F_1$ , den andren, dessen Spitze  $X_2$  ist, mit  $F_2$  andeuten.

Die Congruenzstrahlen können somit als die gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Fokalkegel  $F_1$  und  $F_2$  betrachtet werden.

Ihre Berührungspunkte mit den Fokalkegeln sind die *Brennpunkte*.

Der eine Brennpunkt liegt demnach auf  $F_1$ , der andere auf  $F_2$ .

Die auf  $F_1$  befindlichen Brennpunkte der Strahlen  $p, q, r, s$  werden mit  $P_{f1}, Q_{f1}, R_{f1}, S_{f1}$ ; die auf  $F_2$  liegenden mit  $P_{f2}, Q_{f2}, R_{f2}, S_{f2}$  angedeutet.

b) *Bewegliches homogenes Coordinatensystem*, dessen Tetraeder  $\Xi_1 \Xi_2 \Xi_3 \Xi_4$  eine solche Lage hat, dass  $\Xi_1$  mit  $X_1$ ,  $\Xi_2$  mit  $X_2$  zusammenfällt, während  $\Xi_3$  im Schnittpunkte  $A, P, Q, R, S$  der Gerade  $l$ , bez. des Congruenzstrahles  $p, q, r, s$  mit der Ebene  $\omega_\infty$ , und  $\Xi_4$  im Schnittpunkte  $B', P', Q', R', S'$  derselben Gerade mit der Ebene  $\omega_0$  liegt.

Zwischen den letzteren und den vorigen homogenen Coordinaten giebt es sodann diese Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= x_1 - a_1 x_3 - b_1' x_4 \\ \xi_2 &= x_2 - a_2 x_3 - b_2' x_4 \\ \xi_3 &= x_3 \\ \xi_4 &= x_4 \end{aligned} \right\} \text{ oder } \left. \begin{aligned} \xi_1 &= x_1 - p_1 x_3 - p_1' x_4 \\ \xi_2 &= x_2 - p_2 x_3 - p_2' x_4 \\ \xi_3 &= x_3 \\ \xi_4 &= x_4 \end{aligned} \right\} \text{ u. s. w.}$$

Die betreffenden Geraden  $l$  oder Strahlen  $p, q, r, s$  werden daher durch

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 0, \\ \xi_2 &= 0. \end{aligned}$$

bestimmt.

Der Gerade  $X_3 X_4$  ( $OO'$ ) kommen hier diese Gleichungen zu:

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 + a_1 \xi_3 + b_1' \xi_4 &= 0 \\ \xi_2 + a_2 \xi_3 + b_2' \xi_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ oder } \left. \begin{aligned} \xi_1 + p_1 \xi_3 + p_1' \xi_4 &= 0 \\ \xi_2 + p_2 \xi_3 + p_2' \xi_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ u. s. w.}$$

Sollten wir später Gebilden begegnen, welche in obigem Verzeichniss fehlen, so werden wir ihre Bezeichnung möglichst zweckmässig wählen.

Zum Schluss dieses Abschnittes fügen wir eine schematische Übersicht der bisher angenommenen Bezeichnungen hinzu.

# § 4. BEZEICHNUNGEN.

	Namen.
Triorthogonales Coordinatensystem $XYZ$	
Ebene der Punkte (Größen) $w : z = 0$ . . .	$[w]$ oder $\omega_\infty$
„ „ „ „ $w' : z = h$ . . .	$[w']$ „ $\omega_0$
Nullpunkt von $[w]$ $x = 0, y = 0, z = 0$ . .	$O$
„ „ $[w']$ $x = 0, y = 0, z = h$ . .	$O'$
$w = u + iv$	
$w' = u' + iv'$	
Kreispunkte der Ebenen $z = k$ . . . . .	$I$ und $J$
Unendlichferne Gerade in $z = k$ . . . . .	$\Lambda_\infty$
Ebene der reellen Axen $y = 0$ . . . . .	$\varepsilon_1$ oder $\varepsilon$
Schnittpunkt von $\varepsilon_1$ oder $\varepsilon$ mit $\Lambda_\infty$ . . . .	$E_1$ „ $E$
Ebene der imaginären Axen $x = 0$ . . . . .	$\varepsilon_{-1}$ „ $\varepsilon'$
Schnittpunkt von $\varepsilon_{-1}$ oder $\varepsilon'$ mit $\Lambda_\infty$ . . . .	$E_{-1}$ „ $E'$
Die $N$ -te Wurzel der Einheit, oder $e^{i\frac{2h\pi}{N}}$ . . .	$\tau_N$
Ebene durch $OO'$ $\frac{x - iy}{x + iy} = t$ . . . . .	$\varepsilon_t$
Schnittpunkt von $\varepsilon_t$ mit $\Lambda_\infty$ . . . . .	$E_t$
Ebene durch $OO'$ , bestimmt durch $\frac{x - iy}{x + iy} = \tau_N$	
oder $\frac{y}{x} = -tg \frac{k\pi}{N}$ . . . . .	$\varepsilon_{\tau_N}$
Schnittpunkt von $\varepsilon_{\tau_N}$ mit $\Lambda_\infty$ . . . . .	$E_{\tau_N}$
Festes homogenes Coordinatensystem $X_1 X_2 X_3 X_4$	

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{x + iy}{c} \\ x_2 &= \frac{x - iy}{c} \\ x_3 &= \frac{h - z}{h} \\ x_4 &= \frac{z}{h} \end{aligned} \right\}$$

Namen.

Coordinatentetraeder  $X_1 X_2 X_3 X_4$ 

$$X_1 = I, X_2 = J, X_3 = O, X_4 = O'$$

 $x_1 = 0$  Gleichung der Ebene  $X_2 X_3 X_4$ , oder  $JOO'$ 
 $x_2 = 0$  „ „ „  $X_1 X_3 X_4$ , „  $IOO'$ 
 $x_3 = 0$  „ „ „  $X_1 X_2 X_4$ , „  $IJO'$ , oder  $[w']$ , oder  $\omega_0$ 
 $x_4 = 0$  „ „ „  $X_1 X_2 X_3$ , „  $IJO$ , „  $[w]$ , „  $\omega_x$ .
Willkürliche Gerade . . . . .  $l$ Schnittpunkt von  $l$  mit  $\omega_x$  . . . . .  $A$ 
 Coordinaten von  $A$  . . . . .  $\frac{x_1}{x_3} = a_1, \frac{x_2}{x_3} = a_2, x_4 = 0$ .
Schnittpunkt von  $l$  mit  $\omega_0$  . . . . .  $B'$ 
 Coordinaten von  $B'$  . . . . .  $\frac{x_1}{x_4} = b_1', \frac{x_2}{x_4} = b_2', x_3 = 0$ .

 Gleichungen von  $l$  . . . . .  $\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 x_3 + b_1' x_4, \\ x_2 &= a_2 x_3 + b_2' x_4. \end{aligned} \right\}$ 
Beweglicher Congruenzstrahl. . . . .  $p, q, r$ Schnittpunkt von  $p, q, r$  mit  $\omega_x$  . . . . .  $P, Q, R$ 
 Coordinaten von  $P$  u.s.w. . . . .  $\frac{x_1}{x_3} = p_1, \frac{x_2}{x_3} = p_2, x_4 = 0$ , u. s. w.
Schnittpunkt von  $p, q, r$  mit  $\omega_0$  . . . . .  $P', Q', R'$ 
 Coordinaten von  $P'$  u.s.w. . . . .  $\frac{x_1}{x_4} = p_1', \frac{x_2}{x_4} = p_2', x_3 = 0$ , u. s. w.

 Gleichungen von  $p$  u.s.w. . . . .  $\left. \begin{aligned} x_1 &= p_1 x_3 + p_1' x_4 \\ x_2 &= p_2 x_3 + p_2' x_4 \end{aligned} \right\} \text{ u.s.w.}$ 
Fester Congruenzstrahl . . . . .  $s$ Schnittpunkt von  $s$  mit  $\omega_x$  . . . . .  $S$ 
 Coordinaten von  $S$ . . . . .  $\frac{x_1}{x_3} = s_1, \frac{x_2}{x_3} = s_2, x_4 = 0$ 
Schnittpunkt von  $s$  mit  $\omega_0$  . . . . .  $S'$ 
 Coordinaten von  $S'$  . . . . .  $\frac{x_1}{x_4} = s_1', \frac{x_2}{x_4} = s_2', x_3 = 0$ 

 Gleichungen von  $s$ . . . . .  $\left. \begin{aligned} x_1 &= s_1 x_3 + s_1' x_4 \\ x_2 &= s_2 x_3 + s_2' x_4 \end{aligned} \right\}$ 
Ebene durch  $X_1 X_2 (\Lambda_x)$  . . . . .  $\omega_\mu$ Gleichung von  $\omega_\mu$  . . . . .  $x_3 = \mu x_4$ Schnittpunkt von  $\omega_\mu$  mit  $X_3 X_4$ . . . . .  $X_\mu$ „ „ „ „ „  $l$  . . . . .  $C_\mu$ „ „ „ „ „  $p, q, r$  . . . . .  $P_\mu, Q_\mu, R_\mu$ „ „ „ „ „  $s$  . . . . .  $S_\mu$ Gerade in  $\omega_\mu$  . . . . .  $l_\mu$ Schnittpunkt von  $l_\mu$  mit  $X_1 X_2 (\Lambda_x)$  . . . . .  $L_\mu$







## ZWEITER ABSCHNITT.

---

A. Die Congruenz, welche der Funktion

$$w' = \frac{c^2}{w}$$

angehört.

§ 1. Der Punkt  $(u, v)$  in  $[w]$ , welcher die complexe Zahl  $w = u + iv$  vertritt, ist, wie im ersten Abschnitt angegeben, bestimmt durch die Coordinaten

$$\left. \begin{aligned} x &= u \\ y &= v \\ z &= 0 \end{aligned} \right\},$$

oder

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{u + iv}{c} \\ x_2 &= \frac{u - iv}{c} \\ x_3 &= 1 \\ x_4 &= 0 \end{aligned} \right\},$$

oder

$$\left. \begin{aligned} \frac{x_1}{x_3} &= \frac{u + iv}{c} \\ \frac{x_2}{x_3} &= \frac{u - iv}{c} \\ x_4 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Der Punkt  $(u', v')$  in  $[w']$ , welcher der complexen Zahl  $w' = u' + iv'$  entspricht, ist angewiesen durch

$$\left. \begin{aligned} x &= u' \\ y &= v' \\ z &= h \end{aligned} \right\},$$

oder

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{u' + iv'}{c} \\ x_2 &= \frac{u' - iv'}{c} \\ x_3 &= 0 \\ x_4 &= 1 \end{aligned} \right\},$$

oder

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{u' + iv'}{c} \\ x_4 &= \frac{u' - iv'}{c} \\ x_2 &= \frac{u' - iv'}{c} \\ x_3 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Bezeichnen wir die homogenen Coordinaten dieses Punktes mit  $x_1', x_2', x_4' (x_3' = 0)$ , so können wir setzen

$$\begin{aligned} \frac{x_1'}{x_4'} &= \frac{u' + iv'}{c}, \\ \frac{x_2'}{x_4'} &= \frac{u' - iv'}{c}. \end{aligned}$$

Die zwischen  $w = u + iv$  und  $w' = u' + iv'$  bestehende Beziehung

$$ww' = (u + iv)(u' + iv') = c^2$$

gibt zu den folgenden Gleichungen zwischen den homogenen Coordinaten der Punkte  $w$  und  $w'$  Veranlassung:

$$\frac{x_1}{x_3} \cdot \frac{x_1'}{x_4'} = 1$$

und

$$\frac{x_2}{x_3} \cdot \frac{x_2'}{x_4'} = 1.$$

Diese Beziehung, eine Umformung von

$$(u - iv) (u' - iv') = (uu' - vv') - i (uv' + u'v) = c^2$$

geht aus der ersteren,

$$(u + iv) (u' + iv') = (uu' - vv') + i (uv' + u'v) = c^2$$

hervor, weil  $c$  eine *reelle* Constante darstellt.

Die Verwandtschaftsgleichungen

$$x_1 x_1' = x_2 x_2' = x_3 x_4'$$

zeigen, dass die Punkte  $w$  und  $w'$  einander in einer *quadratischen* Verwandtschaft zugeordnet sind, welche, ihrer nicht-homogenen Darstellung nach, aus einer Inversion und einer Spiegelung um die reelle Axe zusammengesetzt ist.

Der Punkt  $P$  in  $\omega_\infty$  wird (siehe I. Abschnitt) durch

$$\frac{x_1}{x_3} = p_1, \quad \frac{x_2}{x_3} = p_2, \quad x_4 = 0,$$

der entsprechende Punkt  $P'$  in  $\omega_0$  durch

$$\frac{x_1'}{x_4'} = p_1', \quad \frac{x_2'}{x_4'} = p_2', \quad x_3' = 0$$

bestimmt.

Der Congruenzstrahl  $p = PP'$  wird demnach gegeben durch

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= p_1 x_3 + p_1' x_4, \\ x_2 &= p_2 x_3 + p_2' x_4. \end{aligned} \right\}$$

Die Verwandtschaftsgleichungen

$$x_1 x_1' = x_2 x_2' = x_3 x_4'$$

bedingen die Beziehungen

$$\begin{aligned} p_1 p_1' &= 1, \\ p_2 p_2' &= 1, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} p_1' &= \frac{1}{p_1}, \\ p_2' &= \frac{1}{p_2}. \end{aligned}$$

Die Gleichungen eines Strahles der Congruenz, welche  $w' = \frac{c^2}{w}$  vertritt, bekommen daher diese Gestalt:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= p_1 x_3 + \frac{1}{p_1} x_4 \\ x_2 &= p_2 x_3 + \frac{1}{p_2} x_4 \end{aligned} \right\} . . . . . (1)$$

§ 2. *Bündelgrad (Ordnung) und Feldgrad (Klasse).*

Um den Bündelgrad zu bestimmen, betrachten wir in (1)  $x_1, x_2, x_3$  und  $x_4$  als feste Coordinaten, und suchen die Anzahl der Combinationen  $(p_1, p_2)$ , welche dann aus (1) hervorgehen.

Die Gleichungen (1) zeigen in der Form

$$\left. \begin{aligned} x_3 p_1^2 - x_1 p_1 + x_4 &= 0, \\ x_3 p_2^2 - x_2 p_2 + x_4 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

unmittelbar, dass ein Punkt  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  (zwei Werte für  $p_1$  und zwei Werte für  $p_2$  veranlässt; wir finden deshalb vier Combinationen  $(p_1, p_2)$ , und somit vier Punkte  $P$ ; diese Punkte  $P$  stützen die vier Congruenzstrahlen, deren Gleichungen den Beziehungen (1) entsprechen, weshalb sie in dem gegebenen Punkte  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  zusammentreffen.

Wir folgern hieraus dass durch einen gegebenen Punkt vier Congruenzstrahlen hindurchgehen, wonach der Bündelgrad vier ist.

Eine Ebene, mit der Gleichung

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0,$$

enthält einen Congruenzstrahl  $p$ , falls sie dem Ebenenbüschel angehört, welcher, mit  $p$  als Axe, durch die beiden Ebenen (1) bestimmt ist.

Es ergibt sich daher diese Identität:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \left( x_1 - p_1 x_3 - \frac{1}{p_1} x_4 \right) + \lambda_2 \left( x_2 - p_2 x_3 - \frac{1}{p_2} x_4 \right) \\ \equiv \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4, \end{aligned}$$

und demnach:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha_1, \\ \lambda_2 &= \alpha_2, \\ -(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2) &= \alpha_3, \\ -\left( \frac{\lambda_1}{p_1} + \frac{\lambda_2}{p_2} \right) &= \alpha_4. \end{aligned}$$

Die letzten zwei Gleichungen führen die Werte von  $p_1$  und  $p_2$  herbei, welche den in der gegebenen Ebene liegenden Strahlen angehören.

Den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 &= 0, \\ \alpha_2 p_1 + \alpha_1 p_2 + \alpha_4 p_1 p_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (2)$$

genügen zwei Combinationen  $(p_1, p_2)$ . Folglich liegen in der gegebenen Ebene zwei Congruenzstrahle, und der *Feldgrad* ist zwei.

### § 3. Die Fokalfäche.

Ein Congruenzstrahl  $p$  wird bestimmt durch die beiden Gleichungen (1), von denen erstere eine Ebene durch  $X_2$ , letztere eine Ebene durch  $X_1$  darstellt. Erstere wird, wenn  $p_1$  alle Werte durchläuft, einen Kegel mit  $X_2$  als Spitze umhüllen, dessen Gleichung sich ergibt, wenn wir die Diskriminante der ersten Gleichung (1) gleich Null setzen. Man erhält dann

$$x_1^2 - 4 x_3 x_4 = 0.$$

Der durch die Ebene  $x_1 = p_1 x_3 + p_1^{-1} x_4$  umhüllte Kegel ist also vom *zweiten* Grade und werde durch  $F_2$  angewiesen.

Der durch die Ebene  $x_2 = p_2 x_3 + p_2^{-1} x_4$  umhüllte Kegel  $F_1$  wird dargestellt durch

$$x_2^2 - 4 x_3 x_4 = 0.$$

Seine Spitze liegt in  $X_1$ .

Wir sind also zu der Einsicht gelangt, dass von den beiden Ebenen, welche  $p$  enthalten, die erste den quadratischen Kegel  $F_2$ , die zweite den quadratischen Kegel  $F_1$  berührt. Folglich ist der Congruenzstrahl  $p$  selber eine gemeinschaftliche Tangente der beiden Kegel  $F_1$  und  $F_2$ .

Unsere Schlussfolgerung ist demnach:

Die Strahlen der Congruenz, welche die Beziehung  $w' = c^2$  vertritt, sind die gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kegel:

$$\left. \begin{aligned} F_1 \cdot \cdot \cdot x_2^2 - 4 x_3 x_4 &= 0 \\ F_2 \cdot \cdot \cdot x_1^2 - 4 x_3 x_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (3)$$

Weil ein Punkt von  $F_1$ , bez.  $F_2$ , zwei unendlich benachbarte Strahlen trägt, müssen wir  $F_1$  und  $F_2$  als die beiden Teile betrachten, aus welchen die *Fokalfäche* zusammengesetzt ist. Die beiden Kegel werden deshalb nachher *Fokalkegel* genannt.

Der durch die Fokalkegel bestimmte Büschel quadratischer Flächen wird dargestellt durch

$$\lambda_1 (x_1^2 - 4 x_3 x_4) + \lambda_2 (x_2^2 - 4 x_3 x_4) = 0.$$

Das Gebilde dieses Büschels, für welches  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ , hat die Gleichung

$$x_1^2 - x_2^2 = 0,$$

ist somit in zwei Ebenen ausgeartet, welche zusammen die Schnittkurve vierten Grades der Kegel  $F_1$  und  $F_2$  enthalten müssen.

Die Ebene  $\varepsilon$ , mit der Gleichung

$$x_1 - x_2 = 0,$$

trägt also einen Kegelschnitt  $e$ , welcher  $F_1$  und  $F_2$  gemeinsam ist.

In gleicher Weise enthält die durch

$$x_1 + x_2 = 0$$

bestimmte Ebene  $\varepsilon'$  einen Kegelschnitt  $e'$ , welcher ebenfalls beiden Kegeln angehört.

Der Schnitt der Fokalkegel  $F_1$  und  $F_2$  besteht also aus zwei Kegelschnitten  $e$  und  $e'$ , bez. in den Ebenen

$$\varepsilon \quad . \quad . \quad x_1 - x_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\varepsilon' \quad . \quad . \quad x_1 + x_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Beide Ebenen gehen durch  $X_3 X_4$  und sind zu den Coordinatenebenen  $X_1 X_3 X_4$  und  $X_2 X_3 X_4$  harmonisch conjugirt.

Die Gleichungen (3) der Fokalkegel zeigen, dass dieselben die Ebenen  $x_4 = 0$  und  $x_3 = 0$  berühren, und zwar berührt  $F_1$  die Ebene  $x_4 = 0$ , oder  $\omega_\infty$ , längs  $X_1 X_3$ , die Ebene  $x_3 = 0$ , oder  $\omega_0$ , längs  $X_1 X_4$ , während  $F_2$  von  $\omega_\infty$  längs  $X_2 X_3$ , von  $\omega_0$  längs  $X_2 X_4$  berührt wird.

#### § 4. *Singuläre Elemente.*

Eine Ebene heisst *singulär*, wenn sie mehr als zwei Congruenzstrahlen, also deren eine unendliche Menge enthält.

Die Coordinaten  $p_1$  und  $p_2$  der Spur  $P$  eines in der Ebene

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$$

liegenden Strahles, sind, wie aus § 2 hervorgeht, bestimmt durch

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 p_1 + \alpha_1 p_2 + \alpha_4 p_1 p_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (2)$$

Die Ebene  $\Sigma \alpha x = 0$  wird singulär sein, wenn diese beiden Gleichungen von einander abhängig sind.

Durch Elimination von  $p_2$  finden wir

$$\alpha_1 \alpha_4 p_1^2 + (\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3 \alpha_4) p_1 + \alpha_1 \alpha_3 = 0.$$

Es ist  $p_1$  unbestimmt, wenn die Bedingungen

$$\begin{aligned} \alpha_1 \alpha_4 &= 0, \\ \alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3 \alpha_4 &= 0, \\ \alpha_1 \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt sind. Ihnen wird genügt

1° durch

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \sqrt{\alpha_3 \alpha_4}$$

und demnach (siehe (2)) durch

$$\alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_4 = 1 : -p_2 : -\frac{1}{p_2},$$

sodass die Gleichung der Ebene diese Form annimmt:

$$x_2 - p_2 x_3 - \frac{1}{p_2} x_4 = 0.$$

Sie stellt deshalb (siehe (1)) die Berührungsebene des Fokalkegels  $F_1$  dar, welche den Strahl  $p$  enthält, also die Ebene, welche  $p$  mit  $X_1$  verbindet.

Es zeigt sich somit, dass jede Ebene, welche einen Congruenzstrahl mit  $X_1$  verbindet, singulär ist. Die in dieser Ebene befindlichen Strahlen umhüllen offenbar den Kegelschnitt, in dem der Fokalkegel  $F_2$  die Ebene  $(p, X_1)$  schneidet. Jede Ebene  $(p, X_1)$  trägt ein Strahlensystem zweiter Klasse, ist somit eine *singuläre Ebene zweiten Grades*.

In derselben Weise wird gezeigt, dass jede Ebene, welche einen Strahl mit  $X_2$  verbindet, singulär ist und ein Strahlengebilde zweiter Klasse trägt.

Diejenige von den Ebenen

$$p_2^2 x_3 - p_2 x_2 + x_4 = 0,$$

welche einen Strahl trägt, für welchen  $p_2 = 0$  ist, ergibt sich



als die Ebene  $x_4 = 0$ , d. h.  $\omega_\infty$ . Auch die Ebene  $x_3 = 0$ , oder  $\omega_0$ , welche dem Werte  $p_2 = \infty$  entspricht, gehört den oben genannten Ebenen an.

Die Ebenen  $\omega_\infty$  und  $\omega_0$  sind demnach auch singulär; sie enthalten aber keine Strahlensysteme zweiter Klasse, wie wir demnächst zeigen werden.

2°. Der Abhängigkeitsbedingung genügt auch die Annahme

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= 0, \\ \alpha_4 &= 0, \\ \alpha_1^2 - \alpha_2^2 &= 0, \end{aligned}$$

welche die Ebenen

$$x_1 - x_2 = 0, \text{ oder } \varepsilon$$

und

$$x_1 + x_2 = 0, \text{ oder } \varepsilon'$$

liefert. Diese Ebenen haben wir schon in § 3 als singuläre erkannt. Die in  $\varepsilon$  befindlichen Strahlen umhüllen den Kegelschnitt  $e$ , diejenigen in  $\varepsilon'$  den Kegelschnitt  $e'$ .

Die singulären Punkte treten zu Tage, wenn wir in

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 x_3 + \frac{1}{p_1} x_4 \\ x_2 &= p_2 x_3 + \frac{1}{p_2} x_4 \end{aligned}$$

für  $p_1$  oder  $p_2$  unbestimmte Werte verlangen.

Es leuchtet sofort ein, dass  $p_1$  unbestimmt bleibt, wenn gegeben ist:

$$x_1 = x_3 = x_4 = 0;$$

folglich ist der Punkt  $X_2$  singulär.

Ebenso finden wir, indem wir für  $p_2$  einen unbestimmten Wert bedingen, dass  $X_1$  ein singulärer Punkt ist.

Auch die Punkte  $X_3$  und  $X_4$ , wofür  $p_1 = p_2 = 0$ , bez.  $p_1 = p_2 = \infty$  gilt, sodass wir über das Verhältniss  $p_1 : p_2$  im Ungewissen bleiben, sind singulär.

Da die Bilder von  $X_3$  und  $X_4$  auf  $X_1 X_2$  liegen, werden die durch  $X_3$  hindurchgehenden Strahlen in der Ebene  $\omega_\infty$ , die sich auf  $X_4$  stützenden Strahlen in der Ebene  $\omega_0$  liegen.

In der Absicht die Beschaffenheit der singulären Punkte  $X_3$  und

$X_4$  genauer fest zu stellen, wird es genügen den Zustand in den Ebenen  $\omega_\infty$  und  $\omega_0$  zu erforschen.

Ein Strahl  $p$  ist bestimmt durch seine Spur  $P$  in  $\omega_\infty$ , welche gegeben ist durch die Coordinaten

$$p_1 = \frac{y_1}{y_3}, \quad p_2 = \frac{y_2}{y_3}, \quad y_4 = 0.$$

Wenn wir in den Gleichungen (1)  $p_1$  und  $p_2$  durch diese Ausdrücke ersetzen, so finden wir

$$\left. \begin{aligned} y_1 y_3 x_1 - y_1^2 x_3 - y_3^2 x_4 &= 0 \\ y_2 y_3 x_2 - y_2^2 x_3 - y_3^2 x_4 &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Der Punkt  $T(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , welcher den Strahl trägt, wird nun in den Punkt  $Q'$  der Ebene  $\omega_0$  gelegt, sodass  $x_3 = 0$  wird.

Die Spur  $(y_1, y_2, y_3)$  in  $\omega_\infty$  ist in diesem Falle bestimmt durch

$$\begin{aligned} (y_1 x_1 - y_3 x_4) y_3 &= 0, \\ (y_2 x_2 - y_3 x_4) y_3 &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen liefern *vier* Punkte,

$$1^\circ \quad \left\{ \begin{aligned} y_1 x_1 - y_3 x_4 &= 0, \\ y_2 x_2 - y_3 x_4 &= 0; \end{aligned} \right.$$

$$2^\circ \quad \left\{ \begin{aligned} y_2 x_2 - y_3 x_4 &= 0, \\ y_3 &= 0; \end{aligned} \right.$$

$$3^\circ \quad \left\{ \begin{aligned} y_1 x_1 - y_3 x_4 &= 0, \\ y_3 &= 0; \end{aligned} \right.$$

$$4^\circ \quad \left\{ \begin{aligned} y_3 &= 0, \\ y_3 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Der erste Punkt hat die Coordinaten

$$\frac{y_1}{y_3} = \frac{x_4}{x_1}, \quad \frac{y_2}{y_3} = \frac{x_4}{x_2},$$

und ist deshalb der  $Q'$  entsprechende Punkt  $Q$  in  $\omega_\infty$ ; die Verbindungslinie  $q = QQ'$  ist der Congruenzstrahl, welcher  $Q$  mit seinem Bilde  $Q'$  vereinigt.

Der zweite Punkt ist  $X_1$ ; der zugehörige Congruenzstrahl durch  $Q'$  ist also die Gerade  $Q'X_1$ .

Der dritte Punkt ist  $X_2$ ; der dritte Congruenzstrahl durch  $Q'$  ist somit die Gerade  $Q'X_2$ .

Der vierte Punkt liegt auf  $\Lambda_1X_2$  und ist bis jetzt unbestimmt. Um die Lage dieses Punktes genau zu erörtern, werden wir  $T$  nicht *in* dem Punkte  $Q'$  von  $\omega_0$  annehmen, sondern *in der Nähe* von  $Q'$ . Die Coordinate  $x_3$  wird dann einen kleinen Wert haben. Die Coordinate  $y_3$  des Punktes, wo der Strahl  $\omega_x$  trifft, wird dann freilich nicht Null sein, sondern ebenfalls einen kleinen Wert haben.

Wir werden deshalb  $y_3 : y_1$  nach Potenzen von  $x_3 : x_1$  entwickeln.

Setzen wir

$$\frac{y_3}{y_1} = y, \quad \frac{x_3}{x_1} = x$$

und

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \dots,$$

so ergibt sich aus der Gleichung

$$y_1 y_3 x_1 - y_1^2 x_3 - y_3^2 x_4 = 0$$

zunächst

$$y - \alpha = y^2 \frac{x_4}{x_1},$$

dann aber

$$\alpha + (\beta - 1)x + \gamma x^2 + \dots = (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \dots)^2 \frac{x_4}{x_1}.$$

Die Gleichsetzung der Coefficienten gleicher Potenzen von  $x$  liefert

$$\alpha = \alpha^2 \cdot \frac{x_4}{x_1},$$

$$\beta - 1 = 2\alpha\beta \frac{x_4}{x_1}.$$

Die Lösungen sind

$$1^\circ \quad 1 = \alpha \frac{x_4}{x_1},$$

wonach

$$y = \frac{x_1}{x_4} + \beta x + \gamma x^2,$$

also für verschwindendes  $x$ :

$$y = \frac{x_1}{x_4}$$

oder

$$\frac{y_3}{y_1} = \frac{x_1}{x_4}.$$

2°

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1,$$

sodass

$$y = x + \gamma x^2,$$

und für verschwindendes  $x$ :

$$y = x$$

oder

$$\frac{y_3}{y_1} = \frac{x_3}{x_1}.$$

Ebenso finden wir für das Verhältniss  $y_3 : y_2$  zwei Werte, nämlich

1°

$$\frac{y_3}{y_2} = \frac{x_2}{x_4},$$

2°

$$\frac{y_3}{y_2} = \frac{x_3}{x_2}.$$

Die vier Spuren werden demnach bestimmt durch Combination der beiden Werte für  $y_3 : y_1$  mit den zwei Werten für  $y_3 : y_2$ .

Für den ersten Durchstosspunkt gilt somit

$$\frac{y_3}{y_1} = \frac{x_1}{x_4},$$

$$\frac{y_3}{y_2} = \frac{x_2}{x_4}.$$

Wir finden also den Punkt, der an der Grenze in den  $Q'$  zugeordneten Punkt  $Q$  übergeht.

Für den zweiten Durchstosspunkt gilt

$$\frac{y_3}{y_1} = \frac{x_3}{x_1},$$

$$\frac{y_3}{y_2} = \frac{x_2}{x_4}.$$

Bei verschwindendem  $x_3$  fällt dieser Punkt zusammen mit

$$y_3 = 0, y_2 = 0,$$

also in  $X_1$ .

Die dritte Spur wird dargestellt durch

$$\frac{y_3}{y_1} = \frac{x_1}{x_4},$$

$$\frac{y_3}{y_2} = \frac{x_3}{x_2}.$$

Dieser Punkt gelangt schliesslich in  $X_2$ .

Die vierte Spur ist bestimmt durch

$$\frac{y_3}{y_1} = \frac{x_3}{x_1},$$

$$\frac{y_3}{y_2} = \frac{x_3}{x_2},$$

so dass man hat

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}.$$

Bei verschwindendem  $x_3$  liefern die erste zwei Gleichungen freilich beide  $y_3 = 0$ , aber die dritte Gleichung besagt, dass das Verhältniss der Coordinaten  $y_1$  und  $y_2$  dem Verhältnisse der Coordinaten  $x_1$  und  $x_2$  von  $Q'$  gleich ist. Das heisst: der vierte Durchstosspunkt liegt in der Ebene welche  $Q'$  mit  $X_3 X_4$  verbindet, also in dem Schnittpunkte von  $Q' X_4$  mit  $X_1 X_2$ . Der vierte Congruenzstrahl geht deshalb durch  $X_4$ . Obige Untersuchung hat demnach ergeben, dass von den vier Strahlen, welche sich in einem Punkte  $Q'$  von  $\omega_0$  treffen, der erste  $Q'$  mit dem ihm zugeordneten Punkte  $Q$ , der zweite  $Q'$  mit  $X_1$ , der dritte  $Q'$  mit  $X_2$ , der vierte  $Q'$  mit  $X_4$  verbindet.

Die vier Congruenzstrahlen durch  $Q'$  in  $\omega_0$  sind also die Geraden  $q = Q Q', Q' X_1, Q' X_2, Q' X_4$ .

In derselben Weise lässt sich zeigen, dass die vier Congruenzstrahlen, welche nach einem Punkte  $Q$  von  $\omega_x$  zielen, die Geraden  $q = Q Q', Q X_1, Q X_2$  und  $Q X_3$  sind.

Wir haben also gefunden, dass die Geraden, welche einen willkürlichen Punkt  $Q$  von  $\omega_x$  mit  $X_1, X_2$  und  $X_3$  verbinden, alle Congruenzstrahlen sind und dass dasselbe bei den Geraden zutrifft,

welche einen beliebigen Punkt  $Q'$  von  $\omega_0$  mit  $X_1$ ,  $X_2$  und  $X_4$  vereinigen.

Jetzt haben wir eine genaue Vorstellung von dem Zustand in den singulären Ebenen  $\omega_0$  und  $\omega_x$  und in den singulären Punkten  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  und  $X_4$ .

Wir schliessen, dass die Ebene  $\omega_x$  drei Strahlenbüschel mit  $X_1$ ,  $X_2$  und  $X_3$  als Scheitel trägt, während die Ebene  $\omega_0$  drei Strahlenbüschel mit  $X_1$ ,  $X_2$  und  $X_4$  als Scheitel enthält.

Der Punkt  $X_1$  trägt zwei Strahlenbüschel, von denen der eine in  $\omega_x$ , der andere in  $\omega_0$  liegt.

Der Punkt  $X_2$  zeigt dasselbe wie  $X_1$ .

Der Punkt  $X_3$  ist Träger eines Strahlenbüschels in  $\omega_x$ .

Der Punkt  $X_4$  ist Mittelpunkt eines Strahlenbüschels in  $\omega_0$ .

Die obige Beweisführung wird dem Leser zweifellos etwas weitläufig erscheinen. Wir wollen ihm unmittelbar beistimmen. In der Tat können bei dieser einfachen Congruenz die gefundenen Resultate auf bedeutend kürzerem Wege abgeleitet werden, und zwar am besten in rein geometrischer Weise.

Wir bitten diese Betrachtungen lieber als Übungsbeispiel für die späteren verwickelteren Congruenzen denn als Muster eleganter Beweisführung aufzufassen.

### § 5. Die axiale Regelfläche einer willkürlichen Gerade $l$ .

Die Gerade  $l$  möge  $\omega_x$  schneiden in  $A \left( \frac{x_1}{x_3} = a_1, \frac{x_2}{x_3} = a_2, x_4 = 0 \right)$

und  $\omega_0$  in  $B' \left( \frac{x_1}{x_4} = b_1', \frac{x_2}{x_4} = b_2', x_3 = 0 \right)$ .

Ihre Gleichungen lauten sodann

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 x_3 + b_1' x_4 \\ x_2 &= a_2 x_3 + b_2' x_4 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

Die Gerade  $l$  wird einen Congruenzstrahl  $p$  [welcher  $\omega_x$  in  $P (p_1, p_2)$  und  $\omega_0$  in  $P' (p_1', p_2')$  trifft] schneiden, wenn sie mit  $p$  in einer Ebene liegt; deren Gleichung sei

$$\lambda_1 (x_1 - a_1 x_3 - b_1' x_4) + \lambda_2 (x_2 - a_2 x_3 - b_2' x_4) = 0.$$

Diese Gleichung muss befriedigt werden durch alle Systeme  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , welche den Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= p_1 x_3 + p_1' x_4 \\ x_2 &= p_2 x_3 + p_2' x_4 \end{aligned} \right\}$$

genügen.

Wir finden hieraus

$$\lambda_1(p_1x_3+p_1'x_4-a_1x_3-b_1'x_4)+\lambda_2(p_2x_3+p_2'x_4-a_2x_3-b_2'x_4)\equiv 0,$$

oder

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1(p_1 - a_1) + \lambda_2(p_2 - a_2) &= 0 \\ \lambda_1(p_1' - b_1') + \lambda_2(p_2' - b_2') &= 0 \end{aligned} \right\},$$

folglich lautet die Bedingung für die Schneidung:

$$\frac{p_1' - b_1'}{p_1 - a_1} = \frac{p_2' - b_2'}{p_2 - a_2}, \dots \dots \dots (7)$$

oder, vermöge der Relationen

$$p_1 p_1' = 1, \quad p_2 p_2' = 1:$$

$$\frac{1}{p_1 - b_1'} = \frac{1}{p_2 - b_2'},$$

oder endlich :

$$p_1(p_1 - a_1)(1 - p_2 b_2') = p_2(p_2 - a_2)(1 - p_1 b_1') \quad . \quad (8)$$

Die Gleichung der axialen Regelfläche von  $l$  ergibt sich, wenn wir noch  $p_1$  und  $p_2$  aus den Gleichungen (1) des Congruenzstrahles und der Gleichung (8) eliminieren. Die Gleichung (8) schreiben wir in dieser Form:

$$b_2' p_1^2 p_2 - b_1' p_1 p_2^2 - p_1^2 + p_2^2 - (a_1 b_2' - a_2 b_1') p_1 p_2 + a_1 p_1 - a_2 p_2 = 0 \quad (9)$$

Aus den Gleichungen (1) folgt

$$\left. \begin{aligned} x_3 p_1^2 &= x_1 p_1 - x_4 \\ x_3 p_2^2 &= x_2 p_2 - x_4 \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (10)$$

Multiplizieren wir (9) mit  $x_3$ , so ergibt sich die Gleichung

$$b_2' x_3 p_1^2 p_2 - b_1' x_3 p_1 p_2^2 - x_3 p_1^2 + x_3 p_2^2 - \\ - (a_1 b_2' - a_2 b_1') x_3 p_1 p_2 + a_1 x_3 p_1 - a_2 x_3 p_2 = 0.$$

Wir erniedrigen nur ihren Grad mit Hülfe der Ausdrücke (10) und erhalten dann

$$b_2' x_1 p_1 p_2 - b_2' x_4 p_2 - b_1' x_2 p_1 p_2 + b_1' x_4 p_1 - x_1 p_1 + x_4 + x_2 p_2 - \\ - x_4 - (a_1 b_2' - a_2 b_1') x_3 p_1 p_2 + a_1 x_3 p_1 - a_2 x_3 p_2 = 0$$

oder

$$(b_2' x_1 - b_1' x_2 - (a_1 b_2' - a_2 b_1') x_3) p_1 p_2 + (-x_1 + a_1 x_3 + b_1' x_4) p_1 + \\ + (x_2 - a_2 x_3 - b_2' x_4) p_2 = 0.$$

Setzen wir, der Kürze halber:

$$\left. \begin{aligned} b_2' x_1 - b_1' x_2 - (a_1 b_2' - a_2 b_1') x_3 &= \beta_3, \\ -x_1 + a_1 x_3 + b_1' x_4 &= \beta_2, \\ x_2 - a_2 x_3 - b_2' x_4 &= \beta_1, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

so erhalten wir

$$\beta_3 p_1 p_2 + \beta_2 p_1 + \beta_1 p_2 = 0 \quad (12)$$

Es ist nun unsere Absicht *vier* Gleichungen in  $p_1, p_2$  und  $p_1 p_2$  aufzustellen, aus denen wir dann diese Grössen eliminiren können. Diese Absicht wird erzielt durch eine wiederholte Benützung der Ausdrücke (10).

Durch Multiplikation mit  $x_3 p_1$  wird (12) verwandelt in

$$\beta_3 x_3 p_1^2 p_2 + \beta_2 x_3 p_1^2 + \beta_1 x_3 p_1 p_2 = 0.$$

Ersetzung mittels (10) ergibt

$$\beta_3 x_1 p_1 p_2 - \beta_3 x_4 p_2 + \beta_2 x_1 p_1 - \beta_2 x_4 + \beta_1 x_3 p_1 p_2 = 0,$$

oder

$$(\beta_3 x_1 + \beta_1 x_3) p_1 p_2 + \beta_2 x_1 p_1 - \beta_3 x_4 p_2 - \beta_2 x_4 = 0. \quad (13)$$

Multiplikation mit  $x_3 p_2$  würde uns geführt haben zu

$$(\beta_3 x_2 + \beta_2 x_3) p_1 p_2 - \beta_3 x_4 p_1 + \beta_1 x_2 p_2 - \beta_1 x_4 = 0. \quad (14)$$

Multiplizieren wir schliesslich (13) mit  $x_3 p_2$ , so bekommen wir

$$(\beta_3 x_1 + \beta_1 x_3) x_3 p_1 p_2^2 + \beta_2 x_1 x_3 p_1 p_2 - \beta_3 x_3 x_4 p_2^2 - \beta_2 x_3 x_4 p_2 = 0,$$

oder, mit Verwendung von (10),

$$(\beta_3 x_1 + \beta_1 x_3) x_2 p_1 p_2 - (\beta_3 x_1 + \beta_1 x_3) x_4 p_1 + \beta_2 x_1 x_3 p_1 p_2 - \\ - \beta_3 x_2 x_4 p_2 + \beta_3 x_4^2 - \beta_2 x_3 x_4 p_2 = 0,$$

oder endlich



$$(\beta_3 x_1 x_2 + \beta_2 x_1 x_3 + \beta_1 x_2 x_3) p_1 p_2 - (\beta_3 x_1 + \beta_1 x_3) x_4 p_1 - \\ - (\beta_3 x_2 + \beta_2 x_3) x_4 p_2 + \beta_3 x_4^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Durch Elimination von  $p_1, p_2$  und  $p_1 p_2$  aus (12), (13), (14) und (15) erhalten wir die folgende Gleichung

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \beta_3 & , \beta_2 & , \beta_1 & , 0 \\ \beta_3 x_1 + \beta_1 x_3 & , \beta_2 x_1 & , -\beta_3 x_4 & , -\beta_2 x_4 \\ \beta_3 x_2 + \beta_2 x_3 & , -\beta_3 x_4 & , \beta_1 x_2 & , -\beta_1 x_4 \\ \beta_3 x_1 x_2 + \beta_2 x_1 x_3 + \beta_1 x_2 x_3 & , -(\beta_3 x_1 + \beta_1 x_3) x_4 & , -(\beta_3 x_2 + \beta_2 x_3) x_4 & , \beta_3 x_4^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplizieren wir die erste Reihe mit  $x_1 x_2$ , die zweite mit  $-x_2$ , die dritte mit  $-x_1$ , und addieren wir sie zu der vierten, so ergibt sich

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \beta_3 & , \beta_2 & , \beta_1 & , 0 \\ \beta_3 x_1 + \beta_1 x_3 & , \beta_2 x_1 & , -\beta_3 x_4 & , -\beta_2 x_4 \\ \beta_3 x_2 + \beta_2 x_3 & , -\beta_3 x_4 & , \beta_1 x_2 & , -\beta_1 x_4 \\ 0 & , -\beta_1 x_3 x_4 & , -\beta_2 x_3 x_4 & , (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_4) x_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Nun ist wegen der Gleichungen (11)

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_4 = x_1 x_2 - a_2 x_1 x_3 - b_2' x_1 x_4 - x_1 x_2 + \\ + a_1 x_2 x_3 + b_1' x_2 x_4 + b_2' x_1 x_4 - b_1' x_2 x_4 - (a_1 b_2' - a_2 b_1') x_3 x_4 = \\ = -a_2 x_1 + a_1 x_2 - (a_1 b_2' - a_2 b_1') x_4 x_3,$$

oder, wenn wir

$$a_2 x_1 - a_1 x_2 + (a_1 b_2' - a_2 b_1') x_4 = \beta_0 \quad . \quad . \quad (16)$$

setzen,

$$\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_4 = -\beta_0 x_3 \quad . \quad . \quad (17)$$

Durch Substitution dieses Ausdrucks in das letzte Element der Determinante erkennen wir, dass  $\Delta$  durch  $x_3 x_4$  teilbar ist. Die Division durch  $x_3 x_4$  ergibt

$$\Delta' \equiv \begin{vmatrix} \beta_3 & , \beta_2 & , \beta_1 & , 0 \\ \beta_3 x_1 + \beta_1 x_3 & , \beta_2 x_1 & , -\beta_3 x_4 & , -\beta_2 \\ \beta_3 x_2 + \beta_2 x_3 & , -\beta_3 x_4 & , \beta_1 x_2 & , -\beta_1 \\ 0 & , -\beta_1 x_4 & , -\beta_2 x_4 & , -\beta_0 \end{vmatrix} = 0. \quad (18)$$

Weil  $\beta_3, \beta_2, \beta_1$  und  $\beta_0$  alle vom ersten Grade in  $x_1, x_2, x_3, x_4$  sind, ist die Gleichung (18) vom *sechsten* Grade.

Wenn wir  $\beta_3, \beta_2, \beta_1$  und  $\beta_0$  durch ihre in (11) und (16) gegebenen Werte ersetzen, so sind die Coefficienten der Gleichung ausschliesslich ausgedrückt in den die Gerade  $l$  bestimmenden Grössen  $a_1, a_2, b_1'$  und  $b_2'$ .

Es hat sich aus dem Obigen gezeigt, dass die axiale Regelfläche einer willkürlichen Gerade  $l$  vom *sechsten* Grade ist. Wir können die Gleichung dieser Fläche umgestalten, indem wir das Coordinatensystem so abändern, dass die Kante, welche früher mit  $X_3 X_4$  zusammenfiel, jetzt in  $l = AB'$  gelegt wird.

Die hierzu benötigte Transformation lautet

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \xi_1 + a_1 \xi_3 + b_1' \xi_4, \\ x_2 &= \xi_2 + a_2 \xi_3 + b_2' \xi_4, \\ x_3 &= \xi_3, \\ x_4 &= \xi_4, \end{aligned} \right\}$$

vermöge welcher die Gerade  $l$  bezeichnet wird mit

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= 0, \\ \xi_2 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Die Ausdrücke für  $\beta_3, \beta_2, \beta_1$  und  $\beta_0$  gestalten sich nun wie folgt

$$\begin{aligned} \beta_3 &= b_2'(x_1 - a_1 x_3) - b_1'(x_2 - a_2 x_3) = \\ &= b_2'(\xi_1 + b_1' \xi_4) - b_1'(\xi_2 + b_2' \xi_4) = b_2' \xi_1 - b_1' \xi_2, \\ \beta_2 &= -\xi_1, \\ \beta_1 &= \xi_2, \\ \beta_0 &= a_2(x_1 - b_1' x_4) - a_1(x_2 - b_2' x_4) = \\ &= a_2(\xi_1 + a_1 \xi_3) - a_1(\xi_2 + a_2 \xi_3) = a_2 \xi_1 - a_1 \xi_2. \end{aligned}$$

Es ergibt sich hieraus, dass alle Elemente der Determinante einen in  $\xi_1$  und  $\xi_2$  homogenen, linearen Faktor enthalten, so dass in der ausgearbeiteten Gleichung jedes Glied einen in  $\xi_1$  und  $\xi_2$  homogenen *biquadratischen* Faktor enthalten wird. Daher wird die Substitution  $\xi_2 = \lambda \xi_1$  einen Faktor  $\xi_1^4$  absondern, oder auch: die Gerade  $l$  ist *vierfach* auf ihrer axialen Regelfläche.

Den Schnitt dieser Fläche mit  $\omega_\infty$  erhalten wir, indem wir in die Gleichung (18)  $x_4 = 0$  substituieren, wodurch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \beta_3 & , & \beta_2 & , & \beta_1 & , & 0 \\ \beta_3 x_1 + \beta_1 x_3 & , & \beta_2 x_1 & , & 0 & , & -\beta_2 \\ \beta_3 x_2 + \beta_2 x_3 & , & 0 & , & \beta_1 x_2 & , & -\beta_1 \\ 0 & , & 0 & , & 0 & , & -\beta_0 \end{vmatrix} =$$

$$= \beta_0 \beta_1 \beta_2 \begin{vmatrix} \beta_3 & , & 1, & 1 \\ \beta_3 x_1 + \beta_1 x_3, & x_1, & 0 \\ \beta_3 x_2 + \beta_2 x_3, & 0, & x_2 \end{vmatrix} = 0$$

entsteht.

Dieser Schnitt setzt sich also zusammen aus den drei Geraden

$$\beta_0 = 0, \beta_1 = 0, \beta_2 = 0,$$

oder

$$a_2 \xi_1 - a_1 \xi_2 = 0, \xi_2 = 0, \xi_1 = 0,$$

oder

$$AX_3, AX_1, AX_2,$$

und einer kubischen Kurve.

Dieser kubischen Kurve sind wir aber schon früher begegnet. Ihre Gleichung ist keine andere als die Gleichung (9), wenn wir in dieser  $p_1$  und  $p_2$  durch  $x_1 : x_3$  und  $x_2 : x_3$  ersetzen.

Die Gleichung (9) stellte ja die Beziehung dar zwischen den Coordinaten  $p_1, p_2$  der Punkte  $P$ , wo die auf  $l$  ruhenden Strahlen die Ebene  $\omega_\infty$  treffen. Es ist daher selbstredend, dass die sämtlichen Spuren eine Kurve bilden, welche dem Schnitte von  $\omega_\infty$  mit der axialen Regelfläche von  $l$  angehört.

Ersetzen wir  $p_1$  und  $p_2$  durch  $x_1 : x_3$  und  $x_2 : x_3$ , so kommt

$$b_2' x_1^2 x_2 - b_1' x_1 x_2^2 - x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3 - (a_1 b_2' - a_2 b_1') x_1 x_2 x_3 + \\ + a_1 x_1 x_3^2 - a_2 x_2 x_3^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

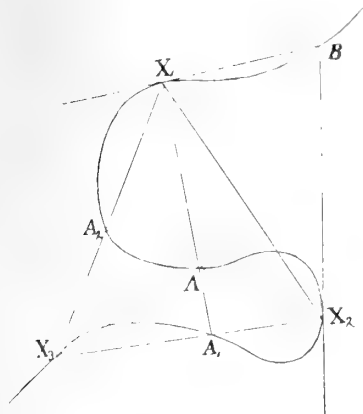


Fig. 1.

Diese Kurve geht offenbar durch die Punkte  $X_1, X_2$  und  $X_3$ . Die Tangente in  $X_1$  wird erhalten durch die Substitution  $x_2 = \lambda x_3$ , welche einen Faktor  $x_3$  absondert; derjenige Wert von  $\lambda$ , welcher abermals einen Faktor  $x_3$  frei macht, bestimmt dann die Tangente.

Dieses Verfahren wird darauf zurückgeführt, dass wir den Coefficient der höchsten Potenz von  $x_1$  betrachten, welcher, gleich Null gesetzt,

eine in  $x_2$  und  $x_3$  quadratische Form ergibt.

Der erwähnte Coefficient ist hier  $b_2' x_2 - x_3$ .

Die Tangente in  $X_1$  ist somit bestimmt durch

$$b_2' x_2 - x_3 = 0$$

oder

$$\frac{x_2}{x_3} = \frac{1}{b_2'}.$$

Diese Gerade vereinigt  $X_1$  mit dem Bildpunkte  $B \left( \mu_1 = \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{b_1'} \right)$   
 $\mu_2 = \frac{x_2}{x_3} = \frac{1}{b_2'}$  der Spur  $B'$  von  $l$  in  $\omega_0$ .

Es zeigt sich in gleicher Weise, dass auch die Tangente in  $X_2$  durch  $B$  hindurchgeht.

Die Substitution  $x_1 = x_3 : b_1'$  und  $x_2 = x_3 : b_2'$  besagt, dass  $B$  auf der Kurve liegt; die Substitution  $x_1 = a_1 x_3$ ,  $x_2 = a_2 x_3$ , dass die Kurve auch den Punkt  $A$  enthält.

Die kubische Kurve schneidet  $X_2 X_3$ , oder  $x_1 = 0$ , in den Punkten, welche bestimmt sind durch

$$x_2^2 x_3 - a_2 x_2 x_3^2 = 0$$

oder

$$x_2 x_3 (x_2 - a_2 x_3) = 0,$$

also in den Punkten  $X_2$  und  $X_3$  und in dem Punkte  $A_1$ , wo die Gerade  $AX_1$  die Gerade  $X_2 X_3$  schneidet.

Ebenso lässt sich beweisen, dass die Kurve und die Gerade  $X_2 A$  sich und die Gerade  $X_1 X_3$  in demselben Punkte  $A_2$  treffen.

Die kubische Kurve weist also die folgenden Merkmale auf

1° sie enthält die Punkte  $X_1, X_2, X_3, A, B$  (Bildpunkt von  $B'$ ),  
 $A_1 = (AX_1, X_2 X_3)$  und  $A_2 = (AX_2, X_1 X_3)$ .

2° Der Punkt  $B$  ist der Tangentialpunkt von  $X_1$  und  $X_2$ .

In der Figur 1 ist die betrachtete Kurve schematisch dargestellt.

Den hier gefundenen Resultaten können wir noch hinzufügen, dass die Tangente in  $X_3$  angewiesen ist durch

$$a_1 x_1 - a_2 x_2 = 0$$

oder

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_2}{a_1}.$$

Diese Gerade ist offenbar die axiale Projektion von  $A'$  (dem Bildpunkte in  $\omega_0$  von  $A$ ) aus der Axe  $X_3 X_4$  auf die Ebene  $\omega_\infty$ .

Um die Tangenten in  $A$  aufzufinden, substituieren wir in (19)

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 + a_1 \xi_3, \\ x_2 &= \xi_2 + a_2 \xi_3, \end{aligned}$$

wodurch wir die Ecke des Coordinatendreieckes von  $X_3$  nach  $A$  verlegen. Wir bekommen dann

$$(b_2' \xi_1 - b_1' \xi_2)(\xi_1 + a_1 \xi_3)(\xi_2 + a_2 \xi_3) - \xi_1(\xi_1 + a_1 \xi_3)\xi_3 + \xi_2(\xi_2 + a_2 \xi_3)\xi_3 = 0.$$

Indem wir den Coefficient von  $\xi_3^2$  gleich Null setzen, erhalten wir

$$a_1 a_2 (b_2' \xi_1 - b_1' \xi_2) - a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 = 0,$$

oder

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{a_1^{-1} - b_1'}{a_2^{-1} - b_2'}.$$

Die Ebene, welche diese Gerade mit  $l$  verbindet, schneidet  $\omega_0$  in einer durch dieselbe Gleichung dargestellten Gerade.

Diese in  $\omega_0$  liegende Gerade enthält offenbar den Punkt

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= (a_1^{-1} - b_1') \xi_4 \\ \xi_2 &= (a_2^{-1} - b_2') \xi_4 \end{aligned} \right\}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_1} x_4 \\ x_2 &= \frac{1}{a_2} x_4 \end{aligned} \right\}$$

d. h. den Bildpunkt  $A'$  in  $\omega_\infty$  von  $A$ .

Es ist klar, dass die Tangente an der kubischen Kurve die axiale Projektion ist des Bildes  $A'$  von  $A$ , aus der Axe  $l$  auf die Ebene  $\omega_\infty$ .

Nach diesen Darlegungen, den Schnitt in  $\omega_\infty$  betreffend, brauchen wir die Schnittkurve in  $\omega_0$  nicht besonders zu betrachten. Sie wird offenbar, ausser den drei Geraden  $X_1 B'$ ,  $X_2 B'$  und  $X_4 B'$ , aus einer kubischen Kurve bestehen, deren Gleichung sich aus (19) ergibt, wenn überall  $a_1$  und  $b_1'$ ,  $a_2$  und  $b_2'$ ,  $x_3$  und  $x_4$  verwechselt werden.

Es liegt uns mehr daran die *Doppelkurve* auf der axialen Regel-  
fläche zu erörtern.

Ein Strahl  $p$  liegt mit  $l$  in der Ebene

$$\lambda_1 (x_1 - a_1 x_3 - b_1' x_4) + \lambda_2 (x_2 - a_2 x_3 - b_2' x_4) = 0, \quad (20)$$

wenn

$$\lambda_1 \left\{ (p_1 - a_1) x_3 + \left( \frac{1}{p_1} - b_1' \right) x_4 \right\} + \\ + \lambda_2 \left\{ (p_2 - a_2) x_3 + \left( \frac{1}{p_2} - b_2' \right) x_4 \right\} = 0,$$

also, wenn

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 (p_1 - a_1) + \lambda_2 (p_2 - a_2) &= 0, \\ \lambda_1 \left( \frac{1}{p_1} - b_1' \right) + \lambda_2 \left( \frac{1}{p_2} - b_2' \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Ein Strahl  $q$  liegt in derselben Ebene, wenn den Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 (q_1 - a_1) + \lambda_2 (q_2 - a_2) &= 0, \\ \lambda_1 \left( \frac{1}{q_1} - b_1' \right) + \lambda_2 \left( \frac{1}{q_2} - b_2' \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Genüge geleistet wird.

Der Strahl  $p$  schneidet den Strahl  $q$ , wenn die folgende Gleichung erfüllt ist (siehe (1)).

$$\begin{vmatrix} -1, & 0, & p_1, & \frac{1}{p_1} \\ 0, & -1, & p_2, & \frac{1}{p_2} \\ -1, & 0, & q_1, & \frac{1}{q_1} \\ 0, & -1, & q_2, & \frac{1}{q_2} \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$(p_1 - q_1) (p_2 - q_2) (p_1 q_1 - p_2 q_2) = 0.$$

Da  $p_1 - q_1 = 0$  und  $p_2 - q_2 = 0$  bez. angeben, dass die Strahlen  $p$  und  $q$  in derselben Ebene durch  $X_2$  und  $X_1$  liegen, was hier nicht der Fall ist, handelt es sich nur um die Bedingung

$$p_1 q_1 = p_2 q_2 \quad (23)$$

Für den Schnittpunkt  $D$  von  $p$  und  $q$  hat man

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= p_1 x_3 + \frac{1}{p_1} x_4 = q_1 x_3 + \frac{1}{q_1} x_4, \\ x_2 &= p_2 x_3 + \frac{1}{p_2} x_4 = q_2 x_3 + \frac{1}{q_2} x_4, \end{aligned} \right\}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} (p_1 - q_1) x_3 &= \frac{p_1 - q_1}{p_1 q_1} x_4, \\ (p_2 - q_2) x_3 &= \frac{p_2 - q_2}{p_2 q_2} x_4, \end{aligned} \right\}$$

also

$$x_3 = \frac{x_4}{p_1 q_1} = \frac{x_4}{p_2 q_2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

welche Gleichungen sich vermöge (23) vertragen.

Aus (1) geht hervor

$$x_1 = \frac{p_1}{p_1 q_1} x_4 + \frac{1}{p_1} x_4 = \frac{p_1 + q_1}{p_1 q_1} x_4, \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

$$x_2 = \frac{p_2}{p_2 q_2} x_4 + \frac{1}{p_2} x_4 = \frac{p_2 + q_2}{p_2 q_2} x_4. \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Falls  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $q_1$  und  $q_2$  auch den Gleichungen (21) und (22) genügen, ist  $D$  der Schnittpunkt zweier Strahlen, welche sich beide auf  $l$  stützen;  $D$  ist demnach ein Punkt der Doppelkurve der axialen Regelfläche von  $l$ .

Letztere Erörterungen zusammenfassend, gelangen wir zu dem Schluss, dass der Punkt  $D$  der Doppelkurve, welcher sich in der Ebene

$$\lambda_1 (x_1 - a_1 x_3 - b_1' x_4) + \lambda_2 (x_2 - a_2 x_3 - b_2' x_4) = 0 \quad (20)$$

befindet, bestimmt ist durch

$$x_1 = \frac{p_1 + q_1}{p_1 q_1} x_4, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

$$x_2 = \frac{p_2 + q_2}{p_2 q_2} x_4, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

$$x_3 = \frac{1}{p_1 q_1} x_4 = \frac{1}{p_2 q_2} x_4, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

wofern  $p_1, p_2, q_1$  und  $q_2$  die Gleichungen

$$\lambda_1 (p_1 - a_1) + \lambda_2 (p_2 - a_2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

$$\lambda_1 (q_1 - a_1) + \lambda_2 (q_2 - a_2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

befriedigen.

Der zweiten der Gleichungen (21) bez. (22) wird schon deshalb Genüge geleistet, weil (20) erfüllt ist.

Um die Doppelkurve aufzufinden, müssen wir  $p_1, p_2, q_1$  und  $q_2$  aus den Gleichungen (21), (22), (23), (24), (25) und (26) eliminieren; wir erhalten dann zwei Gleichungen in  $\lambda_1: \lambda_2$ ; eliminieren wir ferner  $\lambda_1: \lambda_2$  aus diesen und aus der Gleichung (20), so bekommen wir zwei Gleichungen, in welchen neben den Constanten  $a_1, a_2, b'_1, b'_2$  nur die Coordinaten auftreten; sie stellen mithin Flächen dar, welche die Doppelkurve enthalten.

Bevor wir dieses Verfahren erledigen, wollen wir zunächst die Anzahl der Schnittpunkte von  $l$  mit der Doppelkurve feststellen.

Wenn der Punkt  $D$  auf  $l$  liegt, so schneiden die Strahlen  $p$  und  $q$ , welche nun  $l$  in demselben Punkte schneiden und mit  $l$  in einer Ebene liegen, die Ebene  $\omega_\infty$  in zwei Punkten  $P$  und  $Q$ , welche mit der Spur  $A$  von  $l$  in einer Geraden liegen.

Die Strahlen, welche den Punkt  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  gemein haben, treffen  $\omega_\infty$  in Punkten, deren Coordinaten  $p_1, p_2$  zu bestimmen sind aus

$$\begin{aligned} x_3 p_1^2 - x_1 p_1 + x_4 &= 0, \\ x_3 p_2^2 - x_2 p_2 + x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Zuerst formen wir das Coordinatentetraeder so um, dass die Kante, welche mit  $X_3 X_4$  zusammenfiel, jetzt mit  $l$  coincidirt; und zwar mittels der Formeln

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 + a_1 \xi_3 + b'_1 \xi_4, \\ x_2 &= \xi_2 + a_2 \xi_3 + b'_2 \xi_4, \\ x_3 &= \xi_3, \\ x_4 &= \xi_4. \end{aligned}$$

Weiter setzen wir dementsprechend für einen Punkt in  $\omega_\infty$

$$\frac{\xi_1}{\xi_3} = \pi_1, \quad \frac{\xi_2}{\xi_3} = \pi_2,$$

so dass



$$p_1 = \pi_1 + a_1, \quad p_2 = \pi_2 + a_2.$$

Obige Gleichungen gestalten sich nun wie folgt:

$$\begin{aligned} \xi_3 (\pi_1 + a_1)^2 - (\xi_1 + a_1 \xi_3 + b_1' \xi_4) (\pi_1 + a_1) + \xi_4 &= 0, \\ \xi_3 (\pi_2 + a_2)^2 - (\xi_2 + a_2 \xi_3 + b_2' \xi_4) (\pi_2 + a_2) + \xi_4 &= 0, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \xi_3 \pi_1^2 + (-\xi_1 + a_1 \xi_3 - b_1' \xi_4) \pi_1 + \{-a_1 \xi_1 + (1 - a_1 b_1') \xi_4\} &= 0, \\ \xi_3 \pi_2^2 + (-\xi_2 + a_2 \xi_3 - b_2' \xi_4) \pi_2 + \{-a_2 \xi_2 + (1 - a_2 b_2') \xi_4\} &= 0. \end{aligned}$$

Der Punkt, wo die Strahlen zusammentreffen wird auf  $l(\xi_1 = 0, \xi_2 = 0)$  liegen, wenn den Bedingungen

$$\xi_3 \pi_1^2 + (a_1 \xi_3 - b_1' \xi_4) \pi_1 + (1 - a_1 b_1') \xi_4 = 0 \quad . \quad (27)$$

$$\xi_3 \pi_2^2 + (a_2 \xi_3 - b_2' \xi_4) \pi_2 + (1 - a_2 b_2') \xi_4 = 0 \quad . \quad (28)$$

genügt wird.

Es seien  $c_1$  und  $c_1'$  die Wurzel von (27),  $c_2$  und  $c_2'$  diejenigen von (28).

Zwei der vier durch (27) und (28) gegebenen Punkte werden mit dem Punkte  $A$  (wofür  $\pi_1 = 0, \pi_2 = 0$ ) in einer Gerade liegen, wenn man hat

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{c_1'}{c_2'}.$$

oder

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{c_1'}{c_2'}.$$

Beide Bedingungen werden zusammengefasst in der Gleichung

$$(c_1 c_2' - c_1' c_2) (c_1 c_2 - c_1' c_2') = 0,$$

oder

$$c_1^2 c_2 c_2' - c_1 c_1' c_2'^2 - c_1 c_1' c_2^2 + c_1'^2 c_2 c_2' = 0,$$

oder

$$(c_1^2 + c_1'^2) c_2 c_2' - c_1 c_1' (c_2^2 + c_2'^2) = 0.$$

oder endlich

$$(c_1 + c_1')^2 c_2 c_2' - c_1 c_1' (c_2 + c_2')^2 = 0.$$

Die Beziehungen

$$c_1 + c_1' = -\frac{a_1 \xi_3 - b_1' \xi_4}{\xi_3}, \quad c_1 c_1' = \frac{(1 - a_1 b_1') \xi_4}{\xi_3},$$

$$c_2 + c_2' = -\frac{a_2 \xi_3 - b_2' \xi_4}{\xi_3}, \quad c_2 c_2' = \frac{(1 - a_2 b_2') \xi_4}{\xi_3},$$

bringen diese Gleichung in die Form

$$(a_1 \xi_3 - b_1' \xi_4)^2 (1 - a_1 b_1') \xi_4 - (a_2 \xi_3 - b_2' \xi_4)^2 (1 - a_2 b_2') \xi_4 = 0.$$

Wir finden also drei Werte für  $\xi_3 : \xi_4 = x_3 : x_4$ , welche die Ebenen bestimmen, welche die gesuchten auf  $l$  liegenden Punkte enthalten.

Es ist  $\xi_4 = 0$ , oder  $\omega_x$ , eine dieser Ebenen; sie giebt den Punkt  $A$ . Dieser Punkt ist kein Punkt der Doppelkurve, zeigt sich aber hier, weil die Strahlen  $X_1 A$ ,  $X_2 A$  und  $X_3 A$  alle ihren Schnittpunkt mit  $\omega_\infty$  in  $A$  haben.

Die wirklichen Schnittpunkte von  $l$  mit der Doppelkurve befinden sich demnach in *zwei* Ebenen durch  $X_1 X_2$ , welche bestimmt sind durch

$$(1 - a_1 b_1') (a_1 \xi_3 - b_1' \xi_4)^2 - (1 - a_2 b_2') (a_2 \xi_3 - b_2' \xi_4)^2 = 0 \quad (29)$$

oder

$$(a_1 \xi_3 - b_1' \xi_4) \sqrt{1 - a_1 b_1'} = \pm (a_2 \xi_3 - b_2' \xi_4) \sqrt{1 - a_2 b_2'}. \quad (30)$$

Es liegen also auf  $l$  *zwei* Punkte der Doppelkurve. Diese is somit vom *dritten* Grade.

Jetzt wollen wir die Doppelkurve analytisch bestimmen, indem wir das auf S. 44 entwickelte Programm ausführen.

Wir ziehen zunächst das zweite Coordinatensystem heran.

Die Ebene durch  $l$  wird jetzt dargestellt durch

$$\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

der Schnittpunkt von  $p$  und  $q$  durch

$$\frac{\xi_1}{\xi_4} = \frac{x_1 - a_1 x_3 - b_1' x_4}{x_4} = \frac{(p_1 + q_1) - a_1 - b_1' p_1 q_1}{p_1 q_1},$$

also durch

$$\xi_1 = \frac{(p_1 + q_1) - a_1 - b_1' p_1 q_1}{p_1 q_1} \xi_4. \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

$$\xi_2 = \frac{(p_2 + q_2) - a_2 - b_2' p_2 q_2}{p_2 q_2} \xi_4. \quad (33)$$

$$\xi_3 = \frac{1}{p_1 q_1} \xi_4 = \frac{1}{p_2 q_2} \xi_4. \quad (34)$$

Aus den Gleichungen (21) und (22) ergibt sich durch Addition

$$\lambda_1 (p_1 + q_1) - 2 \lambda_1 a_1 + \lambda_2 (p_2 + q_2) - 2 \lambda_2 a_2 = 0$$

oder

$$\lambda_1 (p_1 + q_1) + \lambda_2 (p_2 + q_2) = 2 (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2). \quad (35)$$

Durch Multiplikation findet man alsdann

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 p_1 q_1 - \lambda_1^2 a_1 (p_1 + q_1) + \lambda_1^2 a_1^2 &= \lambda_2^2 p_2 q_2 - \\ &- \lambda_2^2 a_2 (p_2 + q_2) + \lambda_2^2 a_2^2. \end{aligned} \quad (36)$$

Weil in allen diesen Gleichungen die Grössen  $p_1 + q_1, p_2 + q_2, p_1 q_1$  und  $p_2 q_2$  auftreten, setzen wir

$$\begin{aligned} p_1 + q_1 &= \varphi_1, \\ p_2 + q_2 &= \varphi_2 \end{aligned}$$

und

$$p_1 q_1 = p_2 q_2 = \frac{1}{\mu};$$

die Ebene welche den Schnittpunkt mit  $X_1 X_2$  verbindet erhält somit die Gleichung

$$x_3 = \mu x_4. \quad (37)$$

Die Gl. (32) bis (36) gestalten sich nun wie folgt

$$\xi_1 = (\mu \varphi_1 - a_1 \mu - b_1') \xi_4, \quad (38)$$

$$\xi_2 = (\mu \varphi_2 - a_2 \mu - b_2') \xi_4, \quad (39)$$

$$\xi_3 = \mu \xi_4, \quad (40)$$

$$\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 = 2 (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2), \quad (41)$$

$$\lambda_1^2 - \lambda_1^2 a_1 \mu \varphi_1 + \lambda_1^2 a_1^2 \mu = \lambda_2^2 - \lambda_2^2 a_2 \mu \varphi_2 + \lambda_2^2 a_2^2 \mu. \quad (42)$$

Das Eliminationsverfahren geht nun auf folgende Weise vor sich:  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  werden mittels (38) und (39) ausgedrückt in  $\mu$  und in

die Coordinaten; diese Ausdrücke für  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  werden in (41) und (42) substituiert; schliesslich wird  $\mu$  durch  $\xi_3 : \xi_4$  ersetzt.

Aus (38) und (39) folgt

$$\varphi_1 = \frac{\xi_1 + (a_1 \mu + b_1') \xi_4}{\mu \xi_4},$$

$$\varphi_2 = \frac{\xi_2 + (a_2 \mu + b_2') \xi_4}{\mu \xi_4}.$$

Durch Substitution dieser Werte für  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  in (41) erhalten wir

$$\lambda_1 \frac{\xi_1 + (a_1 \mu + b_1') \xi_4}{\mu \xi_4} + \lambda_2 \frac{\xi_2 + (a_2 \mu + b_2') \xi_4}{\mu \xi_4} = 2 (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2),$$

oder

$$[\lambda_1 (a_1 \mu - b_1') + \lambda_2 (a_2 \mu - b_2')] \xi_4 - (\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2) = 0,$$

oder vermöge (31)

$$\lambda_1 (a_1 \mu - b_1') + \lambda_2 (a_2 \mu - b_2') = 0,$$

und wegen (40)

$$\lambda_1 (a_1 \xi_3 - b_1' \xi_4) + \lambda_2 (a_2 \xi_3 - b_2' \xi_4) = 0 \quad . \quad . \quad (43)$$

Ersetzen wir in (42)  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  durch ihre Ausdrücke, so folgt

$$\begin{aligned} & \lambda_1^2 \xi_4 - \lambda_1^2 a_1 \{ \xi_1 + (a_1 \mu + b_1') \xi_4 \} + \lambda_1^2 a_1^2 \mu \xi_4 = \\ & = \lambda_2^2 \xi_4 - \lambda_2^2 a_2 \{ \xi_2 + (a_2 \mu + b_2') \xi_4 \} + \lambda_2^2 a_2^2 \mu \xi_4, \end{aligned}$$

oder

$$\lambda_1^2 \xi_4 - \lambda_1^2 a_1 b_1' \xi_4 - \lambda_1^2 a_1 \xi_1 = \lambda_2^2 \xi_4 - \lambda_2^2 a_2 b_2' \xi_4 - \lambda_2^2 a_2 \xi_2,$$

oder endlich

$$\lambda_1^2 \{ a_1 \xi_1 - (1 - a_1 b_1') \xi_4 \} = \lambda_2^2 \{ a_2 \xi_2 - (1 - a_2 b_2') \xi_4 \} \quad (44)$$

Elimination von  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  aus (31) und (44) ergibt schliesslich

$$\Phi \equiv \xi_2 (a_1 \xi_3 - b_1' \xi_4) - \xi_1 (a_2 \xi_3 - b_2' \xi_4) = 0, \quad . \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \Psi \equiv & \xi_2^2 \{ a_1 \xi_1 - (1 - a_1 b_1') \xi_4 \} - \\ & - \xi_1^2 \{ a_2 \xi_2 - (1 - a_2 b_2') \xi_4 \} = 0. \quad . \quad . \quad (46) \end{aligned}$$

Diese Gleichungen stellen zwei Flächen  $\Phi$  und  $\Psi$  dar, die sich in einem Gebilde schneiden, dem die Doppelkurve angehört.  $\Phi$  ist eine quadratische Fläche, welche die Gerade ( $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_2 = 0$ ), oder  $l$ , enthält,  $\Psi$  eine kubische Fläche, auf welcher  $l$  Doppelgerade ist. Die Schnittkurve von  $\Phi$  und  $\Psi$  enthält demnach die Gerade  $l$ , doppelt gezählt.

Jetzt werden wir zeigen, dass die Fläche  $\Psi$  mit einem zweiten kubischen Gebilde, das aus dem Hyperboloid  $\Phi$  und einer durch  $l$  hindurchgehenden Ebene besteht, einen Büschel bestimmt, welchem noch eine derartige zerfallende kubische Fläche angehört.

Zur besseren Übersicht der Rechnung ersetzen wir die Coordinatenebenen  $\xi_3 = 0$  und  $\xi_4 = 0$  durch zwei andere, gleichfalls durch  $X_1 X_2$  gelegte Ebenen  $\xi_5 = 0$  und  $\xi_6 = 0$ , für welche

$$\left. \begin{aligned} \xi_5 &= a_1 \xi_3 - b_1' \xi_4, \\ \xi_6 &= a_2 \xi_3 - b_2' \xi_4; \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

daher

$$\xi_4 = \frac{a_2 \xi_5 - a_1 \xi_6}{a_1 b_2' - a_2 b_1'}.$$

Die Gleichungen  $\Phi = 0$  und  $\Psi = 0$  bekommen nun diese Gestalt:

$$\Phi \equiv \xi_2 \xi_5 - \xi_1 \xi_6 = 0,$$

$$\begin{aligned} \Psi &\equiv (a_1 b_2' - a_2 b_1') \xi_1 \xi_2 (a_1 \xi_2 - a_2 \xi_1) + \\ &+ \{ (1 - a_2 b_2') \xi_1^2 - (1 - a_1 b_1') \xi_2^2 \} (a_2 \xi_5 - a_1 \xi_6) = 0. \end{aligned}$$

Beachten wir nun die Identität

$$\begin{aligned} (a_1 b_2 - a_2 b_1') \xi_1 \xi_2 (a_1 \xi_2 - a_2 \xi_1) &+ \{ (1 - a_2 b_2') \xi_1^2 - (1 - a_1 b_1') \xi_2^2 \} (a_2 \xi_5 - a_1 \xi_6) = \\ &\equiv \{ a_1 (1 - a_2 b_2') \xi_1 - a_2 (1 - a_1 b_1') \xi_2 \} (\xi_2 \xi_5 - \xi_1 \xi_6) + \\ &+ (a_2 \xi_1 - a_1 \xi_2) [ \xi_1 \{ a_2 b_1' \xi_2 + (1 - a_2 b_2') \xi_5 \} - \xi_2 \{ a_1 b_2' \xi_1 + (1 - a_1 b_1') \xi_6 \} ], \end{aligned}$$

und setzen wir, der Kürze halber,

$$a_1 (1 - a_2 b_2') \xi_1 - a_2 (1 - a_1 b_1') \xi_2 = V,$$

$$a_2 \xi_1 - a_1 \xi_2 = W,$$

$$\xi_1 \{ a_2 b_1' \xi_2 + (1 - a_2 b_2') \xi_5 \} - \xi_2 \{ a_1 b_2' \xi_1 + (1 - a_1 b_1') \xi_6 \} = \Omega,$$

so lässt sich diese Identität darstellen in der Form

$$\Psi \equiv V\Phi + W\Omega.$$

Die beiden quadratischen Flächen  $\Phi$  und  $\Omega$  haben, ausser  $l$

( $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_2 = 0$ ), eine kubische Raumkurve gemein, welche, vermöge obiger Identität, auch dem Durchschnitt von  $\Psi$  und  $\Phi$  angehört.

Wir schliessen, dass die Doppelkurve der axialen Regelfläche von  $l = AB'$  der partielle Durchschnitt ist von

$$\Phi = \xi_2 \xi_5 - \xi_1 \xi_6 = 0$$

und

$$\Omega = \xi_1 (a_2 b_1' \xi_2 + (1 - a_2 b_2') \xi_5) - \xi_2 (a_1 b_2' \xi_1 + (1 - a_1 b_1') \xi_6) = 0,$$

oder, wenn wir  $\xi_5$  und  $\xi_6$  durch ihre in (47) gegebenen Ausdrücke ersetzen:

$$\Phi \equiv \xi_2 (a_1 \xi_3 - b_1' \xi_4) - \xi_1 (a_2 \xi_3 - b_2' \xi_4) = 0, \quad . \quad . \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \Omega \equiv & - (a_1 b_2' - a_2 b_1') \xi_1 \xi_2 + (1 - a_2 b_2') (a_1 \xi_3 - b_1' \xi_4) \xi_1 - \\ & - (1 - a_1 b_1') (a_2 \xi_3 - b_2' \xi_4) \xi_2 = 0, \quad . \quad . \quad (49) \end{aligned}$$

Es ist sofort klar, dass die Doppelkurve die Ebene  $\omega_\infty$ , oder  $\xi_4 = 0$ , in den Punkten schneidet, welche bestimmt sind durch

$$\begin{aligned} & (a_1 \xi_2 - a_2 \xi_1) \xi_3 = 0, \\ & - (a_1 b_2' - a_2 b_1') \xi_1 \xi_2 + \{ a_1 (1 - a_2 b_2') \xi_1 - a_2 (1 - a_1 b_1') \xi_2 \} \xi_3 = 0. \end{aligned}$$

Es sind dies die Punkte  $X_1$  und  $X_2$  und der Punkt, welcher ausser  $A$ , den Gleichungen

$$\begin{aligned} & a_1 \xi_2 - a_2 \xi_1 = 0, \\ & - (a_1 b_2' - a_2 b_1') \xi_1 \xi_2 + \{ a_1 (1 - a_2 b_2') \xi_1 - a_2 (1 - a_1 b_1') \xi_2 \} \xi_3 = 0, \end{aligned}$$

also den Gleichungen

$$\begin{aligned} & a_1 \xi_2 - a_2 \xi_1 = 0, \\ & - (a_1 b_2' - a_2 b_1') a_2 \xi_1 + \{ a_1^2 (1 - a_2 b_2') - a_2^2 (1 - a_1 b_1') \} \xi_3 = 0 \end{aligned}$$

genügt.

Dieser Punkt ist kein anderer als der Schnitt von  $AX_3$  ( $a_1 \xi_2 - a_2 \xi_1 = 0$ ) mit der kubischen Kurve in  $\omega_\infty$ , welche der Spur der axialen Regelfläche angehört.

Es ist nun von Wichtigkeit, dass die Doppelkurve durch die Punkte  $X_1$  und  $X_2$  hindurchgeht und dass sie die Gerade  $l$  in zwei Punkten schneidet.

Aus dieser letzteren Tatsache geht hervor, dass die Gerade  $l$

zweimal mit zwei Congruenzstrahlen zu einem Strahlenbüschel gehört; wonach der *Axengrad (Rang) der Congruenz zwei ist*.

§ 6. Die axiale Regelfläche einer Gerade  $l$ , welche  $X_3 X_4$  schneidet.

Wenn die Gerade  $l$  die Gerade  $X_3 X_4$  schneidet, so gilt für die Coordinaten der Spuren  $A$  und  $B'$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2'}{b_1'} = t,$$

sodass

$$a_1 b_2' - a_2 b_1' = 0.$$

In der Gleichung (18) der axialen Regelfläche sind nun  $\beta_3, \beta_2, \beta_1$  und  $\beta_0$  durch die folgenden Ausdrücke zu ersetzen (siehe Gl. (11) und (16)):

$$\begin{aligned}\beta_3 &= b_1'(tx_1 - x_2), \\ \beta_2 &= -x_1 + a_1 x_3 + b_1' x_4 \\ \beta_1 &= x_2 - ta_1 x_3 - tb_1' x_4, \\ \beta_0 &= a_1(tx_1 - x_2).\end{aligned}$$

Die Gleichung (18) nimmt somit diese Form an:

$$\left| \begin{array}{cccc} b_1'(tx_1 - x_2) & , -(x_1 - a_1 x_3 - b_1' x_4) & , +(x_2 - ta_1 x_3 - tb_1' x_4) & , 0 \\ b_1'(tx_1 - x_2)x_1 + & -(x_1 - a_1 x_3 - b_1' x_4)x_1 & , -b_1'(tx_1 - x_2)x_1 & , +(x_1 - a_1 x_3 - b_1' x_4) \\ +(x_2 - ta_1 x_3 - tb_1' x_4)x_3, & & & \\ b_1'(tx_1 - x_2)x_2 - & -b_1'(tx_1 - x_2)x_4 & , +(x_2 - ta_1 x_3 - tb_1' x_4)x_2, & -(x_2 - ta_1 x_3 - tb_1' x_4) \\ -(x_1 - a_1 x_3 - b_1' x_4)x_3, & & & \\ 0 & , -(x_2 - ta_1 x_3 - tb_1' x_4)x_4, & +(x_1 - a_1 x_3 - tb_1' x_4)x_4, & -a_1(tx_1 - x_2) \end{array} \right| = 0. \quad (50)$$

Die kubische Kurve in  $\omega_\infty$  bekommt nun die Gleichung (siehe (19))

$$b_1'(tx_1 - x_2)x_1 x_2 - (x_1^2 - x_2^2)x_3 + a_1(x_1 - tx_2)x_3^2 = 0.$$

Die Tangente im Punkte  $X_3$  bestimmt sich aus

$$x_1 - tx_2 = 0$$

oder

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{t}.$$

Sie ist die axiale Projektion aus  $X_3$   $X_4$  des Bildes der Geraden  $AX_3$

$$x_2 = tx_1$$

auf die Ebene  $\omega_\infty$ .

Die Schnittpunkte der Doppelkurve mit  $l$  sind nun angewiesen durch (siehe (29))

$$(1 - a_1 b_1') (a_1 \xi_3 - b_1' \xi_4)^2 - (1 - t^2 a_1 b_1') t^2 (a_1 \xi_3 - b_1' \xi_4)^2 = 0,$$

also durch

$$(a_1 \xi_3 - b_1' \xi_4)^2 = 0.$$

Die Doppelkurve schneidet die Gerade  $l$  *zweifach* im Punkte

$$\left. \begin{array}{l} \xi_1 = 0, \\ \xi_2 = 0, \\ a_1 \xi_3 - b_1' \xi_4 = 0. \end{array} \right\} . . . . . (52)$$

Dieser Punkt ist in Bezug auf  $X_3$  und  $X_4$  dem Punkte

$$\left. \begin{array}{l} \xi_1 = 0, \\ \xi_2 = 0, \\ a_1 \xi_3 + b_1' \xi_4 = 0, \end{array} \right\}$$

wo die Gerade  $l$  die Gerade  $X_3$   $X_4$  schneidet, harmonisch zugeordnet.

Die Doppelkurve wird nun bestimmt aus den Gleichungen (45) und (46), weil die Gleichung (49) entstanden ist nach Multiplikation mit dem hier verschwindenden Faktor  $a_1 b_2' - a_2 b_1'$ .

Ersetzen wir in (45) und (46)  $a_2$  durch  $ta_1$  und  $b_2'$  durch  $tb_1'$ , so erhalten wir

$$\Phi \equiv (\xi_2 - t\xi_1) (a_1 \xi_3 - b_1' \xi_4) = 0, . . . (53)$$

$$\Psi \equiv \xi_2^2 \{a_1 \xi_1 - (1 - a_1 b_1') \xi_4\} - \xi_1^2 \{ta_1 \xi_2 - (1 - t^2 a_1 b_1') \xi_4\} = 0. (54)$$

Die Ebene  $\xi_2 - t\xi_1 = 0$  schneidet den kubischen Kegel  $\Psi = 0$  zweimal in  $l$  ( $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_2 = 0$ ) und einmal in der Geraden  $X_3$   $A$  ( $\xi_2 - t\xi_1 = 0$ ,  $\xi_4 = 0$ ).

Die Ebene

$$a_1 \xi_3 - b_1' \xi_4 = 0$$

hingegen schneidet den Kegel  $\Psi = 0$  in einer kubischen Plankurve, welche also in diesem Falle die Doppelkurve bildet.

Der Kegel  $\Psi = 0$ , dessen Spitze  $\Xi_3 \equiv A$  ist, geht durch die Punkte  $X_1$  und  $X_2$  und enthält die Gerade  $l$  als Doppelkante.



Die kubische Plankurve ist demnach circular und hat einen *Doppelpunkt* auf  $l$ . Letzteres entspricht dem soeben erhaltenen Resultat, nach dem die beiden Schnittpunkte der Doppelkurve mit  $l$  zusammengefallen sind.

§ 7. Die axiale Regelfläche einer Gerade  $l_\mu$ , welche  $X_1 X_2$  schneidet.

Die Gerade  $l_\mu$ , welche in der durch  $X_1 X_2$  gelegten Ebene  $\omega_\mu (x_3 = \mu x_4)$  liegt, wird dargestellt durch

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0,$$

$$x_3 = \mu x_4.$$

Trotz der unendlich grossen Werte von  $a_1, a_2, b_1'$  und  $b_2'$  können diese Grössen doch verwendet werden, wenn wir nur, in Übereinstimmung mit dem in I. Abschnitte Dargelegten, setzen

$$a_1 = + \frac{x_2 a_0}{\delta},$$

$$a_2 = - \frac{\alpha_1 \alpha_0}{\delta},$$

$$b_1' = - \frac{\mu x_2 \alpha_0}{\delta},$$

$$b_2' = + \frac{\mu \alpha_1 \alpha_0}{\delta},$$

$$\Delta = a_1 b_2' - a_2 b_1' = - \frac{(\mu \alpha_3 + \alpha_4) \alpha_0}{\delta},$$

wo

$$\alpha_0 = \frac{\mu \alpha_3 + \alpha_4}{2 \alpha_1 \alpha_2}.$$

Die Ausdrücke  $\beta_3, \beta_2, \beta_1$  und  $\beta_0$ , welche in der Gleichung (18) der axialen Regelfläche auftreten, bekommen jetzt die folgende Gestalt (siehe (11) und (16)):

$$\beta_3 = \frac{\mu (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + (\mu \alpha_3 + \alpha_4) x_3}{\delta} \alpha_0,$$

$$\beta_2 = \frac{-\delta x_1 + \alpha_2 (x_3 - \mu x_4) \alpha_0}{\delta},$$

$$\beta_1 = \frac{\delta x_2 + \alpha_1 (x_3 - \mu x_4) \alpha_0}{\delta},$$

$$\beta_0 = - \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + (\mu \alpha_3 + \alpha_4) x_4}{\mathfrak{J}} a_0.$$

Ersetzt man  $\beta_3, \beta_2, \beta_1$  und  $\beta_0$  in der Gleichung (18) durch diese Ausdrücke, und setzt man, nach Beseitigung der Nenner,  $\mathfrak{J} = 0$ , so findet man die Gleichung der axialen Regelfläche.

Die kubische Kurve in  $\omega_\infty$  wird dargestellt durch (siehe (19))

$$\left. \begin{aligned} \frac{\mu(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) a_0 x_1 x_2}{\mathfrak{J}} - \frac{(x_1^2 - x_2^2) x_3 \mathfrak{J}}{\mathfrak{J}} + \frac{(\mu \alpha_3 + \alpha_4) a_0 x_1 x_2 x_3}{\mathfrak{J}} + \\ + \frac{(\alpha_2 x_1 + \alpha_1 x_2) a_0 x_3^2}{\mathfrak{J}} = 0, \end{aligned} \right\} x_4 = 0,$$

oder

$$\left. \begin{aligned} \{ \mu(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) + \alpha_4 x_3 \} x_1 x_2 + (\alpha_2 x_1 + \alpha_1 x_2) x_3^2 = 0, \\ x_4 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Diese Kurve schneidet  $X_1 X_2$  ( $x_3 = 0, x_4 = 0$ ) im Schnittpunkte  $L_\mu$  von  $l_\mu$  mit  $X_1 X_2$  und in den Punkten  $X_1$  und  $X_2$ .

Die Gerade

$$\left. \begin{aligned} \mu(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) + \alpha_4 x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{aligned} \right\}$$

hat in  $L_\mu$  mit der Kurve zwei zusammenfallende Punkte gemeinsam, sie ist also die Tangente in  $L_\mu$ . Diese Tangente ist offenbar die Projektion von  $l_\mu$  aus  $X_4$  auf  $\omega_\infty$ .

Die Tangenten in  $X_1$  und  $X_2$  schneiden sich hier in  $X_3$ . Bei dieser Gerade  $l_\mu$  haben wir, wo es sich um die Doppelkurve handelt, einen anderen Weg als im allgemeinen Falle gefolgt einzuschlagen. Wir haben ja damals mit den Coordinaten  $a_1$  und  $a_2$  der Spur von  $l$  mit  $\omega_\infty$  operirt, welche nun beide unendlich sind. Die betreffenden Rechnungen sind sonach hinfällig geworden. Wir werden deshalb, mit Beibehaltung der Methode, die Rechnungen so abändern, dass wir mit den Grössen  $a_1, a_2, b_1'$  und  $b_2'$  nichts mehr zu schaffen haben.

Eine Ebene durch  $l_\mu$  wird dargestellt durch

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4) + \lambda(x_3 - \mu x_4) = 0. \quad (56)$$

Der Congruenzstrahl  $p$  wird dieser Ebene angehören, wenn man hat

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 + \lambda &= 0, \\ \frac{\alpha_1}{p_1} + \frac{\alpha_2}{p_2} + \alpha_4 - \mu \lambda &= 0. \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

Der Strahl  $q$  wird in derselben Ebene liegen, falls

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 + \lambda &= 0, \\ \frac{\alpha_1}{q_1} + \frac{\alpha_2}{q_2} + \alpha_4 - \mu \lambda &= 0. \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

Der Schnittpunkt von  $p$  und  $q$  ist also bestimmt durch die Gleichungen (24), (25) und (26).

Es ist nun unsere Aufgabe die Grössen  $p_1, p_2, q_1, q_2$  und  $\lambda$  zu eliminiren aus dem System

$$\frac{x_1}{x_4} = \frac{p_1 + q_1}{p_1 q_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

$$\frac{x_2}{x_4} = \frac{p_2 + q_2}{p_2 q_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

$$\frac{x_3}{x_4} = \frac{1}{p_1 q_1} = \frac{1}{p_2 q_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 + \lambda = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

$$\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 + \lambda = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + \lambda (x_3 - \mu x_4) = 0 \quad . \quad . \quad (56)$$

Die zwei Gleichungen, die wir nach der Elimination übrig behalten, bestimmen dann zusammen die Doppelkurve.

Addiren wir die Gleichungen (57) und (58), so finden wir

$$\alpha_1 (p_1 + q_1) + \alpha_2 (p_2 + q_2) + 2(\alpha_3 + \lambda) = 0 \quad . \quad . \quad (59)$$

Bringen wir die Glieder mit  $p_1$  und  $q_1$  nach der anderen Seite, so erhalten wir nach Multiplikation

$$\alpha_1^2 p_1 q_1 = \alpha_2^2 p_2 q_2 + \alpha_3 (\alpha_3 + \lambda) (p_2 + q_2) + (\alpha_3 + \lambda)^2 \quad (60)$$

Dividiren wir die Gleichungen (59) und (60) durch  $p_1 q_1 = p_2 q_2$ , so bekommen sie die Form

$$\alpha_1 \frac{p_1 + q_1}{p_1 q_1} + \alpha_2 \frac{p_2 + q_2}{p_2 q_2} + \frac{2(\alpha_3 + \lambda)}{p_1 q_1} = 0,$$

$$(\alpha_2^2 - \alpha_1^2) + \alpha_2(\alpha_3 + \lambda) \frac{p_2 + q_2}{p_2 q_2} + \frac{(\alpha_3 + \lambda)^2}{p_1 q_1} = 0.$$

Mit Verwendung der Gleichungen (24), (25) und (26) finden wir

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + 2(\alpha_3 + \lambda) x_3 &= 0 \quad . \quad . \quad . \quad (61) \\ (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) x_4 + \alpha_2(\alpha_3 + \lambda) x_2 + (\alpha_3 + \lambda)^2 x_3 &= 0; \end{aligned}$$

letztere Gleichung schreibt sich, vermöge (61), auch also:

$$(\alpha_2^2 - \alpha_1^2) x_4 + (\alpha_3 + \lambda) \alpha_2 x_2 - \frac{\alpha_3 + \lambda}{2} (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = 0$$

oder

$$(\alpha_3 + \lambda) (\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2) + 2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) x_4 = 0. \quad . \quad . \quad (62)$$

Durch Elimination von  $\lambda$  aus (56), (61) und (62) ergibt sich schliesslich

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + 2\alpha_3 x_3)(x_3 - \mu x_4) - 2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4)x_3 = 0$$

oder

$$\Phi_\mu = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)(x_3 + \mu x_4) + 2(\mu \alpha_3 + \alpha_4)x_3 x_4 = 0 \quad (63)$$

und

$$\begin{aligned} [\alpha_3(\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2) + 2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)x_4](x_3 - \mu x_4) - \\ - (\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2)(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4) = 0 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \Omega_\mu = (\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2)[\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + (\mu \alpha_3 + \alpha_4)x_4] - \\ - 2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)(x_3 - \mu x_4)x_4 = 0. \quad (64) \end{aligned}$$

Die Gleichungen (63) und (64) vertreten nun die quadratischen Flächen  $\Phi_\mu$  und  $\Omega_\mu$ , deren Durchschnitt die Doppelkurve enthält.

Weil die Gerade

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 &= 0, \\ x_4 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

oder die Gerade  $X_3 L_\mu$  auf den beiden Flächen liegt und keine Doppellinie ist, ist sie von dem Durchschnitt abzutrennen. Die Restkurve ist ein Kegelschnitt, welcher  $l_\mu$  schneidet; er ist ein Teil der Doppelkurve.

Die Ebene dieses Kegelschnittes bildet mit der Ebene durch  $l_\mu$  und  $X_3$   $L_\mu$  [d. h. mit der Ebene  $(l_\mu, X_3)$ , deren Gleichung  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + (\mu\alpha_3 + \alpha_4) x_4 = 0$  lautet] ein Element des Büschels quadratischer Flächen, welches durch  $\Phi_\mu$  und  $\Omega_\mu$  bestimmt wird.

Es gilt nun die folgende Identität:

$$\begin{aligned} & 2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) [(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)(x_3 + \mu x_4) + 2(\mu\alpha_3 + \alpha_4)x_3 x_4] + \\ & + (\mu\alpha_3 + \alpha_4) [(\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2)(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + (\mu\alpha_3 + \alpha_4)x_4) - \\ & - 2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)(x_3 - \mu x_4)x_4] \equiv \\ & \equiv [\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + (\mu\alpha_3 + \alpha_4)x_4] \cdot [(\mu\alpha_3 + \alpha_4)(\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2) + \\ & + 2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)(x_3 + \mu x_4)]. \end{aligned}$$

Setzen wir

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + (\mu\alpha_3 + \alpha_4)x_4 = V_\mu,$$

$$(\mu\alpha_3 + \alpha_4)(\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2) + 2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)(x_3 + \mu x_4) = W_\mu$$

so gestaltet sich die Identität wie folgt

$$2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)\Phi_\mu + (\mu\alpha_3 + \alpha_4)\Omega_\mu = V_\mu \cdot W_\mu.$$

Die Ebene  $V_\mu$  verbindet  $l_\mu$  mit  $X_3$ ; die Ebene  $W_\mu$  enthält daher den Doppelkegelschnitt, welcher also dargestellt wird durch

$$\Phi_\mu = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)(x_3 + \mu x_4) + 2(\mu\alpha_3 + \alpha_4)x_3 x_4 = 0, \quad (63)$$

$$W_\mu = (\mu\alpha_3 + \alpha_4)(\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2) + 2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)(x_3 + \mu x_4) = 0. \quad (65)$$

Der Kegelschnitt geht offenbar *nicht* durch  $X_1$  und  $X_2$ .

Er schneidet  $l_\mu$  im Punkte

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\frac{(\mu\alpha_3 + \alpha_4)^2 + 4\mu(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)}{2\alpha_1(\mu\alpha_3 + \alpha_4)} x_4, \\ x_2 &= -\frac{(\mu\alpha_3 + \alpha_4)^2 + 4\mu(\alpha_2^2 - \alpha_1^2)}{2\alpha_2(\mu\alpha_3 + \alpha_4)} x_4, \\ x_3 &= \mu x_4, \end{aligned} \right\}$$

und  $X_1 X_2$  im Punkte

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 &= 0, \\ x_3 &= 0, \\ x_4 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

der im Bezug auf  $X_1$  und  $X_2$  dem Punkte  $L_\mu$  harmonisch zugeordnet ist.

Der Doppelkegelschnitt wird zur kubischen Doppelkurve vervollständigt durch die Gerade  $X_1 X_2$ , weil die Doppelkurve ja die Punkte  $X_1$  und  $X_2$  enthalten muss.

Dass  $X_1 X_2$  sich als Bestandteil der Doppelkurve herausstellt, ist auch daraus klar, weil jeder Punkt  $Y$  von  $X_1 X_2$  zwei Congruenzstrahlen  $YX_1$  und  $YX_2$  trägt, die beide mit  $X_1 X_2$  identisch sind und  $l_\mu$  schneiden.

Falls  $l_\mu$  überdies  $X_3 X_4$  schneidet, hat man

$$\mu \alpha_3 + \alpha_4 = 0,$$

sodass die Grössen  $\beta_3$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_1$  und  $\beta_0$  die folgenden Werte aufweisen:

$$\beta_3 = \frac{\mu (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) a_0}{\delta},$$

$$\beta_2 = \frac{(\alpha_2 x_3 - \mu \alpha_2 x_4) a_0}{\delta},$$

$$\beta_1 = \frac{(\alpha_1 x_3 - \mu \alpha_1 x_4) a_0}{\delta},$$

$$\beta_0 = \frac{-(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) a_0}{\delta}.$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichung (18) bekommt man die Gleichung der axialen Regelfläche der Gerade  $l_\mu$ , welche  $X_3 X_4$  schneidet. Da die Gleichung sich zwar ein Wenig vereinfacht, jedoch vom selben Grade bleibt, werden wir sie nicht ausarbeiten.

Die kubische Kurve in  $\omega_\infty$  wird nun gegeben durch

$$\mu (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) x_1 x_2 + (\alpha_2 x_1 + \alpha_1 x_2) x_3^2 = 0. \quad (66)$$

Die Tangente in  $X_3$  ist bestimmt durch

$$\alpha_2 x_1 + \alpha_1 x_2 = 0;$$

sie ist die axiale Projektion aus  $X_3 X_4$  auf  $\omega_\infty$  von derjenigen Gerade in  $\omega_0$ , welche das Bild der Gerade  $X_3 L_\mu$  ist.

Die Tangenten in den Schnittpunkten  $L_\mu$ ,  $X_1$  und  $X_2$  mit der Gerade  $X_1 X_2$  convergiren alle nach  $X_3$ .

Der Doppelkegelschnitt der axialen Regelfläche würde nunmehr bestimmt sein durch (siehe (63) und (65))

$$\begin{aligned}\Phi_{\mu}' &\equiv (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x) (x_3 + \mu x_4) = 0, \\ W_{\mu}' &\equiv x_3 + \mu x_4 = 0.\end{aligned}$$

Weil hier aber  $\Phi_{\mu}'$  die Ebene  $W_{\mu}'$  enthält, ist diese Combination unzulässig. Die Kurve ist jedoch ebenso gut bestimmt durch (siehe (64))

$$\Omega_{\mu}' \equiv \alpha_1^2 x_1^2 - \alpha_2^2 x_2^2 - 2 (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) (x_3 - \mu x_4) x_4 = 0, \quad (67)$$

$$W_{\mu}' \equiv x_3 + \mu x_4 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68)$$

Der Schnittpunkt mit der Gerade  $l_{\mu}$  ist der Punkt  $L_{\mu}$  auf  $X_1 X_2$ . Der zweite Schnittpunkt mit  $X_1 X_2$  ist wieder, in Bezug auf  $X_1$  und  $X_2$ , dem Punkte  $L_{\mu}$  harmonisch zugeordnet.

Im Vorgehenden haben wir die Fälle erörtert, wo die Gerade  $l$ , auf welcher die Congruenzstrahlen ruhen, entweder willkürlich ist, oder eine besondere Stellung einnimmt, aber nicht in einer singulären Ebene liegt. Der Grad der axialen Regelfläche war auch in allen diesen Fällen *sechs*.

#### § 8. Die axiale Regelfläche einer Gerade $l$ in $\varepsilon$ .

Wir werden jetzt die axiale Regelfläche einer Gerade  $l$  in  $\varepsilon$  betrachten.

So bald die Gerade  $l$  in  $\varepsilon$  liegt, ist die eine ihrer Gleichungen

$$x_1 - x_2 = 0;$$

für die Durchstossunkte  $A$  und  $B'$  gilt somit

$$a_1 = a_2 = a, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

$$b_1' = b_2' = b', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

Die Ausdrücke  $\beta_3, \beta_2, \beta_1, \beta_0$  gestalten sich nun in dieser Weise

$$\begin{aligned}\beta_3 &= b' (x_1 - x_2), \\ \beta_2 &= - (x_1 - ax_3 - b' x_4), \\ \beta_1 &= (x_2 - ax_3 - b' x_4), \\ \beta_0 &= a (x_1 - x_2).\end{aligned}$$

Die Gleichung (18) lautet demnach

$$\Delta' = \begin{vmatrix} b'(x_1 - x_2) & , & -(x_1 - ax_3 - b'x_4) & , & +(x_2 - ax_3 - b'x_4) & , & 0 \\ b'x_1(x_1 - x_2) + & & -x_1(x_1 - ax_3 - b'x_4) & , & -b'x_4(x_1 - x_2) & , & +(x_1 - ax_3 - b'x_4) \\ & & +x_3(x_2 - ax_3 - b'x_4) & , & & & \\ b'x_2(x_1 - x_2) - & & -b'x_4(x_1 - x_2) & , & +x_2(x_2 - ax_3 - b'x_4) & , & -(x_2 - ax_3 - b'x_4) \\ & & -x_3(x_1 - ax_3 - b'x_4) & , & & & \\ 0 & , & -x_4(x_2 - ax_3 - b'x_4) & , & +x_4(x_1 - ax_3 - b'x_4) & , & -a(x_1 - x_2) \end{vmatrix} = 0$$

Bezeichnen wir die vier Horizontalreihen mit  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  und  $R_4$ , so können wir die Determinante darstellen durch

$$\Delta' = \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{vmatrix},$$

oder auch durch

$$\Delta' = \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 - x_1 R_1 \\ R_3 - x_2 R_1 \\ R_4 - x_4 R_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2' \\ R_3' \\ R_4' \end{vmatrix}.$$

Nennen wir die vier Vertikalreihen dieser Determinante  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $K_4$ , sodass die Determinante sich schreiben lässt

$$\Delta' = |K_1, K_2, K_3, K_4|,$$

so ergibt eine zweite Umformung

$$\begin{aligned} \Delta' &= |K_1 - x_3 K_4, K_2, K_3 + K_2 + x_2 K_4, K_4| \\ &= |K_1', K_2, K_3' K_4|. \end{aligned}$$

Die Vertikalreihen  $K_1'$  und  $K_3'$  sind offenbar durch  $(x_1 - x_2)$  teilbar. Wir setzen deshalb

$$K_1' = (x_1 - x_2) K_1'', K_3' = (x_1 - x_2) K_3'',$$

mithin

$$\Delta' = (x_1 - x_2)^2 |K_1'', K_2, K_3'', K_4|.$$

Eine dritte Operation liefert

$$\begin{aligned} \Delta' &= (x_1 - x_2)^2 |K_1'', K_2 - x_1 K_3'', K_3'', K_4 + K_3''| \\ &= (x_1 - x_2)^2 |K_1'', K_2'', K_3'', K_4''|. \end{aligned}$$



Wir haben nun

$$K_1'' = \frac{K_1'}{x_1 - x_2} = \frac{K_1 - x_3 K_4}{x_1 - x_2}$$

$$\begin{aligned} K_2'' &= K_2 - x_1 K_3' = \frac{(x_1 - x_2) K_2 - x_1 K_3'}{x_1 - x_2} = \\ &= \frac{(x_1 - x_2) K_2 - x_1 (K_3 + K_2 + x_2 K_4)}{x_1 - x_2} = \frac{-x_2 K_2 - x_1 K_3 - x_1 x_2 K_4}{x_1 - x_2}, \end{aligned}$$

$$K_3'' = \frac{K_2 + K_3 + x_2 K_4}{x_1 - x_2},$$

$$K_4'' = K_4 + K_3'' = \frac{(x_1 - x_2) K_4 + (K_2 + K_3 + x_2 K_4)}{x_1 - x_2} = \frac{K_2 + K_3 + x_1 K_4}{x_1 - x_2}.$$

Die erste Umgestaltung giebt

$$\begin{vmatrix} b'(x_1 - x_2) & , -(x_1 - ax_3 - b'x_4) & , +(x_2 - ax_3 - b'x_4) & , & 0 \\ x_3(x_2 - ax_3 - b'x_4) & , & 0 & , -x_1x_2 + ax_1x_3 + b'x_2x_4, + (x_1 - ax_3 - b'x_4) \\ -x_3(x_1 - ax_3 - b'x_4), x_1x_2 - ax_2x_3 - b'x_1x_4, & & 0 & , -(x_2 - ax_3 - b'x_4) \\ -b'x_4(x_1 - x_2) & , x_4(x_1 - x_2) & , x_4(x_1 - x_2) & , -a(x_1 - x_2) \end{vmatrix} = 0$$

Es ist also

$$K_1' = \begin{cases} b'(x_1 - x_2) \\ x_3(x_2 - ax_3 - b'x_4) \\ -x_3(x_1 - ax_3 - b'x_4) \\ -b'x_4(x_1 - x_2) \end{cases} \text{ u. s. w.}$$

$$K_1'' = \frac{K_1 - x_3 K_4}{x_1 - x_2} = \frac{1}{x_1 - x_2} \begin{cases} b'(x_1 - x_2) \\ -x_3(x_1 - x_2) \\ -x_3(x_1 - x_2) \\ (ax_3 - b'x_4)(x_1 - x_2) \end{cases} = \begin{cases} b' \\ -x_3 \\ -x_3 \\ ax_3 - b'x_4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} K_2'' &= -\frac{x_2 K_2 + x_1 K_3 + x_1 x_2 K_4}{x_1 - x_2} = \\ &= \frac{-1}{x_1 - x_2} \begin{cases} (ax_3 + b'x_4)(x_1 - x_2) \\ ax_1x_3(x_1 - x_2) \\ ax_2x_3(x_1 - x_2) \\ (x_1x_4 + x_2x_4 - ax_1x_2)(x_1 - x_2) \end{cases} = -\begin{cases} ax_3 + b'x_4 \\ ax_1x_3 \\ ax_2x_3 \\ x_1x_4 + x_2x_4 - ax_1x_2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$K_3'' = \frac{K_2 + K_3 + x_2 K_4}{x_1 - x_2} =$$

$$= \frac{1}{x_1 - x_2} \begin{pmatrix} -(x_1 - x_2) \\ ax_3(x_1 - x_2) \\ (x_2 - b'x_4)(x_1 - x_2) \\ (-ax_2 + 2x_4)(x_1 - x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ ax_3 \\ x_2 - b'x_4 \\ -ax_2 + 2x_4 \end{pmatrix}$$

$$K_4'' = \frac{K_1 + K_3 + x_1 K_4}{x_1 - x_2} =$$

$$= \frac{1}{x_1 - x_2} \begin{pmatrix} -(x_1 - x_2) \\ (x_1 - b'x_4)(x_1 - x_2) \\ ax_3(x_1 - x_2) \\ (-ax_1 + 2x_4)(x_1 - x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ x_1 - b'x_4 \\ ax_3 \\ -ax_1 + 2x_4 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten daher schliesslich

$$\Delta' = -(x_1 - x_2)^2 \begin{vmatrix} b' & ,ax_3 + b'x_4 & , -1 & , -1 \\ -x_3 & ,ax_1x_3 & ,ax_3 & ,x_1 - b'x_4 \\ -x_3 & ,ax_2x_3 & ,x_2 - b'x_4 & ,ax_3 \\ ax_3 - b'x_4, x_1x_4 + x_2x_4 - ax_1x_2, -ax_2 + 2x_4, -ax_1 + 2x_4 \end{vmatrix} = 0. \quad (71)$$

Die axiale Regelfläche der in  $\varepsilon$  befindlichen Gerade  $l$  setzt sich demnach zusammen aus der doppelt zu zählenden Ebene  $\varepsilon$  und einer *biquadratischen* Fläche.

Die kubische Kurve in  $\omega_\infty$  wird jetzt dargestellt durch (siehe (19))

$$b'(x_1 - x_2)x_1x_2 - x_3(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + ax_3^2(x_1 - x_2) = 0,$$

und ist deshalb zerfallen in die Gerade

$$x_1 - x_2 = 0, \text{ oder } X_3E$$

und den Kegelschnitt  $\mathcal{V}_\infty$ :

$$b'x_1x_2 - (x_1 + x_2)x_3 + ax_3^2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

welcher durch  $X_1$  und  $X_2$ , aber *nicht* durch  $X_3$  hindurchgeht. Die Tangente in  $X_1$  ist angewiesen durch

$$b'x_2 - x_3 = 0,$$

oder

$$\frac{x_2}{x_3} = \frac{1}{b'};$$

sie ist also die Gerade, welche  $X_1$  mit dem Bilde  $B$  von  $B'$  verbindet.

Der Punkt  $B$  ist der Schnittpunkt der Tangenten in  $X_1$  und  $X_2$ , also der Pol von  $X_1 X_2$  in Bezug auf den Kegelschnitt  $\gamma_\infty$ .

Der Kegelschnitt  $\gamma_\infty$  begegnet  $X_2 X_3$  ( $x_1 = 0$ ) im Punkte  $X_1$  und in dem Punkte, wofür

$$x_2 = ax_3,$$

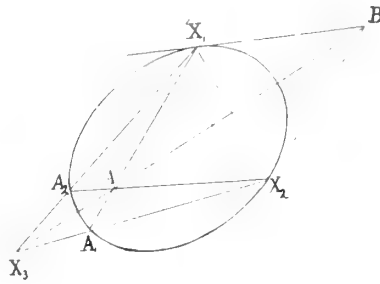


Fig. 2.

also in dem Punkte  $A_1$ , wo  $AX_1$  die Gerade  $X_2 X_3$  trifft.

In gleicher Weise zeigt man, das der Kegelschnitt  $\gamma_\infty$  und die Gerade  $X_2 X_3$  sich und die Gerade  $X_1 X_3$  in demselben Punkte  $A_2$  schneiden.

Es leuchtet ein, dass der Schnitt der biquadratischen Fläche mit  $\omega_\infty$  aus dem Kegelschnitte  $\gamma_\infty$  und den beiden Geraden  $X_1 A$  und  $X_2 A$  zusammengesetzt ist.

Der Schnitt in  $\omega_0$  ist selbstredend gleichartig beschaffen.

Die Doppelkurve ist jetzt bestimmt durch (siehe (45) und (46))

$$\Phi = \xi_2 (a\xi_3 - b' \xi_4) - \xi_1 (a\xi_3 - b' \xi_4) = -(\xi_1 - \xi_2) (a\xi_3 - b' \xi_4) = 0,$$

und

$$\begin{aligned} \Psi &= \xi_2^2 \{a\xi_1 - (1 - ab') \xi_4\} - \xi_1^2 \{a\xi_2 - (1 - ab') \xi_4\} = \\ &= -(\xi_1 - \xi_2) \{a\xi_1 \xi_2 - (1 - ab') (\xi_1 + \xi_2) \xi_4\} = 0. \end{aligned}$$

Sie besteht offenbar aus der Gerade

$$\xi_1 = \xi_2 = 0,$$

d.h.  $l$ , und dem Kegelschnitt

$$\left. \begin{aligned} a\xi_3 - b' \xi_4 &= 0, \\ a\xi_1 \xi_2 - (1 - ab') (\xi_1 + \xi_2) \xi_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

Dieser Kegelschnitt enthält  $X_1$  und  $X_2$ , und trifft  $l$  im Punkte  $C_\mu$ :

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= 0, \\ \xi_2 &= 0, \\ a\xi_3 - b' \xi_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

Er schneidet die Ebene  $\varepsilon$  im Punkte

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 = \xi_2 = \frac{2(1-ab')}{a} \xi_4, \\ a\xi_3 = b' \xi_4, \end{aligned} \right\}$$

oder

$$x_1 = x_2 = \xi_1 + a\xi_3 + b'\xi_4 = \frac{2}{a}\xi_4 - 2b'\xi_4 + b'\xi_4 + b'\xi_4 = \frac{2}{a}\xi_4,$$

oder endlich

$$x_1 = x_2 = \frac{2}{a}x_4 = \frac{2}{b'}x_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

Dies ist der Pol  $L$  der Gerade  $l$  ( $x_1 = x_2 = ax_3 + b'x_4$ ) im Bezug auf den Kegelschnitt  $e$  ( $x_1^2 = x_2^2 = 4x_3x_4$ ).

#### § 9. Die axiale Regelfläche eines Congruenzstrahles $s$ .

Die Gleichung dieser Fläche wird leichter auf direktem Wege als durch Umgestaltung der Gleichung (18)) abgeleitet.

Ein Strahl  $p$  schneidet einen Strahl  $s$ , wenn (siehe (23)) der Bedingung

$$p_1 s_1 = p_2 s_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

genügt wird.

So bald wir aus der Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= p_1 x_3 + \frac{1}{p_1} x_4 \\ x_2 &= p_2 x_3 + \frac{1}{p_2} x_4 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

und aus (76) die Grössen  $p_1$  und  $p_2$  eliminiren, sind wir schon im Besitz der Gleichung der zu untersuchenden Regelfläche.

Aus (1) folgt

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{x_1 \pm \sqrt{x_1^2 - 4x_3x_4}}{2x_3}, \\ p_2 &= \frac{x_2 \pm \sqrt{x_2^2 - 4x_3x_4}}{2x_3}. \end{aligned}$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke für  $p_1$  und  $p_2$  in (76) erhalten wir

$$s_1(x_1 \pm \sqrt{x_1^2 - 4x_3x_4}) = s_2(x_2 \pm \sqrt{x_2^2 - 4x_3x_4}),$$

oder

$$s_1x_1 - s_2x_2 = \mp s_1\sqrt{x_1^2 - 4x_3x_4} \pm s_2\sqrt{x_2^2 - 4x_3x_4},$$

also

$$s_1^2x_1^2 + s_2^2x_2^2 - 2s_1s_2x_1x_2 = s_1^2x_1^2 - 4s_1^2x_3x_4 + s_2^2x_2^2 - 4s_2^2x_3x_4 \pm 2s_1s_2\sqrt{(x_1^2 - 4x_3x_4)(x_2^2 - 4x_3x_4)},$$

oder

$$s_1s_2x_1x_2 - 2(s_1^2 + s_2^2)x_3x_4 = \pm s_1s_2\sqrt{(x_1^2 - 4x_3x_4)(x_2^2 - 4x_3x_4)},$$

daher

$$\begin{aligned} s_1^2s_2^2x_1^2x_2^2 - 4s_1s_2(s_1^2 + s_2^2)x_1x_2x_3x_4 + 4(s_1^2 + s_2^2)^2x_3^2x_4^2 = \\ = s_1^2s_2^2x_1^2x_2^2 - 4s_1^2s_2^2x_1^2x_3x_4 - 4s_1^2s_2^2x_2^2x_3x_4 + 16s_1^2s_2^2x_3^2x_4^2, \end{aligned}$$

oder, nach Division durch  $4x_3x_4$ ,

$$s_1s_2(s_1x_1 - s_2x_2)(s_2x_1 - s_1x_2) + (s_1^2 - s_2^2)^2x_3x_4 = 0. \quad (77)$$

Die axiale Regelfläche eines Congruenzstrahles ist somit vom zweiten Grade.

Die Fläche schneidet  $\omega_\infty$  in den Geraden

$$s_2x_1 - s_1x_2 = 0,$$

d.h.  $X_3S$ , und

$$s_1x_1 - s_2x_2 = 0,$$

oder der axialen Projektion aus  $X_3X_4$  auf  $\omega_\infty$  der Gerade  $X_4S$ .

#### § 10. Die axiale Regelfläche eines Congruenzstrahles in $\varepsilon$ .

Befindet sich der Strahl in  $\varepsilon$ , so ist  $s_1 = s_2$ ; mithin geht (77) über in

$$(x_1 - x_2)^2 = 0.$$

Das Hyperboloid ist demnach in die doppelt zu zählende Ebene  $\varepsilon$  ausgeartet.

#### § 11. Die axiale Regelfläche einer Gerade $m$ in $\omega_\infty$ .

Zum Schluss wollen wir noch die axiale Regelfläche einer Gerade  $m$  in  $\omega_\infty$  einer analytischen Untersuchung unterwerfen.

Eine Gerade  $m$  in  $\omega_\infty$  ist ein spezieller Fall einer Gerade  $l_\mu$ , welche  $X_1 X_2$  schneidet und in der Ebene  $\omega_\mu$  liegt. Es wird hier die Ebene dargestellt durch  $x_4 = 0$ , also ist

$$\mu = \infty.$$

Substituieren wir diesen Wert für  $\mu$  in die Gleichungen, welche die Grössen  $\beta_3, \beta_2, \beta_1$  und  $\beta_0$  bestimmen, so ergibt sich (siehe S. 58)

$$\beta_3 = (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) a_0',$$

$$\beta_2 = -\alpha_2 x_4 a_0',$$

$$\beta_1 = -\alpha_1 x_4 a_0',$$

$$\beta_0 = -\alpha_3 x_4 a_0',$$

wo

$$a_0' = \frac{\mu a_0}{\delta}.$$

Ersetzen wir in der Gleichung (18)  $\beta_3, \beta_2, \beta_1$  und  $\beta_0$  durch diese Ausdrücke so finden wir

$$\Delta' \equiv \begin{vmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 & , -\alpha_2 x_4 & , -\alpha_1 x_4 & , 0 \\ (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)x_1 - \alpha_1 x_3 x_4 & , -\alpha_2 x_1 x_4 & , -(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)x_4 & , \alpha_2 x_4 \\ (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)x_2 - \alpha_2 x_3 x_4 & , -(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)x_4 & , -\alpha_1 x_2 x_4 & , \alpha_1 x_4 \\ 0 & , +\alpha_1 x_4^2 & , +\alpha_2 x_4^2 & , \alpha_3 x_4 \end{vmatrix} = 0,$$

oder, nach Division durch  $x_4^3$ :

$$\Delta' \equiv x_4^3 \begin{vmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 & , \alpha_2 & , \alpha_1 & , 0 \\ x_1(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) - \alpha_1 x_3 x_4 & , \alpha_2 x_1 & , \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 & , \alpha_2 \\ x_2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) - \alpha_2 x_3 x_4 & , \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 & , \alpha_1 x_2 & , \alpha_1 \\ 0 & , -\alpha_1 x_4 & , -\alpha_2 x_4 & , \alpha_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Subtrahieren wir ferner  $x_1$  mal die erste Horizontalreihe von der zweiten, und  $x_2$  mal die erste von der dritten, so finden wir

$$\Delta' \equiv x_4^3 \begin{vmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 & , \alpha_2 & , \alpha_1 & , 0 \\ -\alpha_1 x_3 x_4 & , 0 & , \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 & , \alpha_2 \\ -\alpha_2 x_3 x_4 & , \alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3 & , 0 & , \alpha_1 \\ 0 & , -\alpha_1 x_4 & , -\alpha_2 x_4 & , \alpha_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (78)$$

Aus dieser Rechnung geht hervor, dass die axiale Regelfläche von  $m$  in  $\omega_\infty$  zerfallen ist in die dreifach zu zählende Ebene  $\omega_\infty$  und eine kubische Regelfläche.

Die Durchschnittskurve in  $\omega_\infty$  finden wir am leichtesten durch Substitution von  $x_4 = 0$  in die Gleichung (78), wobei wir selbstverständlich den Faktor  $x_4^3$  weglassen.

Die Substitution  $x_4 = 0$  liefert

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3, & \alpha_2 & , & \alpha_1 & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3, & \alpha_2 \\ 0 & , & \alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3, & 0 & , & \alpha_1 \\ 0 & , & 0 & , & 0 & , & \alpha_3 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) (\alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3) (\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) = 0.$$

Nennen wir  $M_1$  den Schnittpunkt von  $m$  mit  $X_2 X_3$ ,  $M_2$  denjenigen mit  $X_1 X_3$ ,  $M_3$  denjenigen mit  $X_1 X_2$ , so besteht die Schnittkurve mit  $\omega_\infty$  aus der Geraden  $m$  nebst den Geraden  $X_1 M_1$  und  $X_2 M_2$ .

Es sei  $G$  der Schnittpunkt von  $X_1 M_1$ , und  $X_2 M_2$ , welcher also bestimmt ist durch

$$\alpha_1 x_1 = \alpha_2 x_2 = -\alpha_3 x_3 \quad \dots (79)$$

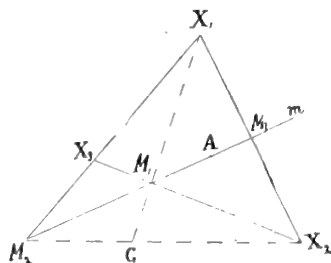


Fig. 3.

Die Schnittkurve mit  $\omega_0$  wird ermittelt durch Substitution von  $x_3 = 0$  in (78); man bekommt sodann

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, & \alpha_2 & , & \alpha_1 & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & \alpha_2 x_2 & , & \alpha_2 \\ 0 & , & \alpha_1 x_1 & , & 0 & , & \alpha_1 \\ 0 & , & -\alpha_1 x_4, & -\alpha_2 x_4, & \alpha_3 \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) (\alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_2 x_1 x_4 + \alpha_1 x_2 x_4) = 0.$$

Diese Kurve ist deshalb zusammengesetzt aus dem Bilde von  $X_3 M_3$  und dem Kegelschnitte  $\mu$ , welcher in  $\omega_0$  der Geraden  $m$  in  $\omega_\infty$  zugeordnet ist.

Es sei ferner  $H'$  der Schnittpunkt dieser beiden Linien.

Der Punkt  $H'$  wird nun bestimmt durch

$$\alpha_1 \alpha_3 x_1 = -\alpha_2 \alpha_3 x_2 = (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) x_4. \quad (80)$$

Die Doppelkurve der axialen Regelfläche

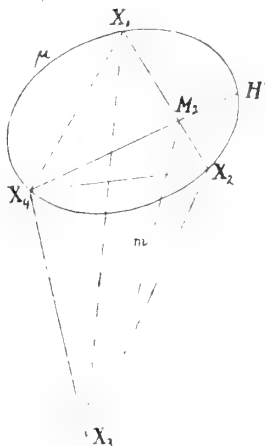


Fig. 4.

einer in  $\omega_\mu$  befindlichen Gerade  $l_\mu$ , bestand (siehe S. 56) aus der Gerade  $X_1 X_2$  und einem Kegelschnitte, welcher durch die Gleichungen (63) und (65) bestimmt ward.

Wenn wir  $\mu$  einen unendlich grossen Wert erteilen, so gehen diese Gleichungen über in

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + 2 \alpha_3 x_3) x_4 = 0,$$

$$\alpha_3 (\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2) + 2 (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) x_4 = 0.$$

Der Kegelschnitt ist infolge dessen zerfallen in eine Gerade der Ebene  $\omega_\infty$  und in die Gerade

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + 2 \alpha_3 x_3 = 0, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad (81)$$

$$\alpha_3 (\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2) + 2 (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) x_4 = 0. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad (82)$$

Diese Gerade ist also die Doppelgerade  $d_m$  der kubischen Regelfläche von  $m$ .

Wir können diese Gerade  $d_m$  auch durch die Gleichungen

$$x_1 = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1} x_3 + \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{\alpha_1 \alpha_3} x_4 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (83)$$

$$x_2 = -\frac{\alpha_3}{\alpha_2} x_3 - \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{\alpha_2 \alpha_3} x_4 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (84)$$

darstellen.

Aus dieser Form der Gleichungen ist es unmittelbar ersichtlich, dass die Gerade  $d_m$  sowohl den Punkt  $G$  wie den Punkt  $H'$  enthält.

Diejenigen Punkte von  $d_m$ , wo zwei unendlich benachbarte Erzeugenden (Congruenzstrahlen) zusammentreffen, sind die Zwickpunkte (Cuspidalpunkte). Dieselben liegen demnach auf der Fokalfäche.

Die Ebene, welche durch (83) dargestellt wird, verbindet  $d_m$  mit  $X_2$ ; sie schneidet deshalb den Fokalkegel  $F_2$ , (der durch die erste der Gleichungen (3) vertreten ist, in zwei Geraden durch  $X_2$ , welche wir  $n$  und  $n'$  nennen werden.

Eine kleine Rechnung ergibt, dass die Gerade  $n$  bestimmt ist durch

$$\frac{x_1}{-2 \alpha_3 (\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{x_3}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} = \frac{x_4}{\alpha_3^2},$$

und die Gerade  $n'$  durch

$$\frac{x_2}{-2 \alpha_3 (\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{x_3}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2} = \frac{x_4}{\alpha_3^2}.$$



Der Schnittpunkt  $K$  von  $n$  mit der durch die Gleichung (84) bestimmten Ebene ist gegeben durch

$$\frac{x_1}{-2\alpha_3(\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{x_2}{-2\alpha_3(\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{x_3}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} = \frac{x_4}{\alpha_3^2}. \quad (85)$$

Der Schnittpunkt  $K'$  von  $n'$  mit derselben Ebene ist bestimmt durch

$$\frac{x_1}{-2\alpha_3(\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{x_2}{+2\alpha_3(\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{x_3}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2} = \frac{x_4}{\alpha_3^2}. \quad (86)$$

Es zeigt sich also, dass der Punkt  $K$  in der Ebene  $\varepsilon$  ( $x_1 = x_2$ ) liegt und dass der Punkt  $K'$  sich in der Ebene  $\varepsilon'$  ( $x_2 = -x_1$ ) befindet.

Weil  $K$  sich sowohl auf  $F_2$  wie in  $\varepsilon$  befindet, liegt dieser Punkt auf dem Kegelschnitte  $e$  in  $\varepsilon$ , daher auch auf  $F_1$ . Der Punkt  $K'$  befindet sich auf dem Kegelschnitte  $e'$  in  $\varepsilon$ , somit auch auf  $F_1$ .

Die Gerade  $d_m$  schneidet also die Fokalfäche auf den Kegelschnitten  $e$  und  $e'$ . Die Schnittpunkte  $K$  und  $K'$  sind die Zwickpunkte der Doppelgerade.

Die Torsallinien sind die Congruenzstrahlen, welche sich auf  $K$  und  $K'$  stützen.

Die Coordinaten  $p_1$  und  $p_2$  der Spur  $T_m$  des durch  $K$  hindurchgehenden Strahles sind bestimmt durch

$$\begin{aligned} x_3 p_1^2 - x_1 p_1 + x_4 &= 0, \\ x_3 p_2^2 - x_2 p_2 + x_4 &= 0, \end{aligned}$$

also in diesem Falle durch

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \alpha_2)^2 p_1^2 + 2(\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_3 p_1 + \alpha_3^2 &= 0, \\ (\alpha_1 + \alpha_2)^2 p_2^2 + 2(\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_3 p_2 + \alpha_3^2 &= 0, \end{aligned}$$

woher

$$p_1 = \frac{x_1}{x_3} = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (87)$$

$$p_2 = \frac{x_2}{x_3} = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (88)$$

Die Coordinaten genügen der Gleichung  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$ ; der Strahl schneidet ja die Gerade  $m$ , welche auf der Fläche die Rolle der einfachen Leitlinie spielt.

Der Torsalpunkt  $T_m$  wird offenbar durch die Gleichungen (87), (88) und  $x_4 = 0$  dargestellt.

Die Torsallinie  $t$  von  $K$  ist der Congruenzstrahl durch  $T_m$ ; ihre Gleichungen lauten also:

$$x_1 = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2} x_3 - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_3} x_4, \quad (89)$$

$$x_2 = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2} x_3 - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_3} x_4. \quad (90)$$

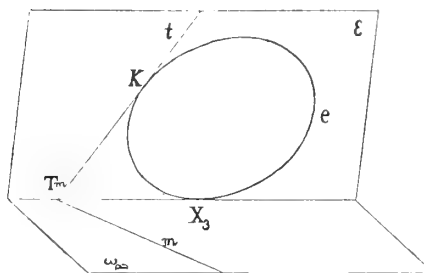


Fig. 5.

Sie berührt den Kegelschnitt  $e$  im Punkte  $K$ .

Der zweite Torsalpunkt  $T_m'$  ist bestimmt durch

$$p_1 = \frac{x_1}{x_3} = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (91)$$

$$p_2 = \frac{x_2}{x_3} = +\frac{\alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (92)$$

und liegt offenbar ebenfalls auf  $m$ .

Die zweite Torsallinie  $t'$  wird dargestellt durch

$$x_1 = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_2} x_3 - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_3} x_4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (93)$$

$$x_2 = +\frac{\alpha_3}{\alpha_1 - \alpha_2} x_3 + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_3} x_4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (94)$$

und berührt den Kegelschnitt  $e'$  im Punkte  $K'$ .

Die kubische Regelfläche der in  $\omega_\infty$  liegenden Geraden ist hiermit genügend erörtert.

§ 12. Es soll jetzt die Regelfläche untersucht werden, welche durch die Doppelgrade  $d_m$  beschrieben wird, wenn  $m$  um einen Punkt  $A$  ( $\frac{x_1}{x_3} = a_1$ ,  $\frac{x_2}{x_3} = a_2$ ,  $x_4 = 0$ ) rotirt.

Da die Gerade  $m$  stets durch den Punkt  $A$  gehen muss, besteht zwischen den Grössen  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$  die folgende Beziehung

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (95)$$

Setzen wir, zur besseren Übersicht,

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_3} = \varphi_1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (96)$$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_3} = \varphi_2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97)$$

so wird die Doppelgerade  $d_m$  bestimmt durch (siehe (81) und (82))

$$\varphi_1 x_1 + \varphi_2 x_2 + 2 x_3 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

$$\varphi_1 x_1 - \varphi_2 x_2 + 2 (\varphi_1^2 - \varphi_2^2) x_4 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (99)$$

während  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  durch (95) verbunden sind, also durch

$$a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + 1 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (100)$$

Durch Elimination von  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  aus den Gleichungen (98), (99) und (100) erhalten wir die Gleichung der durch  $d_m$  erzeugten Regelfläche.

Aus (98) und (100) geht hervor

$$\varphi_1 = \frac{x_2 - 2 a_2 x_3}{a_2 x_1 - a_1 x_2},$$

$$\varphi_2 = \frac{-x_1 + 2 a_1 x_3}{a_2 x_1 - a_1 x_2}.$$

Setzen wir diese Ausdrücke für  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  in (99) ein, so finden wir

$$\frac{x_1 (x_2 - 2 a_2 x_3) + x_2 (x_1 - 2 a_1 x_3)}{a_2 x_1 - a_1 x_2} +$$

$$+ 2 \frac{(x_2 - 2 a_2 x_3)^2 - (x_1 - 2 a_1 x_3)^2}{(a_2 x_1 - a_1 x_2)^2} x_4 = 0,$$

oder

$$\{ 2 x_1 x_2 - 2 (a_2 x_1 + a_1 x_2) x_3 \} (a_2 x_1 - a_1 x_2) +$$

$$+ 2 x_4 \{ -x_1^2 + x_2^2 + 4 (a_1 x_1 - a_2 x_2) x_3 + 4 (-a_1^2 + a_2^2) x_3^2 \} = 0,$$

oder endlich

$$(x_1 x_2 - a_2 x_1 x_3 - a_1 x_2 x_3) (a_2 x_1 - a_1 x_2) -$$

$$- x_4 \{ x_1^2 - x_2^2 - 4 (a_1 x_1 - a_2 x_2) x_3 + 4 (a_1^2 - a_2^2) x_3^2 \} = 0 \quad (101)$$

Diese Gleichung stellt also die Regelfläche ( $d_m$ ) dar, welche sonach vom *dritten* Grade ist.

Die Schnittkurve in  $\omega_\infty$  ( $x_4 = 0$ ) wird gegeben durch

$$(x_1 x_2 - a_2 x_1 x_3 - a_1 x_2 x_3) (a_2 x_1 - a_1 x_2) = 0. \quad . \quad (102)$$

Sie besteht aus der Gerade  $X_2 A$  und einem durch  $X_1$ ,  $X_2$  und  $X_3$  hindurchgehenden Kegelschnitt  $\gamma_\infty$ .

Die Tangenten in  $X_1$  und  $X_2$  an dem Kegelschnitte begegnen sich offenbar im Punkte  $A$ .

Die Schnittkurve der Regelfläche  $(d_m)$  in  $\omega_0$  ( $x_3 = 0$ ) wird durch die Gleichung

$$x_1 x_2 (a_2 x_1 - a_1 x_2) - (x_1^2 - x_2^2) x_4 = 0 \quad . \quad . \quad (103)$$

vertreten.

Diese Gleichung stellt eine kubische Kurve dar, welche durch die Punkte  $X_1$ ,  $X_2$  und  $A_3$  (den Schnittpunkt von  $X_3 A$  mit  $X_1 X_2$ ) hindurchgeht, und in  $X_4$  einen Doppelpunkt aufweist, deren Tangenten  $X_4$  mit den Punkten  $E$  und  $E'$  verbinden. Die Tangenten in  $X_1$  und  $X_2$  sind die Bilder von  $X_1 A$  und  $X_2 A$ . Sie schneiden sich in dem gleichfalls auf der Kurve liegenden Punkte  $A'$  ( $x_1 : x_4 = 1 : a_1$ ,  $x_2 : x_4 = 1 : a_2$ ,  $x_3 = 0$ ).

Der Kegelschnitt  $\gamma_\infty$  und die Gerade  $X_3 A$ , welche zusammen den Durchschnitt von  $(d_m)$  mit  $\omega_\infty$  bilden, schneiden sich ausser  $X_3$ , im Punkte  $B$ , wofür gilt

$$x_1 = 2 a_1 x_3, \quad x_2 = 2 a_2 x_3, \quad x_4 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

Dieser Punkt  $B$  muss ein Doppelpunkt des Schnittes in  $\omega_0$  sein; er ist also ein Punkt der Doppelgerade  $\Delta$  der Regelfläche  $(d_m)$ . Auch  $X_4$ , der Doppelpunkt des Schnittes in  $\omega_0$ , liegt auf  $\Delta$ . Die Doppelgerade  $\Delta$  von  $(d_m)$  wird daher durch die Gleichungen

$$x_1 = 2 a_1 x_3, \quad x_2 = 2 a_2 x_3. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (105)$$

dargestellt.

Die *einfache Leitlinie* ist mit dem Congruenzstrahle  $a = AA'$  identisch, welcher  $A$  mit seinem Bilde  $A'$  in  $\omega_0$  verbindet. Diese Gerade wird ja durch jede Gerade  $d_m$  geschnitten, weil sie auf der axialen Regelfläche jeder Gerade  $m$  liegt.

Eine Ebene  $V$  durch die einfache Directrix ist bestimmt durch

$$\lambda_1 (a_1 x_1 - a_1^2 x_3 - x_4) + \lambda_2 (a_2 x_2 - a_2^2 x_3 - x_4) = 0 \quad (106)$$

oder

$$x_4 = \frac{\lambda_1 (a_1 x_1 - a_1^2 x_3) + \lambda_2 (a_2 x_2 - a_2^2 x_3)}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Substituieren wir diesen Ausdruck für  $x_4$  in die Gleichung (101) der Regelfläche  $(d_m)$ , so folgt:

$$(\lambda_1 + \lambda_2) (x_1 x_2 - a_2 x_1 x_3 - a_1 x_2 x_3) (a_2 x_1 - a_1 x_2) - \\ - \{ \lambda_1 a_1 x_1 + \lambda_2 a_2 x_2 - (\lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2) x_3 \} \times \\ \times \{ x_1^2 - x_2^2 - 4 (a_1 x_1 - a_2 x_2) x_3 + 4 (a_1^2 - a_2^2) x_3^2 \} = 0.$$

Diese Gleichung stellt die Gesamtheit der drei Ebenen dar, welche  $X_4$  mit den drei Geraden verbinden, die  $V$  mit  $(d_m)$  gemeinsam hat.

Diese drei Ebenen schneiden  $\omega_0$  ( $x_3 = 0$ ) in den drei Geraden, welche durch

$$(\lambda_1 + \lambda_2) x_1 x_2 (a_2 x_1 - a_1 x_2) - (\lambda_1 a_1 x_1 + \lambda_2 a_2 x_2) (x_1^2 - x_2^2) = 0$$

oder

$$(a_1 x_1 - a_2 x_2) (\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2) = 0$$

bestimmt sind.

Den drei in  $V$  befindlichen Geraden gehört die einfache Directrix  $a$  an; diese wird aus  $X_4$  durch die Ebene

$$a_1 x_1 - a_2 x_2 - (a_1^2 - a_2^2) x_3 = 0$$

projektirt, welche  $\omega_0$  in der Gerade

$$a_1 x_1 - a_2 x_2 = 0$$

schneidet.

Die projektirenden Ebenen der beiden anderen Geraden in  $V$  schneiden  $\omega_0$  deshalb in den beiden Geraden, welche zusammen durch

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (107)$$

dargestellt werden.

Wenn die beiden in  $V$  liegenden Geraden zusammenfallen, vereinigen sie sich in einer Torsallinie; auch die aus  $X_4$  projektirenden Ebenen coincidiren dann, ebenso wie ihre Spuren in  $\omega_0$ . In diesem Falle muss die Gleichung (107) offenbar zwei *zusammenfallende* Geraden darstellen; dies trifft zu, wenn

$$\text{entweder} \quad \lambda_1 = 0,$$

$$\text{oder} \quad \lambda_2 = 0.$$

Es folgt vermöge der Gleichung (106) hieraus, dass die Ebenen

$$a_2 x_2 - a_2^2 x_3 - x_4 = 0$$

und

$$a_1 x_1 - a_1^2 x_3 - x_4 = 0$$

— das sind die Ebenen  $(X_1, a)$  und  $(X_2, a)$  — die beiden Torsallinien  $f_1$  und  $f_2$  enthalten. Sie schneiden deshalb die Doppelgerade  $\Delta$  in den Zwickpunkten  $K_1$  und  $K_2$ .

Die Ebene  $(X_1, a)$  trifft  $\Delta$  in einem Punkte, welcher bestimmt ist durch

$$\frac{x_1}{2a_1} = \frac{x_2}{2a_2} = \frac{x_3}{1} = \frac{x_4}{a_2^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (108)$$

Dieser ist also der Punkt  $K_1$ .

Der Punkt  $K_2$  wird gegeben durch

$$\frac{x_1}{2a_1} = \frac{x_2}{2a_2} = \frac{x_3}{1} = \frac{x_4}{a_1^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (109)$$

Der Zwickpunkt  $K_1$  liegt offenbar auf dem Fokalkegel  $F_1$  ( $x_1^2 = 4x_3x_4$ ), während  $K_2$  sich auf  $F_2$  befindet.

Wir können die beiden Zwickpunkte auch als diejenigen Punkte auffassen, welche  $\Delta$  ausser  $X_4$  mit der Fokalfläche gemeinsam hat.

Die Torsallinie  $f_1$  ist diejenige Gerade  $d_m$ , welche durch  $K_1$  hindurchgeht; sie ist daher, vermöge (98) und (99), durch

$$\begin{aligned} 2a_1\varphi_1 + 2a_2\varphi_2 + 2 &= 0, \\ 2a_1\varphi_1 - 2a_2\varphi_2 + 2a_2^2(\varphi_1^2 - \varphi_2^2) &= 0, \end{aligned}$$

also durch

$$\begin{aligned} a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + 1 &= 0, \\ a_1\varphi_1 - a_2\varphi_2 + a_2^2(\varphi_1^2 - \varphi_2^2) &= 0, \end{aligned}$$

bestimmt, so dass man hat

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 0, \\ \varphi_2 &= -\frac{1}{a_2}. \end{aligned}$$

Die Gleichungen der Torsallinie  $f_1$  lauten demnach

$$\frac{x_2}{2a_2} = \frac{x_3}{1} = \frac{x_4}{a_2^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (110)$$

Die Torsallinie ist somit mit der Gerade  $X_1K_1$  identisch und daher eine Kante des Fokalkegels  $F_1$ .

Ebenso ist die Torsallinie  $f_2$  mit der Geraden  $X_2 K_2$  identisch und durch

$$\frac{x_1}{2a_1} = \frac{x_3}{1} = \frac{x_4}{a_1^2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (111)$$

bestimmt.

Der Schnittpunkt von  $f_1$  mit  $a$  ist der eine Torsalpunkt auf der einfachen Directrix. Für diesen Punkt hat man offenbar

$$\frac{x_1}{a_1^2 + a_2^2} = \frac{x_2}{2a_1 a_2} = \frac{x_3}{a_1} = \frac{x_4}{a_1 a_2^2} \cdot \cdot \cdot \quad (112)$$

Derselbe ist der Punkt  $A_{f_1}$ , wo  $a$  den Fokalkegel  $F_1$  berührt.

Der zweite Torsalpunkt ist der Berührungspunkt  $A_{f_2}$  von  $a$  mit dem Fokalkegel  $F_2$ ; er wird durch

$$\frac{x_1}{2a_1 a_2} = \frac{x_2}{a_1^2 + a_2^2} = \frac{x_3}{a_2} = \frac{x_4}{a_1^2 a_2} \cdot \cdot \cdot \quad (113)$$

dargestellt.

Wir sehen daher, dass die beiden Torsalpunkte mit den Brennpunkten des durch  $A$  bestimmten Congruenzstrahles identisch sind.

Mit dem Vorigen ist auch die Untersuchung dieser kubischen Regelfläche erledigt.

Jeder Punkt  $A$  in  $\omega_\infty$  bestimmt eine kubische Regelfläche ( $d_m$ ), für welche  $a = AA'$  die einfache Directrix ist, während die Doppelgerade  $\Delta$  den Punkt  $X_4$  mit dem durch

$$x_1 = 2a_1 x_3, \quad x_2 = 2a_2 x_3, \quad x_4 = 0$$

bestimmten Punkte  $B$  verbindet.

Wenn  $A$  alle Positionen in der Ebene  $\omega_0$  durchläuft, so beschreibt die einfache Directrix die Strahlencongruenz und die Doppelgerade den Strahlenbündel, welcher  $X_4$  zum Scheitel hat.

§ 13. *Die Regelfläche der Congruenzstrahlen, welche auf einen durch die Punkte  $X_1$  und  $X_2$  hindurchgehenden Kegelschnitt ruhen.*

Zum Schluss werden wir die Regelfläche untersuchen, welche von denjenigen Strahlen erzeugt wird, die auf einem durch  $X_1$  und  $X_2$  gelegten Kegelschnitt ruhen.

Ein solcher Kegelschnitt befinde sich in einer durch  $X_1 X_2$  hindurchgehenden, mit  $\omega_\mu$  bezeichneten Ebene

$$x_3 = \mu v_4.$$

Diesen Kegelschnitt werden wir mit  $\gamma_\mu$  andeuten.

Der in  $\omega_\mu$  befindliche Kegelschnitt  $\gamma_\mu$  werde durch

$$\alpha_3 \beta_3 x_1 x_2 + x_1 (\alpha_2 \beta_3 x_3 + \alpha_3 \beta_2 x_4) + x_2 (x_1 \beta_3 x_3 + \alpha_3 \beta_1 x_4) + \\ + (\alpha_0 \beta_3 x_3^2 + \alpha_3 \beta_0 x_4^2) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (114)$$

$$x_3 = \mu x_4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (115)$$

dargestellt. Die eigentümliche Form der Gleichung (114) ist im I. Abschnitte (S. 16) erklärt.

Die Gleichung der Regelfläche wird ermittelt, indem man aus (114), (115) und den beiden Gleichungen (1) die Coordinaten  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  und  $x_4$  eliminirt; man erhält sodann eine Gleichung in  $p_1$  und  $p_2$ ; diese ist die Beziehung, welche zwischen den Coordinaten  $p_1$ ,  $p_2$  der Spur  $P$  eines Congruenzstrahles  $p$  besteht, wenn dieser Strahl den Kegelschnitt schneidet. Eliminirt man ferner aus dieser Gleichung mit Hülfe von (1) die Grössen  $p_1$  und  $p_2$ , so bekommt man die Gleichungen der zu untersuchenden Regelfläche.

Die Elimination von  $x_3$  giebt

$$\alpha_3 \beta_3 x_1 x_2 + (\alpha_2 \beta_3 \mu + \alpha_3 \beta_2) x_1 x_4 + (\alpha_1 \beta_3 \mu + \alpha_3 \beta_1) x_2 x_4 + \\ + (\alpha_0 \beta_3 \mu^2 + \alpha_3 \beta_0) x_4^2 = 0,$$

$$x_1 = \left( p_1 \mu + \frac{1}{p_1} \right) x_4,$$

$$x_2 = \left( p_2 \mu + \frac{1}{p_2} \right) x_4.$$

Durch Elimination von  $x_1$  und  $x_2$  und Beseitigung der Nenner erhält man

$$\alpha_3 \beta_3 \mu^2 p_1^2 p_2^2 + (\alpha_2 \beta_3 \mu + \alpha_3 \beta_2) \mu p_1^2 p_2 + (\alpha_1 \beta_3 \mu + \alpha_3 \beta_1) \mu p_1 p_2^2 + \\ + \alpha_3 \beta_3 \mu p_1^2 + \alpha_3 \beta_3 \mu p_2^2 + (\alpha_0 \beta_3 \mu^2 + \alpha_3 \beta_0) p_1 p_2 + \\ + (\alpha_1 \beta_3 \mu + \alpha_3 \beta_1) p_1 + (\alpha_2 \beta_3 \mu + \alpha_3 \beta_2) p_2 + \alpha_3 \beta_3 = 0, \quad (116)$$

oder

$$\gamma_0 p_1^2 p_2^2 + \gamma_1 p_1^2 p_2 + \gamma_2 p_1 p_2^2 + \gamma_1' p_1^2 + \gamma_2' p_2^2 + \gamma_0' p_1 p_2 + \\ \gamma_1'' p_1 + \gamma_2'' p_2 + \gamma_0'' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (117)$$

Wenn wir nun  $p_1^2$  durch  $\frac{p_1 x_1 - x_4}{x_3}$  und  $p_2^2$  durch  $\frac{p_2 x_2 - x_4}{x_3}$  ersetzen, so finden wir



$$[\gamma_0 x_1 x_2 + \gamma_1 x_1 x_3 + \gamma_2 x_2 x_3 + \gamma_0' x_3^2] p_1 p_2 + [\gamma_1' x_1 x_3 - \gamma_0 x_1 x_4 + \gamma_1'' x_3^2 - \gamma_2 x_3 x_4] p_1 + [\gamma_2' x_2 x_3 - \gamma_0 x_2 x_4 + \gamma_2'' x_3^2 - \gamma_1 x_3 x_4] p_2 + [\gamma_0'' x_3^2 - (\gamma_1' + \gamma_2') x_3 x_4 + \gamma_0 x_4^2] = 0 \quad (118)$$

Der Kürze wegen setzen wir

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 x_1 x_2 + \gamma_1 x_1 x_3 + \gamma_2 x_2 x_3 + \gamma_0' x_3^2 &= \theta_3, \\ \gamma_1' x_1 x_3 - \gamma_0 x_1 x_4 + \gamma_1'' x_3^2 - \gamma_2 x_3 x_4 &= \theta_2, \\ \gamma_2' x_2 x_3 - \gamma_0 x_2 x_4 + \gamma_2'' x_3^2 - \gamma_1 x_3 x_4 &= \theta_1, \\ \gamma_0'' x_3^2 - (\gamma_1' + \gamma_2') x_3 x_4 + \gamma_0 x_4^2 &= \theta_0 \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

die Gleichung (118) bekommt nun die Form

$$\theta_3 p_1 p_2 + \theta_2 p_1 + \theta_1 p_2 + \theta_0 = 0. \quad (120)$$

Ebenso wie auf S. 36 die Gleichungen (13), (14) und (15) aus der Gleichung (12) abgeleitet wurden, können wir nun aus (120) die folgenden Gleichungen herleiten:

$$(\theta_3 x_1 + \theta_1 x_3) p_1 p_2 + (\theta_2 x_1 + \theta_0 x_3) p_1 - \theta_3 x_4 p_2 - \theta_2 x_4 = 0, \quad (121)$$

$$(\theta_3 x_2 + \theta_2 x_3) p_1 p_2 - \theta_3 x_4 p_1 + (\theta_1 x_2 + \theta_0 x_3) p_2 - \theta_1 x_4 = 0, \quad (122)$$

$$\begin{aligned} &(\theta_3 x_1 x_2 + \theta_2 x_1 x_3 + \theta_1 x_2 x_3 + \theta_0 x_3^2) p_1 p_2 - (\theta_3 x_1 + \theta_1 x_3) x_4 p_1 - \\ & - (\theta_3 x_2 + \theta_2 x_3) x_4 p_2 + \theta_3 x_4^2 = 0. \end{aligned} \quad (123)$$

Durch Elimination von  $p_1$ ,  $p_2$  und  $p_1 p_2$  aus (120), (121), (122) und (123) bekommt man

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \theta_3 & , \theta_2 & , \theta_1 & , \theta_0 \\ \theta_3 x_1 + \theta_1 x_3 & , \theta_2 x_1 + \theta_0 x_3 & , -\theta_3 x_4 & , -\theta_2 x_4 \\ \theta_3 x_2 + \theta_2 x_3 & , -\theta_3 x_4 & , \theta_1 x_2 + \theta_0 x_3 & , -\theta_1 x_4 \\ \theta_3 x_1 x_2 + \theta_2 x_1 x_3 + \theta_1 x_2 x_3 + \theta_0 x_3^2 & , -(\theta_3 x_1 + \theta_1 x_3) x_4 & , -(\theta_3 x_2 + \theta_2 x_3) x_4 & , \theta_3 x_4^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Indem man zu der vierten Horizontalreihe  $x_1 x_2$  mal die erste,  $-x_2$  mal die zweite und  $-x_1$  mal die dritte addirt, erhält man

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \theta_3 & , \theta_2 & , \theta_1 & , \theta_0 \\ \theta_3 x_1 + \theta_1 x_3, \theta_2 x_1 + \theta_0 x_3 & , -\theta_3 x_4 & , -\theta_2 x_4 \\ \theta_3 x_2 + \theta_2 x_3, -\theta_3 x_4 & , \theta_1 x_2 + \theta_0 x_3 & , -\theta_1 x_4 \\ \theta_0 x_3^2 & , -(\theta_0 x_2 + \theta_1 x_4) x_3, -(\theta_0 x_1 + \theta_2 x_4) x_3, \theta_0 x_1 x_2 + \theta_1 x_1 x_4 + \theta_2 x_2 x_4 + \theta_3 x_4^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Durch Einsetzung der Ausdrücke (119) für  $\theta_3$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_1$  und  $\theta_0$  findet man folgendes Resultat

$$\begin{aligned}
 \theta_0 x_2 + \theta_1 x_4 &= \gamma_0'' x_2 x_3^2 - \gamma_1' x_2 x_3 x_4 - \gamma_2' x_2 x_3 x_4 + \gamma_0' x_2 x_4^2 + \\
 &\quad + \gamma_2' x_2 x_3 x_4 - \gamma_0' x_2 x_4^2 + \gamma_2'' x_3^2 x_4 - \gamma_1' x_3 x_4^2 \\
 &= [\gamma_0'' x_2 x_3 - \gamma_1' x_2 x_4 + \gamma_2'' x_3 x_4 - \gamma_1' x_4^2] x_3, \\
 \theta_0 x_1 + \theta_2 x_4 &= [\gamma_0'' x_1 x_3 - \gamma_2' x_1 x_4 + \gamma_1'' x_3 x_4 - \gamma_2' x_4^2] x_3, \\
 \theta_0 x_1 x_2 + \theta_1 x_1 x_4 + \theta_2 x_2 x_4 + \theta_3 x_4^2 &= \gamma_0'' x_1 x_2 x_3^2 - \gamma_1' x_1 x_2 x_3 x_4 - \gamma_2' x_1 x_2 x_3 x_4 + \gamma_0' x_1 x_2 x_4^2 + \\
 &\quad + \gamma_2' x_1 x_2 x_3 x_4 - \gamma_0' x_1 x_2 x_4^2 + \gamma_2'' x_1 x_3^2 x_4 - \gamma_1' x_1 x_3 x_4^2 + \\
 &\quad + \gamma_1' x_1 x_2 x_3 x_4 - \gamma_0' x_1 x_2 x_4^2 + \gamma_1' x_2 x_3^2 x_4 - \gamma_2' x_2 x_3 x_4^2 + \\
 &\quad + \gamma_0' x_1 x_2 x_4^2 + \gamma_1' x_1 x_3 x_4^2 + \gamma_2' x_2 x_3 x_4^2 + \gamma_0' x_3^2 x_4^2 \\
 &= [\gamma_0'' x_1 x_2 + \gamma_2'' x_1 x_4 + \gamma_1'' x_2 x_4 + \gamma_0' x_4^2] x_3^2.
 \end{aligned}$$

Setzen wir weiter, zur Erleichterung der Übersicht,

$$\left. \begin{aligned}
 \gamma_0'' x_2 x_3 - \gamma_1' x_2 x_4 + \gamma_2'' x_3 x_4 - \gamma_1' x_4^2 &= \theta_4, \\
 \gamma_0'' x_1 x_3 - \gamma_2' x_1 x_4 + \gamma_1'' x_3 x_4 - \gamma_2' x_4^2 &= \theta_5, \\
 \gamma_0'' x_1 x_2 + \gamma_2'' x_1 x_4 + \gamma_1'' x_2 x_4 + \gamma_0' x_4^2 &= \theta_6,
 \end{aligned} \right\} \quad (124)$$

so können wir obige Gleichung, nachdem wir durch  $x_3^2$  geteilt haben, in diese Gestalt bringen:

$$\Delta' \equiv \begin{vmatrix} \theta_3 & , & \theta_2 & , & \theta_1 & , & \theta_0 \\ \theta_3 x_1 + \theta_1 x_3 & , & \theta_2 x_1 + \theta_0 x_3 & , & -\theta_3 x_4 & , & -\theta_2 x_4 \\ \theta_3 x_2 + \theta_2 x_3 & , & -\theta_3 x_4 & , & \theta_1 x_2 + \theta_0 x_3 & , & -\theta_1 x_4 \\ \theta_0 & , & -\theta_4 & , & -\theta_5 & , & \theta_6 \end{vmatrix} = 0.$$

Subtrahieren wir von der zweiten Horizontalreihe  $x_1$  mal die erste und von der dritten  $x_2$  mal die erste, so folgt

$$\Delta' \equiv \begin{vmatrix} \theta_3 & , & \theta_2 & , & \theta_1 & , & \theta_0 \\ \theta_1 x_3 & , & \theta_0 x_3 & , & -(\theta_1 x_1 + \theta_3 x_4) & , & -(\theta_0 x_1 + \theta_2 x_4) \\ \theta_2 x_3 & , & -(\theta_2 x_2 + \theta_3 x_4) & , & \theta_0 x_3 & , & -(\theta_0 x_2 + \theta_1 x_4) \\ \theta_0 & , & -\theta_4 & , & -\theta_5 & , & \theta_6 \end{vmatrix} = 0.$$

Wir finden weiter

$$\begin{aligned}
 \theta_1 x_1 + \theta_3 x_4 &= (\gamma_2' x_1 x_2 + \gamma_2'' x_1 x_3 + \gamma_2' x_2 x_4 + \gamma_0' x_3 x_4) x_3, \\
 \theta_2 x_2 + \theta_3 x_4 &= (\gamma_1' x_1 x_2 + \gamma_1' x_1 x_4 + \gamma_1'' x_2 x_3 + \gamma_0' x_3 x_4) x_3.
 \end{aligned}$$

Der Kürze halber setzen wir

$$\left. \begin{aligned}
 \gamma_2' x_1 x_2 + \gamma_2'' x_1 x_3 + \gamma_2' x_2 x_4 + \gamma_0' x_3 x_4 &= \theta_7, \\
 \gamma_1' x_1 x_2 + \gamma_1' x_1 x_4 + \gamma_1'' x_2 x_3 + \gamma_0' x_3 x_4 &= \theta_8,
 \end{aligned} \right\} \quad (125)$$

und erhalten nunmehr

$$\begin{aligned}\theta_1 x_1 + \theta_3 x_4 &= \theta_7 x_3, \\ \theta_2 x_2 + \theta_3 x_4 &= \theta_8 x_3;\end{aligned}$$

gleichfalls gilt

$$\begin{aligned}\theta_0 x_1 + \theta_2 x_4 &= \theta_5 x_3, \\ \theta_0 x_2 + \theta_1 x_4 &= \theta_6 x_3.\end{aligned}$$

Substituieren wir diese Ausdrücke in die Gleichung der Regelfläche, so erscheint sie nochmals teilbar durch  $x_3^2$ . Nach Teilung durch  $x_3^2$  bekommen wir

$$\Delta'' = \begin{vmatrix} \theta_3 & \theta_2 & \theta_1 & \theta_0 \\ \theta_1 & \theta_0 & -\theta_7 & -\theta_5 \\ \theta_2 & -\theta_8 & \theta_0 & -\theta_4 \\ \theta_0 & -\theta_4 & -\theta_5 & \theta_6 \end{vmatrix} = 0. \quad (126)$$

Die Grössen  $\theta$  sind alle in den Coordinaten vom zweiten Grade; demnach ist die Gleichung (126) vom *achten* Grade.

Hieraus ergibt sich, dass die Regelfläche der Strahlen, welche auf einen willkürlichen durch  $X_1$  und  $X_2$  gelegten Kegelschnitt  $\gamma_\mu$  ruhen, vom *achten* Grade ist. Es erhellt, dass der Kegelschnitt  $\gamma_\mu$  selber auf dieser Regelfläche eine *vierfache* Kurve ist.

Den Schnitt mit  $\omega_\infty$  erhalten wir, indem wir in der Gleichung (126)  $x_4 = 0$  setzen; die Grössen  $\theta$  bekommen sodann die folgenden Werte (siehe (119), (124) und (125)):

$$\left. \begin{aligned}\theta_3 &= \gamma_0' x_1 x_2 + \gamma_1' x_1 x_3 + \gamma_2' x_2 x_3 + \gamma_0'' x_3^2, \\ \theta_2 &= \gamma_1' x_1 x_3 + \gamma_1'' x_3^2, \\ \theta_1 &= \gamma_2' x_2 x_3 + \gamma_2'' x_3^2, \\ \theta_0 &= \gamma_0'' x_3^2, \\ \theta_4 &= \gamma_0'' x_2 x_3, \\ \theta_5 &= \gamma_0'' x_1 x_3, \\ \theta_6 &= \gamma_0'' x_1 x_2, \\ \theta_7 &= \gamma_2' x_1 x_2 + \gamma_2'' x_1 x_3, \\ \theta_8 &= \gamma_1' x_1 x_2 + \gamma_1'' x_2 x_3.\end{aligned} \right\} \quad (127)$$

Die Gleichung (126) gestaltet sich nun folgendermassen:

$$\begin{vmatrix} \gamma_0' x_1 x_2 + \gamma_1' x_1 x_3 + \gamma_2' x_2 x_3 + \gamma_0'' x_3^2 & (\gamma_1' x_1 + \gamma_1'' x_3) x_3 & (\gamma_2' x_2 + \gamma_2'' x_3) x_3 & \gamma_0'' x_3^2 \\ \gamma_2' x_2 + \gamma_2'' x_3 & \gamma_0'' x_3^2 & -(\gamma_2' x_2 + \gamma_2'' x_3) x_1 & -\gamma_0'' x_1 x_3 \\ \gamma_1' x_1 + \gamma_1'' x_3 & -(\gamma_1' x_1 + \gamma_1'' x_3) x_2 & -\gamma_0'' x_3^2 & -\gamma_0'' x_2 x_3 \\ \gamma_0'' x_3^2 & -\gamma_0'' x_2 x_3 & -\gamma_0'' x_1 x_3 & \gamma_0'' x_1 x_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (128)$$

Es gelten noch die folgenden Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 &= \mu^2 \alpha_3 \beta_3, \\ \gamma_1 &= \mu (\alpha_2 \beta_3 \mu + \alpha_3 \beta_2), \\ \gamma_2 &= \mu (\alpha_1 \beta_3 \mu + \alpha_3 \beta_1), \\ \gamma_0' &= \alpha_0 \beta_3 \mu^2 + \alpha_3 \beta_0, \\ \gamma_1' &= \mu \alpha_3 \beta_3, \\ \gamma_2' &= \mu \alpha_3 \beta_3, \\ \gamma_1'' &= \alpha_1 \beta_3 \mu + \alpha_3 \beta_1, \\ \gamma_2'' &= \alpha_2 \beta_3 \mu + \alpha_3 \beta_2, \\ \gamma_0'' &= \alpha_3 \beta_3, \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (129)$$

und daher

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 &= \mu^2 \gamma_0'', \\ \gamma_1' &= \gamma_2' = \mu \gamma_0'', \\ \gamma_1 &= \mu \gamma_2'', \\ \gamma_2 &= \mu \gamma_1''. \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (130)$$

Mit Hülfe der Gleichungen (130) können wir die Gleichung (nach Teilung durch  $\gamma_0''$ ) in dieser Form schreiben:

$$\left| \begin{array}{cccc} \mu^2 \gamma_0'' x_1 x_2 + \mu \gamma_2'' x_1 x_3 + \mu \gamma_1'' x_2 x_3 + \gamma_0' x_3^2 & , & (\mu \gamma_0'' x_1 + \gamma_1'' x_3) x_3 & , & (\mu \gamma_0'' x_2 + \gamma_2'' x_3) x_3 & , & x_3^2 \\ (\mu \gamma_0'' x_2 + \gamma_2'' x_3) x_3 & , & \gamma_0'' x_3^2 & , & -(\mu \gamma_0'' x_2 + \gamma_2'' x_3) x_1 & , & -x_1 x_3 \\ (\mu \gamma_0'' x_1 + \gamma_1'' x_3) x_3 & , & -(\mu \gamma_0'' x_1 + \gamma_1'' x_3) x_2 & , & \gamma_0'' x_3^2 & , & -x_2 x_3 \\ \gamma_0'' x_3^2 & , & -\gamma_0'' x_2 x_3 & , & -\gamma_0'' x_1 x_3 & , & x_1 x_2 \end{array} \right| = 0.$$

Wir multipliciren die zweite Horizontalreihe mit  $x_2$ , die dritte mit  $x_1$ , und addiren dann  $x_3$  mal die vierte zu den in dieser Weise erhaltenen Reihen; es folgt dann

$$\left| \begin{array}{cccc} \mu^2 \gamma_0'' x_1 x_2 + \mu \gamma_2'' x_1 x_3 + \mu \gamma_1'' x_2 x_3 + \gamma_0' x_3^2 & , & (\mu \gamma_0'' x_1 + \gamma_1'' x_3) x_3 & , \\ (\mu \gamma_0'' x_2^2 + \gamma_2'' x_2 x_3 + \gamma_0'' x_3^2) x_3 & , & 0 & , \\ (\mu \gamma_0'' x_1^2 + \gamma_1'' x_1 x_3 + \gamma_0'' x_3^2) x_3 & , & -(\mu \gamma_0'' x_1^2 + \gamma_1'' x_1 x_3 + \gamma_0'' x_3^2) x_2 & , \\ \gamma_0'' x_3^2 & , & -\gamma_0'' x_2 x_3 & , \\ & & (\mu \gamma_0'' x_2 + \gamma_2'' x_3) x_3 & , & x_3^2 \\ & & -(\mu \gamma_0'' x_2^2 + \gamma_2'' x_2 x_3 + \gamma_0'' x_3^2) x_1 & , & 0 \\ & & 0 & , & 0 \\ & & -\gamma_0'' x_1 x_3 & , & x_1 x_2 \end{array} \right| = 0.$$

Jetzt multipliciren wir die erste Vertikalreihe mit  $x_1 x_2$  und addiren zu der also entstandenen Reihe  $x_1 x_3$  mal die zweite,  $x_2 x_3$  mal die dritte und  $\gamma_0'' x_3^2$  mal die vierte Vertikalreihe. Wir finden nunmehr

$$\left| \begin{array}{ccc} \Pi, (\mu\gamma_0''x_1 + \gamma_1''x_3)x_3 & , (\mu\gamma_0''x_2 + \gamma_2''x_3)x_3 & , x_3^2 \\ 0, 0 & , (\mu\gamma_0''x_2^2 + \gamma_2''x_2x_3 + \gamma_0''x_3^2)x_1, 0 & \\ 0, -(\mu\gamma_0''x_1^2 + \gamma_1''x_1x_3 + \gamma_0''x_3^2)x_2, & 0 & , 0 \\ 0, -\gamma_0''x_2x_3 & , -\gamma_0''x_1x_3 & , x_1x_2 \end{array} \right| = 0$$

oder

$$x_1^2x_2^2\Pi(\mu\gamma_0''x_1^2 + \gamma_1''x_1x_3 + \gamma_0''x_3^2)(\mu\gamma_0''x_2^2 + \gamma_2''x_2x_3 + \gamma_0''x_3^2) = 0, \quad (131)$$

wo, zur Abkürzung

$$\Pi = \mu^2\gamma_0''x_1^2x_2^2 + \mu\gamma_2''x_1^2x_2x_3 + \mu\gamma_1''x_1x_2^2x_3 + \mu\gamma_0''x_1^2x_3^2 + \mu\gamma_0''x_2^2x_4^2 + \\ + \mu\gamma_0''x_1x_2x_3^2 + \gamma_1''x_1x_3^3 + \gamma_2''x_2x_3^3 + \gamma_0''x_3^4 \quad (132)$$

gesetzt wurde.

Die Gleichung (128), welche nach Multiplikation mit  $x_1^2x_2^2$  in die Form (131) gebracht ist, erscheint deshalb gleichberechtigt mit den folgenden drei Gleichungen:

$$\left. \begin{array}{l} \Pi = 0, \\ \mu\gamma_0''x_1^2 + \gamma_1''x_1x_3 + \gamma_0''x_3^2 = 0, \\ \mu\gamma_0''x_2^2 + \gamma_2''x_2x_3 + \gamma_0''x_3^2 = 0. \end{array} \right\} \dots \dots (133)$$

In der Gleichung  $\Pi = 0$  erkennen wir die Gleichung (116), wenn in dieser  $p_1$  und  $p_2$  durch  $x_1 : x_3$  und  $x_2 : x_3$  ersetzt sind. Die zweite der Gleichungen (133) stellt zwei Geraden durch  $X_2$ , die dritte zwei Geraden durch  $X_1$  dar.

Der Schnitt von  $\omega_x$  mit der betreffenden Regelfläche ist deshalb aus einer biquadratischen Kurve  $\Pi = 0$ , zwei Geraden durch  $X_1$  und zwei Geraden durch  $X_2$  zusammengesetzt.

Wir wollen nunmehr die Bedeutung der durch  $X_1$  und  $X_2$  hindurchgehenden Geraden erforschen.

Die Congruenzstrahlen, welche auf den in  $\omega_x$  befindlichen Geraden

$$x_1 = p_1x_3, \quad x_4 = 0$$

ruhen, liegen alle in der Ebene

$$x_1 = p_1x_3 + \frac{1}{p_1}x_4 \quad \dots \quad (134)$$

Ebenso liegen alle Strahlen, welche die Gerade

$$x_1 = q_1x_3, \quad x_4 = 0$$

schneiden, in der Ebene

$$x_1 = q_1 x_3 + \frac{1}{q_1} x_4. \quad (135)$$

Die Schnittlinie der Ebenen (134) und (135) ist auch die Schnittlinie der Ebenen, welche den durch Addition und Subtraktion von (134) und (135) erhaltenen Gleichungen

$$x_3 = \frac{1}{p_1 q_1} x_4 \quad (136)$$

und

$$2 x_1 = (p_1 + q_1) x_3 + \frac{p_1 + q_1}{p_1 q_1} x_4 \quad (137)$$

entsprechen.

Für die beiden Geraden, welche durch

$$\mu \gamma_0'' x_1^2 + \gamma_1'' x_1 x_3 + \gamma_0'' x_3^2 = 0$$

dargestellt werden, gilt

$$p_1 + q_1 = -\frac{\gamma_1''}{\mu \gamma_0''},$$

$$p_1 q_1 = \frac{1}{\mu}.$$

Die auf diesen Geraden ruhenden Congruenzstrahlen liegen demnach in den Ebenen, die sich in der Gerade

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= \mu x_4, \\ \gamma_0'' x_1 + \gamma_1'' x_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (138)$$

schneiden.

Diese Congruenzstrahlen ruhen also alle auf der durch die Gleichungen (138) vertretenen Gerade.

Ersetzen wir  $\gamma_0''$  und  $\gamma_1''$  durch ihre aus (129) hervorgehenden Ausdrücke, so bekommen die Gleichungen (138) diese Gestalt:

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= \mu x_4, \\ \alpha_3 \beta_3 x_1 + (\alpha_1 \beta_3 \mu + \alpha_3 \beta_1) x_4 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= \mu x_4, \\ \alpha_3 \beta_3 x_1 + \alpha_1 \beta_3 x_3 + \alpha_3 \beta_1 x_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (139)$$

Diese Gleichungen stellen aber (siehe (114) und (115)) die Tangenten in  $X_2$  an dem Kegelschnitte  $\gamma_\mu$  dar, welcher alle die Regelfläche erzeugenden Congruenzstrahlen trägt.

Dieses Ergebniss ermöglicht uns folgendes zu behaupten:

Wenn der bewegliche Congruenzstrahl längs dem gegebenen Kegelschnitte  $\gamma_\mu$  gleitet, wird sein Schnittpunkt sich dem Punkte  $X_2$  in einer durch die Tangente in  $X_2$  bestimmten Richtung nähern. Die Strahlen, welche in dem  $X_2$  unendlich benachbarten Punkte des Kegelschnittes auf diesem ruhen, werden entweder in  $\omega_\infty$  oder in  $\omega_0$  liegen, und zwei Strahlen werden sich in  $\omega_\infty$ , zwei in  $\omega_0$  befinden. Es sind nun die beiden in  $\omega_\infty$  befindlichen Strahlen, welche dem Schnitte der Regelfläche mit  $\omega_\infty$  angehören.

Die beiden anderen in  $\omega_\infty$  liegenden Strahlen, welche durch  $X_1$  gehen und durch

$$\mu\gamma_0''x_2^2 + \gamma_2''x_2x_3 + \gamma_0''x_3^2 = 0$$

dargestellt werden, ruhen aus demselben Grunde in dem  $X_1$  unendlich benachbarten Punkte auf dem Kegelschnitte  $\gamma_\mu$ .

Die beiden durch  $X_1$  gehenden Geraden sind gleichfalls die beiden Tangenten an der Kurve  $\Pi$  in ihrem Knotenpunkte  $X_1$ . Analoges kann von den beiden Geraden durch  $X_2$  behauptet werden.

Der Schnitt der Regelfläche mit  $\omega_0$  ist offenbar auf gleichartiger Weise zusammengezetzt.

§ 14. *Die Regeffläche der Congruenzstrahlen, welche auf einem durch  $X_1$  und  $X_2$  gelegten, in  $\omega_\infty$  befindlichen Kegelschnitt ruhen.*

Wir wollen uns nunmehr mit dem Falle beschäftigen, wo der Kegelschnitt  $\gamma_\mu$  in der Ebene  $\omega_\infty$  liegt, und demnach mit  $\gamma_\infty$  zu bezeichnen ist.

Wir haben nur in den obigen Gleichungen

$$\mu = \alpha$$

zu setzen.

Der Kegelschnitt  $\gamma_\infty$  wird somit durch

$$\left. \begin{aligned} \alpha_3x_1x_2 + \alpha_2x_1x_3 + \alpha_1x_2x_3 + \alpha_0x_3^2 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (140)$$

dargestellt.

Die Grössen  $\gamma$  erhalten nun die folgenden Werte (siehe (129)):

$$\gamma_0 = \mu^2 \alpha_3,$$

$$\gamma_1 = \mu^2 \alpha_2,$$

$$\gamma_2 = \mu^2 \alpha_1,$$

$$\gamma_0' = \mu^2 \alpha_0,$$

$$\gamma_1' = \mu \alpha_3,$$

$$\gamma_2' = \mu \alpha_2,$$

$$\gamma_1'' = \mu \alpha_1,$$

$$\gamma_2'' = \mu \alpha_2,$$

$$\gamma_0'' = \alpha_3,$$

wo der Faktor  $\beta_3$  gestrichen ist.

Die Ausdrücke  $\theta$  bekommen also die folgende Gestalt (siehe (119), (124) und (125)):

$$\theta_3 = \mu^2 (\alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_2 x_1 x_3 + \alpha_1 x_2 x_3 + \alpha_0 x_3^2),$$

$$\theta_2 = -\mu^2 (\alpha_3 x_1 + \alpha_1 x_3) x_4,$$

$$\theta_1 = -\mu^2 (\alpha_3 x_2 + \alpha_2 x_3) x_4,$$

$$\theta_0 = \mu^2 \alpha_3 x_4^2,$$

$$\theta_4 = -\mu^2 \alpha_2 x_4^2,$$

$$\theta_5 = -\mu^2 \alpha_1 x_4^2,$$

$$\theta_6 = \mu^2 \alpha_0 x_4^2,$$

$$\theta_7 = \mu^2 (\alpha_1 x_2 + \alpha_0 x_3) x_4,$$

$$\theta_8 = \mu^2 (\alpha_2 x_1 + \alpha_0 x_3) x_4.$$

Die Gleichung (126) der Regelfläche erscheint demnach in dieser Form

$$\Delta'' \equiv \begin{vmatrix} \alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_2 x_1 x_3 + \alpha_1 x_2 x_3 + \alpha_0 x_3^2, & -(\alpha_3 x_1 + \alpha_1 x_3) x_4, & -(\alpha_3 x_2 + \alpha_2 x_3) x_4, & \alpha_3 x_4^2 \\ -(\alpha_3 x_2 + \alpha_2 x_3) x_4 & , & \alpha_3 x_4^2 & , & -(\alpha_1 x_2 + \alpha_0 x_3) x_4, & \alpha_1 x_4^2 \\ -(\alpha_3 x_1 + \alpha_1 x_3) x_4 & , & -(\alpha_2 x_1 + \alpha_0 x_3) x_4, & \alpha_2 x_4^2 & , & \alpha_2 x_4^2 \\ \alpha_3 x_4^2 & , & \alpha_2 x_4^2 & , & \alpha_1 x_4^2 & , & \alpha_0 x_4^2 \end{vmatrix} = 0,$$

oder, nach Teilung durch  $x_4^4$ :

$$\Gamma_\infty \equiv \begin{vmatrix} \alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_2 x_1 x_3 + \alpha_1 x_2 x_3 + \alpha_0 x_3^2, & -(\alpha_3 x_1 + \alpha_1 x_3) x_4, & -(\alpha_3 x_2 + \alpha_2 x_3) x_4, & \alpha_3 x_4^2 \\ -(\alpha_3 x_2 + \alpha_2 x_3) & , & \alpha_3 x_4 & , & -(\alpha_1 x_2 + \alpha_0 x_3) & , & \alpha_1 x_4 \\ -(\alpha_3 x_1 + \alpha_1 x_3) & , & -(\alpha_2 x_1 + \alpha_0 x_3) & , & \alpha_2 x_4 & , & \alpha_2 x_4 \\ \alpha_3 & , & \alpha_2 & , & \alpha_1 & , & \alpha_0 \end{vmatrix} = 0. \quad (141)$$

Die Regelfläche der Congruenzstrahlen, welche auf einem durch  $X_1$  und  $X_2$  gelegten, in  $\omega_\infty$  befindlichen Kegelschnitt  $\gamma_\infty$  ruhen, ist demnach vom vierten Grade.



Setzen wir  $x_4 = 0$ , so finden wir

$$\begin{vmatrix} \alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_2 x_1 x_3 + \alpha_1 x_2 x_3 + \alpha_0 x_3^2, & 0 & , & 0 & , & 0 \\ -(\alpha_3 x_2 + \alpha_2 x_3) & , & 0 & , & -(\alpha_1 x_2 + \alpha_0 x_3), & 0 \\ -(\alpha_3 x_1 + \alpha_1 x_3) & , & -(\alpha_2 x_1 + \alpha_0 x_3), & 0 & , & 0 \\ \alpha_3 & , & \alpha_2 & , & \alpha_1 & , & \alpha_0 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$(a_2 x_1 + a_0 x_3)(a_1 x_2 + a_0 x_3) \times \\ \times (a_3 x_1 x_2 + a_2 x_1 x_3 + a_1 x_2 x_3 + a_0 x_3^2) = 0.$$

Der Schnitt mit  $\omega_x$  besteht also aus dem Kegelschnitt  $\gamma_x$  und aus den zwei Geraden, welche  $X_1$  und  $X_2$  bez. mit den Punkten  $M_1$  und  $M_2$  verbinden, wo  $\gamma_\infty$  die Geraden  $X_2 X_3$  und  $X_1 X_3$  trifft, und sich im Punkte  $A$  schneiden.

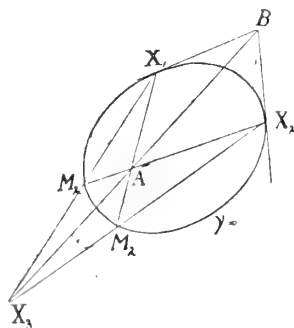


Fig. 6.

Der Schnitt in  $\omega_0$  ( $x_3 = 0$ ) wird durch

$$\begin{vmatrix} \alpha_3 x_1 x_2, & -\alpha_3 x_1 x_4, & -\alpha_3 x_2 x_4, & \alpha_3 x_4^2 \\ -\alpha_3 x_2, & \alpha_3 x_4, & -\alpha_1 x_2, & \alpha_1 x_4 \\ -\alpha_3 x_1, & -\alpha_2 x_1, & \alpha_3 x_4, & \alpha_2 x_4 \\ \alpha_3, & \alpha_2, & \alpha_1, & \alpha_0 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_4)(\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_4)(\alpha_0 x_1 x_2 + \alpha_1 x_1 x_4 + \alpha_2 x_2 x_4 + \alpha_3 x_4^2) = 0 \quad (142)$$

dargestellt.

Er ist aus dem durch  $X_1$  und  $X_2$  gehenden Bildkegelschnitte von  $\gamma_\infty$  und zwei Geraden durch  $X_1$  und  $X_2$  zusammengesetzt.

Der Pol von  $X_1 X_2$  in Bezug auf diesen Bildkegelschnitt ist durch

$$\frac{x_1}{\alpha_2} = \frac{x_2}{\alpha_1} = -\frac{x_4}{\alpha_0}$$

bestimmt. Es ist offenbar das Bild  $A'$  des Punktes  $A$ .

Auf dieser Regelfläche giebt es noch eine Doppelkurve, welche wir mit wenig Mühe bestimmen können.

Ein Congruenzstrahl  $p$  ( $p_1, p_2$ ) schneidet  $\gamma_x$ , wenn der Gleichung

$$\alpha_3 p_1 p_2 + \alpha_2 p_1 + \alpha_1 p_2 + \alpha_0 = 0 \dots \dots (143)$$

genügt wird.

Ein Strahl  $q$  ( $q_1, q_2$ ) tut dasselbe, wenn man hat

$$\alpha_3 q_1 q_2 + \alpha_2 q_1 + \alpha_1 q_2 + \alpha_0 = 0 \dots \dots (144)$$



Hätten wir zuerst  $p_1$  und  $q_1$  eliminirt, so würden wir einen quadratischen Kegel  $k_1$  mit  $X_1$  als Spitze gefunden haben, dessen Gleichung lautet:

$$k_1 \equiv \alpha_3^2 x_4^2 + \alpha_2 \alpha_3 x_2 x_4 + (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) x_3 x_4 - \alpha_0 \alpha_1 x_2 x_3 - \alpha_0^2 x_3^2 = 0. \quad (148)$$

Der Kegel  $k_2$  schneidet die Ebene  $x_4 = 0$  in der Gerade  $X_1 X_2$  und in der Gerade

$$\alpha_2 x_1 + \alpha_0 x_3 = 0,$$

d. h. in der Gerade  $X_2 M_2$ .

Der Kegel  $k_1$  schneidet  $\omega_x$  in  $X_1 X_2$  und in der Gerade

$$\alpha_1 x_2 + \alpha_0 x_3 = 0,$$

d. h. in der Gerade  $X_1 M_1$ .

Es haben die beiden Kegel  $k_1$  und  $k_2$  daher ausser der Gerade  $X_1 X_2$  eine kubische Raumkurve gemein, welche die Punkte  $X_1$  und  $X_2$  und den Punkt  $A$  enthält, wo die Geraden  $X_1 M_1$  und  $X_2 M_2$  sich schneiden.

Der Kegel  $k_2$  schneidet  $x_3 = 0$  ( $\omega_0$ ) in  $X_1 X_2$  und in der Gerade

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_4 = 0.$$

Der Kegel  $k_1$  dagegen schneidet  $\omega_0$  in  $X_1 X_2$  und in der Gerade

$$\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_4 = 0.$$

Der Schnittpunkt  $B'$  dieser beiden Geraden, welcher durch

$$\alpha_1 x_1 = \alpha_2 x_2 = -\alpha_3 x_4$$

bestimmt ist, liegt auch auf der kubischen Raumkurve.

Für diesen Punkt gilt

$$\frac{x_1'}{x_4'} = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1}, \quad \frac{x_2'}{x_4'} = -\frac{\alpha_3}{\alpha_2}. \quad (149)$$

Er ist der Bildpunkt des Punktes  $B$  in  $\omega_x$ , welcher durch

$$\frac{x_1}{x_3} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_3}, \quad \frac{x_2}{x_3} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_3},$$

oder durch

$$\left. \begin{aligned} \alpha_3 x_1 + \alpha_1 x_3 &= 0, \\ \alpha_3 x_2 + \alpha_2 x_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (150)$$

bestimmt ist.

Dieser Punkt  $B$  ist offenbar der Schnitt der Tangenten in  $X_1$  und  $X_2$  an  $\gamma_\infty$ , also der Pol von  $X_1 X_2$  in Bezug auf  $\gamma_\infty$ .

Es leuchtet ein, dass die hier betrachtete kubische Raumkurve mit der gesuchten Doppelkurve identisch ist.

Wir haben also gefunden, dass die Doppelkurve der Regelfläche  $\Gamma_x$ , welche erzeugt wird durch die auf einem durch  $X_1$  und  $X_2$  gelegten, in  $\omega_x$  befindlichen Kegelschnitt  $\gamma_\infty$  ruhenden Strahlen, eine *kubische Raumkurve* ist, welche  $X_1, X_2$ , den Schnittpunkt  $A$  von  $X_1 M_1$  und  $X_2 M_2$ , und das Bild  $B'$  des in Bezug auf  $\gamma_\infty$  der Gerade  $X_1 X_2$  zugeordneten Poles  $B$  enthält.

§ 15. *Die Regelfläche der Strahlen, welche sich stützen auf einen in  $\omega_x$  befindlichen durch  $X_1$  und  $X_2$  gelegten Kegelschnitt, in Bezug auf welchen  $X_3$  der Pol von  $X_1 X_2$  ist.*

In diesem speziellen Falle ist der oben erwähnte Punkt  $B$  mit dem Punkte  $X_3$  identisch.

Wir haben offenbar

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$$

zu setzen.

Die Gleichung des Kegelschnittes lautet

$$\alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_0 x_3^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (151)$$

Die Regelfläche wird somit (siehe (141)) durch

$$\begin{vmatrix} \alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_0 x_3^2, & -\alpha_3 x_1 x_4, & -\alpha_3 x_2 x_4, & \alpha_3 x_4^2 \\ -\alpha_3 x_2 & , & \alpha_3 x_4 & , & -\alpha_0 x_3 & , & 0 \\ -\alpha_3 x_1 & , & -\alpha_0 x_3 & , & \alpha_3 x_4 & , & 0 \\ \alpha_3 & , & 0 & , & 0 & , & \alpha_0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder durch

$$\begin{aligned} \alpha_0 \alpha_3 x_1 x_2 (\alpha_0^2 x_3^2 + \alpha_3^2 x_4^2) + \alpha_0^2 \alpha_3^2 (x_1^2 + x_2^2) x_3 x_4 + \\ + (\alpha_0^2 x_3^2 - \alpha_3^2 x_4^2)^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (152) \end{aligned}$$

dargestellt.

Der Schnitt in  $\omega_x$  wird durch

$$x_3^2(\alpha_0 x_1 x_2 + \alpha_3 x_3^2) = 0,$$

der Schnitt in  $\omega_0$  ( $x_3 = 0$ ) durch

$$x_4^2(\alpha_0 x_1 x_2 + \alpha_3 x_4^2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (153)$$

angewiesen.

Die Doppelkurve ist nun (siehe (147) und (148)) durch

$$\begin{aligned} \alpha_3^2 x_4^2 - \alpha_0^2 x_3^2 &= 0, \\ \alpha_3^2 x_4^2 - \alpha_0^2 x_3^2 &= 0 \end{aligned}$$

gegeben.

Wir können also vorläufig nur behaupten, dass die Doppelkurve in ein Gebilde ausgeartet ist, welches zum Teil der Ebene  $\omega_{\nu_1}$  ( $\alpha_0 x_3 + \alpha_3 x_4 = 0$ ), zum Teil der Ebene  $\omega_{\nu_2}$  ( $\alpha_0 x_3 - \alpha_3 x_4 = 0$ ) angehört.

Substituieren wir in (152)  $\alpha_0 x_3 = -\alpha_3 x_4$ , so folgt

$$2\alpha_0 \alpha_3 x_1 x_2 \cdot \alpha_3^2 x_4^2 - \alpha_0 \alpha_3^3 (x_1^2 + x_2^2) x_4^2 = 0,$$

oder

$$x_4^2 (x_1 - x_2)^2 = 0.$$

Die Ebene  $\omega_{\nu_1}$  ( $\alpha_0 x_3 + \alpha_3 x_4 = 0$ ) schneidet demnach die Regelfläche in den Doppelgeraden  $X_1 X_2$  und  $X_{\nu_1} E$ , deren letztere die Schnittlinie von  $\omega_{\nu_1}$  mit der Ebene  $\varepsilon$  ist.

Die Substitution  $\alpha_0 x_3 = +\alpha_3 x_4$  giebt

$$x_4^2 (x_1 + x_2)^2 = 0.$$

Die Ebene  $\omega_{\nu_2}$  ( $\alpha_0 x_3 - \alpha_3 x_4 = 0$ ) schneidet somit die Fläche in den Doppelgeraden  $X_1 X_2$  und  $X_{\nu_2} E'$ , von denen die letztere die Schnittlinie von  $\omega_{\nu_2}$  mit der Ebene  $\varepsilon'$  ist.

Die kubische Raumkurve ist deshalb in drei Geraden, nämlich  $X_1 X_2$ ,  $X_{\nu_1} E$  und  $X_{\nu_2} E'$  ausgeartet.

§ 16. *Die Regelfläche der Strahlen, welche auf einem durch  $X_1$ ,  $X_2$  und  $X_3$  gelegten Kegelschnitt ruhen.*

Zum Schluss wollen wir den Spezialfall erledigen, wo der Kegelschnitt  $\gamma_\infty$  den Punkt  $X_3$  enthält.

In diesem Falle haben wir

$$\alpha_0 = 0.$$

Demnach lauten die Gleichungen des Kegelschnittes

$$\left. \begin{aligned} \alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_2 x_1 x_3 + \alpha_1 x_2 x_3 &= 0, \\ x_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (154)$$

Die Regelfläche wird nunmehr durch

$$\left| \begin{array}{cccc} \alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_2 x_1 x_3 + \alpha_1 x_2 x_3, & -(\alpha_3 x_1 + \alpha_1 x_3) x_4, & -(\alpha_3 x_2 + \alpha_2 x_3) x_4, & \alpha_3 x_4^2 \\ -(\alpha_3 x_2 + \alpha_2 x_3) & , & \alpha_3 x_4 & , & -\alpha_1 x_2 & , & \alpha_1 x_4 \\ -(\alpha_3 x_1 + \alpha_1 x_3) & , & -\alpha_2 x_1 & , & \alpha_3 x_4 & , & \alpha_2 x_4 \\ \alpha_3 & , & \alpha_2 & , & \alpha_1 & , & 0 \end{array} \right| = 0$$

dargestellt.

Addiren wir  $x_1$  mal die erste,  $x_2$  mal die dritte und  $x_1 x_2$  mal die vierte Horizontalreihe zu der ersten, so finden wir, nach Teilung durch  $x_4$ ,

$$\left| \begin{array}{cccc} 0 & , & -\alpha_1 x_3 x_4, & -\alpha_2 x_3 x_4, & \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_4 \\ -(\alpha_3 x_2 + \alpha_2 x_3) & , & \alpha_3 x_4 & , & -\alpha_1 x_2 & , & \alpha_1 \\ -(\alpha_3 x_1 + \alpha_1 x_3) & , & -\alpha_2 x_1 & , & \alpha_3 x_4 & , & \alpha_2 \\ \alpha_3 & , & \alpha_2 & , & \alpha_1 & , & 0 \end{array} \right| = 0.$$

Addiren wir zu der zweiten Horizontalreihe  $x_2$  mal und zu der dritten  $x_1$  mal die vierte, so folgt

$$\left| \begin{array}{cccc} 0 & , & -\alpha_1 x_3 x_4 & , & -\alpha_2 x_3 x_4 & , & \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_4 \\ -\alpha_2 x_3, & \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_4, & 0 & , & \alpha_1 & & \\ -\alpha_1 x_3, & 0 & , & \alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_4, & \alpha_2 & & \\ \alpha_3 & , & \alpha_2 & , & \alpha_1 & , & 0 \end{array} \right| = 0. \quad (155)$$

Diese Gleichung ist vom *dritten* Grade und vertritt die Regelfläche der Strahlen, welche auf dem durch  $X_1$ ,  $X_2$  und  $X_3$  gelegten Kegelschnitt ruhen. Vertauschen wir in (155)  $x_3$  und  $x_4$ , so erhalten wir die Gleichung (78); es ist ja auch der durch  $X_1$ ,  $X_2$  und  $X_3$  hindurchgehende Kegelschnitt das Bild derjenigen Gerade in  $\omega_0$ , welche durch

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_4 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

gegeben ist. Die hier untersuchte Regelfläche ist also mit der axialen Regelfläche der genannten Gerade identisch.

Für die Eigenschaften dieser Fläche dürfen wir somit auf die in § 11 gegebenen Darlegungen hinweisen.

§ 17. Die obigen analytischen Untersuchungen haben bis jetzt nur die rein geometrischen Eigenschaften der mit dieser Congruenz zusammenhangenden Gebilde erörtert. Es liegt nun nahe uns auch um die Gestalt dieser Gebilde zu kümmern. Diese Gestalt lässt sich freilich im Allgemeinen sehr bequem erkennen, wenn die Gleichungen der Gebilde auf ein rechtwinkliges Axenkreuz bezogen sind, und zwar mittels dieser Transformationsformeln:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{x + iy}{c}, \\ x_2 &= \frac{x - iy}{c}, \\ x_3 &= \frac{h - z}{h}, \\ x_4 &= \frac{z}{h}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (156)$$

In den vorliegenden Untersuchungen aber würde eine derartige Transformation der Übersichtlichkeit der Gleichungen bedeutend schaden, weil eben die gewählten Coordinaten am meisten der Beschaffenheit der betreffenden Gebilde entsprechen.

Wir ziehen deshalb die homogenen Gleichungen vor, und wollen aus ihnen die Gestalt der Figuren zu erkennen versuchen. Dies ist nicht schwer, indem die Tatsache, dass die Punkte  $X_1$  und  $X_2$  mit den Kreispunkten und die Punkte  $X_3$  und  $X_4$  bez. mit den Nullpunkten der Abbildungsebenen  $[w]$  und  $[w']$  identisch sind, uns sofort über die Gestalt der Gebilde Aufschluss giebt.

In dem Folgenden beabsichtigen wir nun die wichtigsten Gleichungen in Hinsicht auf die Gestalt zu deuten, wobei wir gleichfalls die Resultate allgemeiner Art kurz zusammenfassen werden.

a). Der Feldgrad der Congruenz ist *zwei*, ihr Bündelgrad *vier*, ihr Axengrad *zwei*.

Um über den Gang der Strahlen eine möglichst klare Vorstellung zu gewinnen, betonen wir, dass von den vier Strahlen, welche nach einen willkürlichen reellen Punkt zielen, *stets nur zwei reell sind*. Dies ergibt sich durch die folgende Überlegung.

Ein Strahl  $p$  ist reell, wenn er eine reelle Spur in  $\omega_\infty$  hat, d. h. wenn die Grössen  $p_1 = \frac{x_1}{x_3} = \frac{x + iy}{c}$ ,  $p_2 = \frac{x_2}{x_3} = \frac{x - iy}{c}$  conjugirt complex sind.

Es seien  $x_0, y_0, z_0$  die Coordinaten von  $T$ ; so werden  $p_1$  und  $p_2$  durch

$$\frac{x_0 + iy_0}{c} = p_1 \cdot \frac{h - z_0}{h} + \frac{1}{p_1} \cdot \frac{z_0}{h},$$

$$\frac{x_0 - iy_0}{c} = p_2 \cdot \frac{h - z_0}{h} + \frac{1}{p_2} \cdot \frac{z_0}{h},$$

oder durch

$$c(h - z_0)p_1^2 - h(x_0 + iy_0)p_1 + cz_0 = 0, \quad (157)$$

$$c(h - z_0)p_2^2 - h(x_0 - iy_0)p_2 + cz_0 = 0 \quad (158)$$

bestimmt.

Weil die Coefficienten der Gleichung (158) den analogen Coefficienten der Gleichung (157) conjugirt sind, so sind auch die Wurzeln von (158) den Wurzeln von (157) conjugirt.

Nennen wir also die Wurzeln von (157)

$$\alpha_1 + i\beta_1, \quad \alpha_2 + i\beta_2,$$

so sind die Wurzeln von (158)

$$\alpha_1 - i\beta_1, \quad \alpha_2 - i\beta_2.$$

Es ist demnach zweimal ein Wert von  $p_2$  einem Werte von  $p_1$  conjugirt; daher sind von den vier Spuren der durch  $(x_0, y_0, z_0)$  gehenden Strahlen zwei reell, d.h. nur zwei der vier auf  $(x_0, y_0, z_0)$  ruhenden Strahlen sind reell.

b) Singuläre Ebenen sind:

1° die Ebene  $[w]$  mit drei Strahlenbüscheln, deren Scheitel in den Kreispunkten  $I$  und  $J$  und in dem Nullpunkte  $O$  liegen;

2° die Ebene  $[w']$  mit drei Strahlenbüscheln, deren Mittelpunkte sich im Nullpunkte  $O'$  und in den Kreispunkten  $I$  und  $J$  befinden;

3° die Ebene der reellen Axen ( $x_1 = x_2$ ) mit einem Strahlensystem der zweiten Klasse, welches einen Kegelschnitt  $e$  umhüllt; die Gleichungen von  $e$  lauten

$$\left. \begin{aligned} h^2 x^2 + 4c^2 z^2 - 4c^2 hz &= 0, \\ y &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (159)$$

der Kegelschnitt  $e$  ist daher eine *Ellipse*, welche  $OX$  in  $O$  und  $O'X'$  in  $O'$  berührt und deren Mittelpunkt mit dem Punkte

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \frac{h}{2},$$

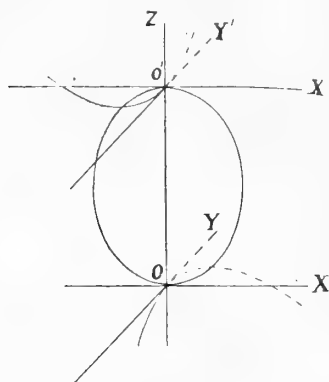


Fig. 7.



d. h. der Mitte von  $OO'$  identisch ist;

4° die Ebene der imaginären Axen ( $x_1 = -x_2$ ) mit einem Strahlengebilde zweiter Klasse, welches einen Kegelschnitt  $e'$  umhüllt; die Kurve  $e'$  wird durch

$$\left. \begin{aligned} h^2 y^2 - 4 c^2 z^2 + 4 c^2 h z &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (160)$$

dargestellt, und ist eine *Hyperbel*, welche  $OY$  in  $O$ ,  $O'Y'$  in  $O'$  berührt und ebenfalls die Mitte von  $OO'$  zum Mittelpunkt hat;

5°. jede Ebene, welche einen Congruenzstrahl mit einem der Kreispunkte  $I$  oder  $J$  verbindet; sie trägt ein Strahlengebilde zweiter Klasse, welches einen Kegelschnitt umhüllt.

c) Singuläre Punkte sind:

1° der Punkt  $O$  mit einem Strahlenbüschel in der Ebene  $[w]$ ;

2° der Punkt  $O'$  mit einem Strahlenbüschel in der Ebene  $[w']$ ;

3° die beiden Kreispunkte  $I$  und  $J$  in den Ebenen  $[w]$  und  $[w']$  mit Strahlenbüscheln in diesen Ebenen.

d) Alle Congruenzstrahlen berühren zwei imaginäre Kegel (Cylinder), die bez. in den Kreispunkten  $I$  und  $J$  ihre Spitzen haben. Die Berührungspunkte (*Brennpunkte*) der Congruenzstrahlen sind im Allgemeinen imaginär. Die beiden Cylinder bilden zusammen die *Fokalfläche*.

Die Fokalcyylinder sind durch

$$\left. \begin{aligned} \frac{(x + iy)^2}{c^2} - \frac{4 z (h - z)}{h^2} &= 0, \\ \frac{(x - iy)^2}{c^2} - \frac{4 z (h - z)}{h^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (161)$$

angewiesen, sodass ihre Gesamtheit, die Fokalfläche, durch

$$\frac{(x^2 + y^2)^2}{c^4} - \frac{8 x z (h - z)}{c^2 h^2} + \frac{16 z^2 (h - z)^2}{h^4} = 0 \quad (162)$$

dargestellt wird.

e) Die Fokalfläche trägt zwei quadratische Doppelkurven, welche ihren einzigen reellen Bestandteil bilden.

Der eine Kegelschnitt liegt in der Ebene ( $y = 0$ ) der reellen Axen und ist mit der durch

$$\left. \begin{aligned} h^2 x^2 + 4 c^2 z^2 - 4 c^2 h z &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (159)$$

dargestellten Ellipse  $e$  identisch.

Der andere Kegelschnitt liegt in der Ebene ( $x = 0$ ) der imaginären Axen und fällt mit der durch

$$\left. \begin{aligned} h^2 y^2 - 4 c^2 z^2 + 4 c^2 h z &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (160)$$

bestimmten Hyperbel  $e'$  zusammen.

f). Die axiale Regelfläche einer willkürlichen Gerade  $l$ , die  $[w]$  in  $A$  und  $[w']$  in  $B'$  schneidet, ist eine Fläche vom *sechsten* Grade, auf welcher  $l$  eine *vierfache* Gerade ist. Zwei der vier Blätter sind aber stets imaginär.

Der Schnitt in  $[w]$  enthält die drei Geraden  $AO$ ,  $AI$  und  $AJ$  und eine kubische Kurve (siehe (19) S. 39).

Diese kubische Kurve ist circular und geht durch die Punkte  $O$ ,  $A$ , und den Bildpunkt  $B$  der Spur  $B'$  in  $[w']$ . Der Punkt  $B$  ist Tangentialpunkt der Kreispunkte.

Die Tangente in  $O$  ist die axiale Projektion aus  $OO'$  des in  $[w']$  liegenden Bildes der Gerade  $OA$ .

Die Tangente in  $A$  ist die axiale Projektion aus der Axe  $l$  auf die Ebene  $[w]$  des  $A$  zugeordneten Punktes  $A'$ .

Die axiale Regelfläche von  $l$  enthält eine circulare kubische Doppelkurve, welche  $l$  zweifach schneidet.

Wenn die Gerade  $l$  die Gerade  $OO'$  schneidet, so wird die Doppelkurve eine kubische circulare *Plankurve* mit einem Doppelpunkt auf  $l$ .

Wenn die Gerade  $l$  ( $l_\mu$ ) den Ebenen  $[w]$  und  $[w']$  parallel ist, und ihr Schnittpunkt mit der unendlich fernen Gerade der Ebenen  $[w]$  und  $[w']$  mit  $L_\mu$  bezeichnet wird, so geht die kubische Kurve in  $[w]$  durch  $L_\mu$ , während ihre Tangente in diesem Punkte die Projektion von  $l_\mu$  aus  $O'$  auf  $[w]$  ist. Der gemeinschaftliche Tangentialpunkt der Kreispunkte liegt nun in  $O$ .

Die Doppelkurve ist hier aus einem Kegelschnitt und der unendlich fernen Gerade der Ebenen  $[w]$  und  $[w']$  zusammengesetzt. Die Richtung des Schnittpunktes dieser beiden Bestandteile ist zur Richtung von  $l_\mu$  rechtwinklig. Der Doppelkegelschnitt schneidet natürlich auch die Gerade  $l_\mu$ .

Wenn  $l$  der Ebene  $[w]$  parallel ist und überdies  $OO'$  schneidet, so ergibt sich die Tangente in  $O$  an der kubischen Kurve in  $[w]$  als die axiale Projektion aus  $OO'$  auf  $[w]$  derjenigen in  $[w']$  liegenden Gerade, welche das Bild ist der mit  $l_\mu$  parallelen durch  $O$  gehenden Gerade in  $[w]$ , während die Asymptoten alle nach  $O$  convergiren. Die Doppelkurve ist jetzt aus einem der Ebene  $[w]$  parallelen Kegel-

schnitte und der unendlich fernen Gerade von  $[w]$  zusammengesetzt.

g) Die axiale Regelfläche einer Gerade  $l$ , welche in der Ebene der reellen Axen liegt, besteht aus der zweifach zu zählenden Ebene der reellen Axen und einer *biquadratischen* Fläche, welche  $l$  als *Doppelgerade* trägt.

Die kubische Kurve in  $[w]$  ist jetzt ausgeartet in die Gerade  $OX$  und in einen Kreis, dessen Mittelpunkt  $B$  der Bildpunkt der Spur  $B'$  von  $l$  in  $[w']$  ist. Der Kreis und die isotrope Gerade  $AI$  schneiden sich und die isotrope Gerade  $OJ$  im nämlichen Punkte  $A_1$ . Ebenso treffen der Kreis und die isotrope Gerade  $AJ$  sich und die isotrope Gerade  $OI$  in demselben Punkte  $A_2$ . Der Schnitt der Regelfläche mit  $[w]$  ist aus dem oben erwähnten Kreis und den beiden isotropen Geraden  $AI$  und  $AJ$  zusammengesetzt.

Die Schnittkurve in  $[w']$  hat offenbar dieselbe Gestalt. Auf der biquadratischen Fläche befindet sich noch ein Doppelkreis, welcher die Gerade  $l$  in einem Punkte  $C_\mu$  schneidet.

Der Kreis schneidet die Ebene der reellen Axen, ausser  $C_\mu$ , noch im Pole  $L$  von  $l$  im Bezug auf die Fokalellipse  $e$ .

h. Die axiale Regelfläche eines Congruenzstrahles  $s$  ist eine quadratische Fläche.

Der Schnitt in  $[w]$  besteht aus der Gerade, welche  $O$  mit der Spur  $S$  von  $s$  in  $[w]$  verbindet, und aus der orthogonalen Projektion derjenigen in  $[w']$  liegenden Gerade, welche  $O'$  mit der Spur  $S'$  von  $s$  in  $[w']$  vereinigt.

i). Die axiale Regelfläche eines in der Ebene der reellen Axen befindlichen Congruenzstrahles besteht nur aus dieser, doppelt zu zählenden Ebene.

j). Die axiale Regelfläche einer in  $[w]$  liegenden Gerade  $m$  ist vom dritten Grade. Sie trägt  $m$  als *einfache* Leitlinie.

Der Schnitt in  $[w]$  ist aus der Gerade  $m$  und aus den beiden Geraden  $IM_1$  und  $JM_2$  zusammengesetzt, wo  $M_1$  den Schnittpunkt von  $m$  mit  $OJ$  und  $M_2$  denjenigen von  $m$  mit  $OI$  bezeichnet. Die beiden Geraden  $IM_1$  und  $JM_2$  schneiden sich in einem Punkte  $G$ , welcher das Spiegelbild des Nullpunktes  $O$  in Bezug auf  $m$  ist.

Der Schnitt in  $[w']$  besteht aus dem Bilde derjenigen durch  $O$  gehenden Gerade, welche mit  $m$  parallel ist, und aus einem durch  $O'$  gehenden Kreis  $\mu$ , welcher die Gerade  $m$  abbildet. Beide Linien schneiden sich, ausser  $O'$ , noch in einem Punkte  $H'$ .

Die *Doppelgerade*  $d_m$  verbindet  $G$  mit  $H'$ .

Die *Zwickpunkte*  $K$  und  $K'$  sind die Schnitte von  $d_m$  mit den Ebenen der reellen und imaginären Axen.

Die *Torsallinien*  $t$  und  $t'$  sind bez. die Tangenten in  $K$  an der

Fokalellipse in der Ebene der reellen Axen und in  $K'$  an der Fokalhyperbel in der Ebene der imaginären Axen.

Die *Torsalpunkte*  $T_m$  und  $T'_m$  sind die Schnitte von  $m$  bez. mit der reellen und der imaginären Axe in  $[w]$ .

k). Wenn wir die Gerade  $m$  um einen Punkt  $A$  rotiren lassen, so beschreibt die Doppelgerade  $d_m$  eine kubische Regelfläche.

Der Schnitt dieser Fläche mit  $[w]$  besteht aus der Gerade  $OA$  und einem Kreis  $\gamma_\infty$ , welcher durch  $O$  geht und seinen Mittelpunkt in  $A$  hat.

Die Schnittkurve in  $[w']$  ist eine circulare kubische Kurve, welche in  $O'$  einen Doppelpunkt hat, mit den Coordinatenaxen als Tangenten. Ihre reelle Asymptote verläuft parallel mit  $OA$ . Der Tangentialpunkt der Kreispunkte ist dem Punkte  $A$  zugeordnet.

Der Kreis  $\gamma_\infty$  und die Gerade  $OA$ , welche zusammen den Schnitt in  $[w]$  bilden, treffen sich, ausser  $O$ , im Punkte  $B$  der Geraden  $OA$ , für welchen  $AB = OA$  ist.

Die *Doppelgerade*  $\Delta$  der Regelfläche ( $d_m$ ) verbindet  $O'$  mit  $B$ .

Die *einfache Leitlinie* von ( $d_m$ ) ist mit dem Congruenzstrahle  $a = AA'$  identisch.

Die *Zwickpunkte*  $K_1$  und  $K_2$  sind die Punkte, wo  $\Delta$ , ausser  $O'$ , die Fokalfäche trifft. Sie sind imaginär.

Die beiden *Torsallinien*  $f_1$  und  $f_2$  verbinden  $K_1$  (auf  $F_1$ ) mit  $I (= X_1)$  und  $K_2$  (auf  $F_2$ ) mit  $J (= X_2)$ .

Die *Torsalpunkte*  $A_{f_1}$  und  $A_{f_2}$  sind die beiden Brennpunkte von  $a$ .

Wenn der Punkt  $A$  die Ebene  $[w]$  durchläuft, so beschreibt  $\Delta$  den Strahlenbündel  $O'$  und  $a$  die Congruenz.

l). Wir wollen jetzt die Regelfläche betrachten, welche erzeugt wird durch die auf einem durch  $X_1$  und  $X_2$  gelegten Kegelschnitt  $\gamma_\mu$  ruhenden Strahlen. Dieser Kegelschnitt ist offenbar ein Kreis in einer mit  $[w]$  parallelen Ebene.

Die betreffende Regelfläche ist vom *achten* Grade und hat in den Kreispunkten von  $[w]$  vierfache Punkte.

Der Schnitt in  $[w]$  besteht aus zwei Geraden durch  $I$ , zwei Geraden durch  $J$  und einer bicircularen biquadratischen Kurve, deren Tangenten in den Kreispunkten  $I$  und  $J$  identisch sind mit den Linien, welche diese Kurve zum vollständigen Schnitt ergänzen. Die beiden Geraden durch  $I$  können auch als diejenigen Congruenzstrahlen betrachtet werden, welche in dem  $I$  unmittelbar vorangehenden Punkte auf dem Kreise  $\gamma_\mu$  ruhen; analoges gilt für die beiden Geraden durch  $J$ .

m). Wenn der Kreis  $\gamma_\mu$  in  $[w]$  liegt, und daher mit  $\gamma_\infty$  bezeichnet werden muss, ist die Regelfläche vom *vierten* Grade, und hat die Kreispunkte von  $[w]$  zu Doppelpunkten.

Der Schnitt in  $[w]$  besteht aus dem Kreis  $\mathcal{V}_\infty$  und aus den beiden Geraden, welche die Kreispunkte  $I$  und  $J$  bez. mit den Schnittpunkten  $M_1$  und  $M_2$  von  $\mathcal{V}_\infty$  mit  $OJ$  und  $OI$  verbinden;  $M_1 I$  schneidet  $M_2 J$  in  $A$ .

Der Schnitt in  $[w']$  besteht aus dem Kreis, der  $\mathcal{V}_\infty$  abbildet, und aus zwei isotropen Geraden, welche nach dem Bildpunkte  $B'$  des Mittelpunktes  $B$  von  $\mathcal{V}_\infty$  convergiren. Der Bildkreis von  $\mathcal{V}_\infty$  hat seinen Mittelpunkt in dem  $A$  zugeordneten Punkte  $A'$ .

Auf der Regelfläche liegt noch eine *kubische Doppelkurve*, welche circular ist und durch die Punkte  $A$  und  $B'$  hindurchgeht.

Jeder zu  $[w]$  parallele Schnitt ist eine *bicirculare biquadratische* Kurve mit *Doppelpunkt*.

Dieser Doppelpunkt ist die Spur der Doppelkurve in der Schnittebene.

n). Falls der Mittelpunkt  $B$  von  $\mathcal{V}_\infty$  in  $O$  liegt, ist der Schnitt in  $[w]$  aus dem Kreis  $\mathcal{V}_\infty$  und aus der doppelt gezählten unendlich fernen Gerade zusammengesetzt.

Die Schnittkurve in  $[w']$  besteht aus der doppelt zu zählenden unendlich fernen Gerade und aus dem Bildkreis von  $\mathcal{V}_\infty$ .

Die Doppelkurve ist hier in drei Geraden ausgeartet, nämlich in die unendlich ferne Gerade von  $[w]$ , eine in der Ebene der reellen Axen befindliche, zu diesen parallele Gerade und eine in der Ebene der imaginären Axen liegende, zu diesen parallele Gerade.

o). Wenn der Kreis  $\mathcal{V}_\infty$  den Punkt  $O$  enthält, ist seine Regelfläche vom *dritten* Grade. Sie ist mit der axialen Regelfläche derjenigen in  $[w']$  liegenden Gerade identisch, welche den gegebenen Kreis zur Bildkurve hat.

Die Umformungen der Gleichungen in solche mit triorthogonalen Coordinaten sind hier fast gänzlich unterlassen, und zwar deshalb, weil die meisten Gleichungen dadurch viel weniger übersichtlich werden. Sollte es sich um die *Dimensionen* der Figuren handeln, so kann man die entsprechenden Substitutionen ausführen.

## B. Die Congruenz, welche der Funktion

$$w' = \frac{w^2}{c}$$

angehört.

§ 1. In den folgenden Betrachtungen werden wir im Allgemeinen die Reihenfolge der vorigen Abteilung beibehalten.

Ein Punkt  $P$  in  $\omega_\infty$  sei durch

$$\frac{x_1}{x_3} = p_1, \quad \frac{x_2}{x_3} = p_2, \quad x_4 = 0,$$

der zugeordnete Punkt  $P'$  in  $\omega_0$  durch

$$\frac{x_1'}{x_4'} = p_1', \quad \frac{x_2'}{x_4'} = p_2', \quad x_3' = 0$$

bestimmt.

Der Strahl  $PP'$  wird alsdann durch

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 x_3 + p_1' x_4, \\ x_2 &= p_2 x_3 + p_2' x_4 \end{aligned}$$

dargestellt.

Vermöge der Ausdrücke

$$p_1 = \frac{x_1}{x_3} = \frac{u + iv}{c} \quad \text{und} \quad p_1' = \frac{x_1'}{x_4'} = \frac{u' + iv'}{c}$$

gelten die folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{p_1'}{p_1^2} &= \frac{c(u' + iv')}{(u + iv)^2} = \frac{cw'}{w^2} = 1, \\ \frac{p_2'}{p_2^2} &= \frac{c(u' - iv')}{(u - iv)^2} = 1. \end{aligned}$$

Wir haben deshalb zu setzen

$$\begin{aligned} p_1' &= p_1^2, \\ p_2' &= p_2^2, \end{aligned}$$

wonach die Gleichungen eines der Congruenz von  $w' = w^2 : c$  angehörenden Strahles diese Form erhalten:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= p_1 x_3 + p_1^2 x_4, \\ x_2 &= p_2 x_3 + p_2^2 x_4. \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

§ 2. *Bündelgrad und Feldgrad.*

Der Bündelgrad wird ermittelt, wenn wir in (1) die Grössen  $x_1, x_2, x_3$  und  $x_4$  als feste Coordinaten betrachten und untersuchen, wie viel Combinationen  $(p_1, p_2)$  durch dieses Wertesystem bestimmt werden.

Wenn wir die Gleichungen (1) in der Form

$$\begin{aligned} x_4 p_1^2 + x_3 p_1 - x_1 &= 0, \\ x_4 p_2^2 + x_3 p_2 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$

schreiben, so leuchtet sofort ein, dass ein Punkt  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  zwei Werte für  $p_1$  und zwei Werte für  $p_2$  anweist; wir erhalten demnach vier Combinationen  $(p_1, p_2)$ . Diese bestimmen die Spuren  $P$  der vier Congruenzstrahlen, welche nach dem gegebenen Punkt zielen.

Wir sehen also, dass der *Bündelgrad vier* ist.

Eine Ebene, welche durch

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0$$

dargestellt wird, enthält einen Congruenzstrahl  $p$ , wenn sie dem Ebenenbüschel angehört, welcher  $p$  als Axe hat und durch die beiden Ebenen (1) bestimmt ist.

Es gilt daher die Identität

$$\begin{aligned} \lambda_1 (x_1 - p_1 x_3 - p_1^2 x_3) + \lambda_2 (x_2 - p_2 x_3 - p_2^2 x_4) &\equiv \\ &\equiv \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4, \end{aligned}$$

wonach

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha_1, \\ \lambda_2 &= \alpha_2, \\ -(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2) &= \alpha_3, \\ -(\lambda_1 p_1^2 + \lambda_2 p_2^2) &= \alpha_4. \end{aligned}$$

Die letzten zwei Gleichungen bestimmen die Werte von  $p_1$  und  $p_2$ , welche den in der gegebenen Ebene liegenden Strahlen entsprechen.

Den Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 &= 0, \\ \alpha_1 p_1^2 + \alpha_2 p_2^2 + \alpha_4 &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

wird durch zwei Paaren  $(p_1, p_2)$  Genüge geleistet.

Es liegen deshalb in der gegebenen Ebene zwei Congruenzstrahlen, d.h. der *Feldgrad* ist zwei.

## § 3. Die Fokalfläche.

Von den beiden Gleichungen (1), welche zusammen einen Congruenzstrahl  $p$  bestimmen, stellt die erste eine Ebene durch  $X_2$ , die zweite eine Ebene durch  $X_1$  dar.

Wenn wir  $p_1$  alle Werte erteilen, wird die erste Ebene einen Kegel mit  $X_2$  als Spitze umhüllen, dessen Gleichung wir erhalten, indem wir die Diskriminante der genannten Gleichung verschwinden lassen. Sie lautet deshalb

$$4 x_1 x_4 + x_3^2 = 0.$$

Der durch die Ebene  $x_1 = p_1 x_3 + p_1^2 x_4$  umhüllte Kegel ist daher vom zweiten Grade; er soll mit  $F_2$  bezeichnet werden.

Der durch die Ebene  $x_2 = p_2 x_3 + p_2^2 x_4$  umhüllte Kegel wird durch

$$4 x_2 x_4 + x_3^2 = 0$$

dargestellt, und hat seine Spitze in  $X_1$ .

Aus dem Vorgehenden erhellt, dass die eine Ebene, welche den Congruenzstrahl  $p$  trägt, den quadratischen Kegel  $F_2$ , die andere durch  $p$  gelegte Ebene den quadratischen Kegel  $F_1$  berührt. Der Congruenzstrahl  $p$  ist demnach eine gemeinschaftliche Tangente der beiden Kegel  $F_1$  und  $F_2$ .

Wir gelangen also zu der Einsicht, dass die Strahlen der Congruenz, welche der Beziehung  $w' = w^2 : c$  angehört, die gemeinschaftlichen Tangenten sind der beiden Kegel

$$\left. \begin{array}{l} F_1 \dots 4 x_2 x_4 + x_3^2 = 0, \\ F_2 \dots 4 x_1 x_4 + x_3^2 = 0. \end{array} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

Weil ein Punkt von  $F_1$  zwei zusammenfallende Strahlen trägt, und dasselbe von einem Punkte von  $F_2$  gilt, haben wir  $F_1$  und  $F_2$  als die beiden Bestandteile der Fokalfläche zu betrachten.

Auch hier sollen diese Kegel Fokalkegel genannt werden.

Die beiden Fokalkegel bestimmen zusammen einen Büschel quadratischer Flächen, welcher durch

$$\lambda_1 (4 x_1 x_4 + x_3^2) + \lambda_2 (4 x_2 x_4 + x_3^2) = 0$$

dargestellt wird.

Das durch  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$  angewiesene Gebilde hat die Gleichung

$$(x_1 - x_2) x_4 = 0.$$

Diese Fläche ist also in zwei Ebenen ausgeartet, welche zusam-



men die biquadratische Schnittkurve von  $F_1$  und  $F_2$  enthalten müssen.

Die durch

$$x_1 - x_2 = 0$$

dargestellte Ebene  $\varepsilon$  trägt deshalb einen Kegelschnitt  $e$ , welcher sowohl  $F_1$  wie  $F_2$  angehört.

Die Ebene  $\omega_\infty (x_4 = 0)$  berührt die beiden Kegel in der Gerade  $X_1 X_2$ .

Wir sehen somit, dass die beiden Fokalkegel sich und  $\omega_\infty$  längs  $X_1 X_2$  berühren und überdies noch einen Kegelschnitt  $e$  gemeinsam haben, welcher sich in der Ebene

$$\varepsilon \dots x_1 - x_2 = 0. \quad (4)$$

befindet

Der Fokalkegel  $F_1$  berührt die Coordinatenebene  $X_1 X_3 X_4 (x_2 = 0)$  in  $X_1 X_4$ , während  $F_2$  die Ebene  $X_2 X_3 X_4 (x_1 = 0)$  in  $X_2 X_4$  berührt.

Der Kegelschnitt  $e$  berührt deshalb die Gerade  $X_3 X_4$  in  $X_4$  und die Gerade  $X_3 E$  in  $E (1, 1, 0, 0)$ .

#### § 4. *Singuläre Elementen.*

Eine Ebene ist singulär, enthält also unendlich viele Strahlen, wenn die beiden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 &= 0, \\ \alpha_1 p_1^2 + \alpha_2 p_2^2 + \alpha_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

eine der Grössen  $p_1$  und  $p_2$ , oder beide, unbestimmt lassen.

Nach Elimination von  $p_2$  finden wir

$$\alpha_1 (\alpha_1 + \alpha_2) p_1^2 + 2 \alpha_1 \alpha_3 p_1 + (\alpha_2 \alpha_4 + \alpha_3^2) = 0.$$

Die Bedingungen sind daher

$$\begin{aligned} \alpha_1 (\alpha_1 + \alpha_2) &= 0, \\ \alpha_1 \alpha_3 &= 0, \\ \alpha_2 \alpha_4 + \alpha_3^2 &= 0. \end{aligned}$$

Diesen Gleichungen wird genügt

1° durch

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_3 = \sqrt{-\alpha_2 \alpha_4},$$

wonach (siehe (2))

$$\alpha_2 : \alpha_3 : \alpha_4 = 1 : -p_2 : -p_2^2;$$

die Gleichung der Ebene wird daher

$$x_2 - p_2 x_3 - p_2^2 x_4 = 0.$$

Diese Gleichung (siehe (1)) stellt die Berührungsebene des Fokalkegels  $F_1$  dar, welche den Strahl  $p$  enthält, also die Ebene, welche diesen Strahl mit  $X_1$  verbindet.

Wir erkennen also, dass jede Ebene, welche einen Congruenzstrahl mit  $X_1$  verbindet, singulär ist. Die in dieser Ebene befindlichen Strahlen umhüllen offenbar den Kegelschnitt, in dem der Fokalkegel  $F_2$  die Ebene  $(p, X_1)$  schneidet. Jede Ebene  $(p, X_1)$  ist demnach eine singuläre Ebene mit einem Strahlensystem von der zweiten Klasse.

Auf analoger Weise finden wir, dass auch jede Ebene, welche einen Strahl  $p$  mit  $X_2$  verbindet, singulär ist und ein Strahlensystem zweiter Klasse enthält.

Betrachten wir besonders die Ebene  $(p, X_1)$ , in welcher der durch  $p_2 = \infty$  bestimmte Strahl liegt, so erkennen wir (siehe (1)) in dieser die Ebene  $x_4 = 0$ , d. h.  $\omega_\infty$ .

Die Ebene  $\omega_\infty$  ist also auch singulär. Wir werden das in ihr befindliche Strahlensystem später erörtern.

2°. Den Beziehungen zwischen den Grössen  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  und  $\alpha_4$ , welche  $p_1$  unbestimmt lassen, wird auch genügt durch

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 &= 0, \\ \alpha_3 &= 0, \\ \alpha_4 &= 0.\end{aligned}$$

Diese Bedingungen liefern die Ebene

$$x_1 - x_2 = 0.$$

Die Ebene  $\varepsilon$  ist also auch singulär. Dies wurde bereits früher erkannt, als sich zeigte, dass die Ebene  $\varepsilon$  die beiden Fokalkegel im nämlichen Kegelschnitte  $e$  schneidet.

Die singulären Punkte werden gefunden durch die Überlegung, dass in

$$\left. \begin{aligned}x_1 &= p_1 x_3 + p_1^2 x_4 \\ x_2 &= p_2 x_3 + p_2^2 x_4\end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

entweder  $p_1$  oder  $p_2$  unbestimmt werden muss.

Es leuchtet ein, dass  $p_1$  unbestimmt ist, wenn

$$x_1 = x_3 = x_4 = 0;$$

der Punkt  $X_2$  ist demnach singulär.

Auf analoger Weise gelangen wir zu der Überzeugung, dass auch  $X_1$  ein singulärer Punkt ist.

Wenn wir die Gleichungen (1) subtrahieren, so folgt

$$x_1 - x_2 = (p_1 - p_2) \{x_3 + (p_1 + p_2) x_4\} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Ein Strahl  $p$  ist durch  $p_1$  und  $p_2$ , also auch durch  $p_1 - p_2$  und  $p_1 + p_2$  bestimmt.

Wenn wir aber in (5)

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0$$

setzen, so wird die Grösse  $p_1 - p_2$  unbestimmt.

Der Punkt ( $x_1 = x_2$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 0$ ), d. h. der Punkt  $E$  ist daher auch singulär.

Weil die Congruenzstrahlen die beiden Fokalkegel berühren, und die drei Punkte  $X_1$ ,  $X_2$  und  $E$  auf die Gerade  $X_1 X_2$  liegen, während überdies die beiden Fokalkegel durch  $\omega_\infty$  längs  $X_1 X_2$  berührt werden, so werden die Strahlensysteme, welche durch die singulären Punkte  $X_1$ ,  $X_2$  und  $E$  gehen, in ihrer ganzen Ausdehnung in  $\omega_\infty$  liegen müssen.

Es sind deshalb Strahlenbüschel mit  $X_1$ ,  $X_2$  und  $E$  als Scheitel.

Wir werden zunächst zeigen, dass diese drei Strahlenbüschel zusammen das ganze Strahlensystem bilden, welches sich in der singulären Ebene  $\omega_\infty$  befindet.

Ein Strahl  $p$  wird auch bestimmt durch seine Spur  $P'$  in  $\omega_0$ , welche die Coordinaten

$$p_1' = \frac{y_1'}{y_4}, \quad p_2' = \frac{y_2'}{y_4}, \quad y_3' = 0$$

hat.

Wenn wir  $p_1$  und  $p_2$  bez. durch  $p_1'^{\frac{1}{2}}$  und  $p_2'^{\frac{1}{2}}$  ersetzen, so gestalten die Gleichungen (1) sich wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= p_1'^{\frac{1}{2}} x_3 + p_1' x_4, \\ x_2 &= p_2'^{\frac{1}{2}} x_3 + p_2' x_4, \end{aligned} \right\}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} (x_1 - p_1' x_4)^2 &= p_1' x_3^2, \\ (x_2 - p_2' x_4)^2 &= p_2' x_3^2. \end{aligned} \right\}$$

Die Substitution  $p_1' = y_1' : y_4'$ ,  $p_2' = y_2' : y_4'$  liefert

$$\left. \begin{aligned} (y_4' x_1 - y_1' x_4)^2 &= y_1' y_4' x_3^2, \\ (y_4' x_2 - y_2' x_4)^2 &= y_2' y_4' x_3^2. \end{aligned} \right\}$$

Wir legen nunmehr den Punkt  $T(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , der den Strahl trägt, in einen Punkt  $Q$  der Ebene  $\omega_\infty$ , so dass  $x_4 = 0$  wird.

Die Spur  $(y_1', y_2', y_4')$  in  $\omega_0$  ist alsdann durch

$$\left. \begin{aligned} y_4' (y_4' x_1^2 - y_1' x_3^2) &= 0; \\ y_4' (y_4' x_2^2 - y_2' x_3^2) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

bestimmt.

Diesen Gleichungen entsprechen vier Punkte, nl.:

$$1^\circ \quad \left\{ \begin{aligned} y_4' x_1^2 - y_1' x_3^2 &= 0, \\ y_4' x_2^2 - y_2' x_3^2 &= 0; \end{aligned} \right.$$

$$2^\circ \quad \left\{ \begin{aligned} y_4' x_2^2 - y_2' x_3^2 &= 0, \\ y_4' &= 0; \end{aligned} \right.$$

$$3^\circ \quad \left\{ \begin{aligned} y_4' x_1^2 - y_1' x_3^2 &= 0, \\ y_4' &= 0; \end{aligned} \right.$$

$$4^\circ \quad \left\{ \begin{aligned} y_4' &= 0, \\ y_4' &= 0. \end{aligned} \right.$$

Der erste Punkt hat die Coordinaten

$$\frac{y_1'}{y_4'} = \frac{x_1^2}{x_3^2}, \quad \frac{y_2'}{y_4'} = \frac{x_2^2}{x_3^2},$$

und ist somit der  $Q$  zugeordnete Punkt  $Q'$ .

Die Verbindungslinie  $q = QQ'$  ist der Congruenzstrahl, welcher  $Q$  mit seinem Bilde  $Q'$  vereinigt.

Der zweite Punkt ist  $X_1$ ; der zweite durch  $Q$  gehende Congruenzstrahl ist demnach die Gerade  $QX_1$ .

Der dritte Punkt ist  $X_2$ ; der dritte nach  $Q$  zielende Congruenzstrahl ist also  $QX_2$ .

Der vierte Punkt liegt auf  $X_1X_2$  und ist bis jetzt unbestimmt.

Wie in der vorigen Abteilung (§ 4), wird auch hier der Punkt  $T$  in der Nähe der Ebene  $\omega_\infty$  angenommen, wonach die Grössen  $y_4' : y_1$  und  $y_4' : y_2'$  bez. nach Potenzen von  $x_4 : x_1$  und  $x_4 : x_2$  entwickelt werden.

Wir setzen nun

$$\frac{y_4'}{y_1} = y, \quad \frac{x_4}{x_1} = x$$

und

$$y = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \dots$$

Man erhält dann aus

$$(y_4' x_1 - y_1' x_4)^2 = y_1' y_4' x_3^2$$

die Gleichungen

$$(y - x)^2 = y \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^2$$

und

$$\{\alpha + (\beta - 1)x + \gamma x^2 + \dots\}^2 = (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \dots) \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^2.$$

Durch Gleichsetzung der Coefficienten gleicher Potenzen von  $x$  bekommt man

$$\alpha^2 = \alpha \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^2,$$

$$2\alpha(\beta - 1) = \beta \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^2,$$

$$(\beta - 1)^2 + 2\alpha\gamma = \gamma \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^2.$$

Die Lösungen dieser Gleichungen sind die folgenden:

$$1^\circ \quad \alpha = \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^2,$$

wonach

$$y = \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^2 + \beta x + \gamma x^2 + \dots,$$

also für verschwindendes  $x$ :

$$y = \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^2,$$

oder

$$\frac{y_4'}{y_1'} = \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^2.$$

$$2^\circ \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2,$$

daher

$$y = \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2 \left(\frac{x_4}{x_1}\right)^2 = \left(\frac{x_4}{x_3}\right)^2,$$

oder

$$\frac{y_4'}{y_1'} = \left(\frac{x_4}{x_3}\right)^2.$$

Ebenso finden wir für das Verhältniss  $y_4' : y_2'$  zwei Werte, nl.:

$$1^\circ \quad \frac{y_4'}{y_2'} = \left(\frac{x_3}{x_2}\right)^2,$$

$$2^\circ \quad \frac{y_4'}{y_2'} = \left(\frac{x_4}{x_3}\right)^2.$$

Die vier Spuren werden ermittelt, indem man die zwei Werte für  $y_4' : y_1'$  mit den zwei Werten für  $y_4' : y_2'$  combinirt.

Die vier Spuren erhält man also für verschwindendes  $x$  ( $x_4 = 0$ ) aus

$$\begin{aligned} 1^\circ & \left\{ \begin{array}{l} \frac{y_4'}{y_1'} = \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^2, \\ \frac{y_4'}{y_2'} = \left(\frac{x_3}{x_2}\right)^2, \end{array} \right. & \text{d. h. } Q'; \\ 2^\circ & \left\{ \begin{array}{l} \frac{y_4'}{y_1'} = 0, \\ \frac{y_4'}{y_2'} = \left(\frac{x_3}{x_2}\right)^2, \end{array} \right. & \text{d. h. } X_1; \\ 3^\circ & \left\{ \begin{array}{l} \frac{y_4'}{y_1'} = \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^2, \\ \frac{y_4'}{y_2'} = 0, \end{array} \right. & \text{d. h. } X_2; \\ 4^\circ & \left\{ \begin{array}{l} \frac{y_4'}{y_1'} = \left(\frac{x_4}{x_3}\right)^2, \\ \frac{y_4'}{y_2'} = \left(\frac{x_4}{x_3}\right)^2, \end{array} \right. & \text{oder } \left\{ \begin{array}{l} y_1' = y_2', \\ y_4' = 0, \end{array} \right. \text{ d. h. } L'. \end{aligned}$$

Die vierte Spur ist demnach der Punkt  $E$ . Die vier durch  $Q$  hindurchgehenden Strahlen sind also  $QQ'$ ,  $QX_1$ ,  $QX_2$  und  $QE$ .

Von den vier Strahlen, welche auf dem in  $\omega_\infty$  liegenden Punkte  $Q$  ruhen, sind daher *drei* in  $\omega_\infty$  enthalten.

Die Ebene  $\omega_\infty$  trägt also drei Strahlenbüschel von Congruenzstrahlen, deren Scheitel in  $X_1$ ,  $X_2$  und  $E$  liegen.

Auch hier haben wir, zur Vorübung, die Beweisführung etwas breit gestaltet.

§ 5. Die axiale Regelfläche einer willkürlichen Gerade  $l$ .

Die Gerade  $l$  möge  $\omega_\infty$  in  $A \left( \frac{x_1}{x_3} = a_1, \frac{x_2}{x_3} = a_2, x_4 = 0 \right)$  und  $\omega_0$  in  $B' \left( \frac{x_1}{x_4} = b_1', \frac{x_2}{x_4} = b_2', x_3 = 0 \right)$  schneiden.

Ihre Gleichungen lauten demnach

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 x_3 + b_1' x_4, \\ x_2 &= a_2 x_3 + b_2' x_4. \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (6)$$

Wenn  $l$  durch den Congruenzstrahl  $p$  (welcher  $\omega_\infty$  in  $P(p_1, p_2)$  und  $\omega_0$  in  $P'(p_1', p_2')$  trifft) geschnitten wird, so muss (vergl. die analoge Stelle in Abteilung A, § 5, S. 35) der Gleichung

$$\frac{p_1' - b_1'}{p_1 - a_1} = \frac{p_2' - b_2'}{p_2 - a_2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (7)$$

oder, vermöge der Beziehungen

$$p_1' = p_1^2, \quad p_2' = p_2^2,$$

der Gleichung

$$(p_2 - a_2)(p_1^2 - b_1') = (p_1 - a_1)(p_2^2 - b_2') \quad \cdot \cdot \quad (8)$$

genügt werden, indem diese die zwischen den Coordinaten  $p_1$  und  $p_2$  (der Spur  $P$  in  $\omega_\infty$ ) bestehenden Beziehung ausdrückt, falls der Strahl  $p$  die Gerade  $l$  schneidet.

Die Gleichung der axialen Regelfläche wird ermittelt, indem man aus den Gleichungen (1) und (8)  $p_1$  und  $p_2$  eliminiert.

Die Gleichung (8) lässt sich wie folgt schreiben:

$$p_1^2 p_2 - p_1 p_2^2 - a_2 p_1^2 + a_1 p_2^2 + b_2' p_1 - b_1' p_2 - (a_1 b_2' - a_2 b_1') = 0. \quad (9)$$

Aus den Gleichungen (1) ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} x_4 p_1^2 &= -x_3 p_1 + x_1, \\ x_4 p_2^2 &= -x_3 p_2 + x_2. \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (10)$$

Multiplizieren wir (9) mit  $x_4$  und ersetzen  $x_4 p_1^2$  und  $x_4 p_2^2$  durch ihre Ausdrücke (10), so finden wir

$$(-x_2 + a_2 x_3 + b_2' x_4) p_1 + (x_1 - a_1 x_3 - b_1' x_4) p_2 + \\ + \{-a_2 x_1 + a_1 x_2 - (a_1 b_2' - a_2 b_1') x_4\} = 0.$$

Setzen wir, der Kürze halber,

$$\left. \begin{aligned} -x_2 + a_2 x_3 + b_2' x_4 &= \beta_2, \\ x_1 - a_1 x_3 - b_1' x_4 &= \beta_1, \\ -a_2 x_1 + a_1 x_2 - (a_1 b_2' - a_2 b_1') x_4 &= \beta_0, \end{aligned} \right\} . \quad (11)$$

so bekommen wir

$$\beta_2 p_1 + \beta_1 p_2 + \beta_0 = 0. \quad (12)$$

Wir versuchen wiederum mit Hülfe der Ausdrücke (10) vier Gleichungen in  $p_1$ ,  $p_2$  und  $p_1 p_2$  aufzustellen, aus welchen wir diese Grössen eliminiren können.

Multiplizieren wir (12) mit  $x_4 p_1$ , so finden wir

$$\beta_2 x_4 p_1^2 + \beta_1 x_4 p_1 p_2 + \beta_0 x_4 p_1 = 0,$$

oder mittels (10),

$$-\beta_2 x_3 p_1 + \beta_2 x_1 + \beta_1 x_4 p_1 p_2 + \beta_0 x_4 p_1 = 0,$$

oder

$$\beta_1 x_4 p_1 p_2 + (-\beta_2 x_3 + \beta_0 x_4) p_1 + \beta_2 x_1 = 0. \quad (13)$$

Ebenso erhalten wir durch Multiplikation mit  $x_4 p_2$  schliesslich

$$\beta_2 x_4 p_1 p_2 + (-\beta_1 x_3 + \beta_0 x_4) p_2 + \beta_1 x_2 = 0. \quad (14)$$

Endlich multipliciren wir (13) mit  $p_2$ , wonach

$$\beta_1 x_4 p_1 p_2^2 + (-\beta_2 x_3 + \beta_0 x_4) p_1 p_2 + \beta_2 x_1 p_2 = 0,$$

oder, nach Verwendung von (10),

$$\{-(\beta_1 + \beta_2) x_3 + \beta_0 x_4\} p_1 p_2 + \beta_1 x_2 p_1 + \beta_2 x_1 p_2 = 0. \quad (15)$$

Die Elimination von  $p_1$ ,  $p_2$  und  $p_1 p_2$  aus (12), (13), (14) und (15) ergibt die folgende Gleichung

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 0 & , & \beta_2 & , & \beta_1 & , & \beta_0 \\ \beta_1 x_4 & , & -\beta_2 x_3 + \beta_0 x_4 & , & 0 & , & \beta_2 x_1 \\ \beta_2 x_4 & , & 0 & , & -\beta_1 x_3 + \beta_0 x_4 & , & \beta_1 x_2 \\ -(\beta_1 + \beta_2) x_3 + \beta_0 x_4 & , & \beta_1 x_2 & , & \beta_2 x_1 & , & 0 \end{vmatrix} = 0.$$



Wir ersetzen die zweite Horizontalreihe durch die Summe der zweiten und der dritten, und die dritte durch deren Differenz, und erhalten somit

$$\begin{vmatrix} 0 & , & \beta_2 & , & \beta_1 & , & \beta_0 \\ (\beta_1 + \beta_2)x_4 & , & -\beta_2x_3 + \beta_0x_4 & , & -\beta_1x_3 + \beta_0x_4 & , & \beta_2x_1 + \beta_1x_2 \\ (\beta_1 - \beta_2)x_4 & , & -\beta_2x_3 + \beta_0x_4 & , & +\beta_1x_3 - \beta_0x_4 & , & \beta_2x_1 - \beta_1x_2 \\ -(\beta_1 + \beta_2)x_3 + \beta_0x_4 & , & \beta_1x_2 & , & \beta_2x_1 & , & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn wir nun  $x_3$  mal die erste Horizontalreihe zu der zweiten addiren, so folgt

$$\begin{vmatrix} 0 & , & \beta_2 & , & \beta_1 & , & \beta_0 \\ (\beta_1 + \beta_2)x_4 & , & \beta_0x_4 & , & \beta_0x_4 & , & \beta_2x_1 + \beta_1x_2 + \beta_0x_3 \\ (\beta_1 - \beta_2)x_4 & , & -\beta_2x_3 + \beta_0x_4 & , & \beta_1x_3 - \beta_0x_4 & , & \beta_2x_1 - \beta_1x_2 \\ -(\beta_1 + \beta_2)x_3 + \beta_0x_4 & , & \beta_1x_2 & , & \beta_2x_1 & , & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \beta_2x_1 + \beta_1x_2 + \beta_0x_3 &= -x_1x_2 + a_2x_1x_3 + b_2'x_1x_4 + \\ + x_1x_2 - a_1x_2x_3 - b_1'x_2x_4 - a_2x_1x_3 + a_1x_2x_3 - (a_1b_2' - a_2b_1')x_3x_4 &= \\ = \{b_2'x_1 - b_1'x_2 - (a_1b_2' - a_2b_1')x_3\}x_4, \end{aligned}$$

oder, wenn wir

$$b_2'x_1 - b_1'x_2 - (a_1b_2' - a_2b_1')x_3 = \beta_3 \quad . \quad . \quad (16)$$

setzen,

$$\beta_2x_1 + \beta_1x_2 + \beta_0x_3 = \beta_3x_4 \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Substituieren wir diesen Ausdruck in die obige Gleichung, so erscheint diese teilbar durch  $x_4$ . Nach Teilung durch  $x_4$  erhalten wir

$$\Delta' \equiv \begin{vmatrix} 0 & , & \beta_2 & , & \beta_1 & , & \beta_0 \\ \beta_1 + \beta_2 & , & \beta_0 & , & \beta_0 & , & \beta_3 \\ (\beta_1 - \beta_2)x_4 & , & -\beta_2x_3 + \beta_0x_4 & , & \beta_1x_3 - \beta_0x_4 & , & \beta_2x_1 - \beta_1x_2 \\ -(\beta_1 + \beta_2)x_3 + \beta_0x_4 & , & \beta_1x_2 & , & \beta_2x_1 & , & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (18)$$

Die Grössen  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  und  $\beta_3$  sind alle linear in  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$ ; die Gleichung (18) ist demnach vom *sechsten* Grade.

Wenn wir  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  und  $\beta_3$  durch ihre Ausdrücke (11) und (16) ersetzen, so enthalten die Coefficienten der Gleichung (18) ausschliesslich die Grössen  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1'$  und  $b_2'$ , welche die Gerade  $l$  bestimmen.

Die axiale Regelfläche einer willkürlichen Gerade  $l$  ist offenbar vom *sechsten* Grade.

Wie in der vorigen Abteilung werden wir die Gleichung (18) umgestalten, indem wir die Kante  $X_3 X_4$  des Coordinatentetraeders in  $AB' \equiv l$  legen, und zwar mittels der Transformation

$$\begin{aligned}x_1 &= \xi_1 + a_1 \xi_3 + b_1' \xi_4, \\x_2 &= \xi_2 + a_2 \xi_3 + b_2' \xi_4, \\x_3 &= \xi_3, \\x_4 &= \xi_4.\end{aligned}$$

Die Gerade  $l$  wird nun durch

$$\left. \begin{aligned}\xi_1 &= 0, \\ \xi_2 &= 0\end{aligned} \right\}$$

dargestellt.

Die Ausdrücke für  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  und  $\beta_3$  werden nun

$$\begin{aligned}\beta_0 &= -a_2(x_1 - b_1' x_4) + a_1(x_2 - b_2' x_4) \\ &= -a_2(\xi_1 + a_1 \xi_3) + a_1(\xi_2 + a_2 \xi_3) = -a_2 \xi_1 + a_1 \xi_2, \\ \beta_1 &= \xi_1, \\ \beta_2 &= -\xi_2, \\ \beta_3 &= b_2'(x_1 - a_1 x_3) - b_1'(x_2 - a_2 x_3) \\ &= b_2'(\xi_1 + b_1' \xi_4) - b_1'(\xi_2 + b_2' \xi_4) = b_2' \xi_1 - b_1' \xi_2.\end{aligned}$$

Alle Elementen der Determinante enthalten also einen in  $\xi_1$  und  $\xi_2$  homogenen linearen Faktor. In der entwickelten Gleichung wird sich daher in jedem Glied ein in  $\xi_1$  und  $\xi_2$  biquadratischer Faktor vorfinden, wonach erschlossen wird, dass  $l$  auf ihrer axialen Regelfläche eine *vierfache* Gerade ist.

Den Schnitt der Regelfläche mit  $\omega_\infty$  finden wir, indem wir in (18)  $x_4 = 0$  setzen; wir bekommen dann

$$\begin{vmatrix} 0 & , & \beta_2 & , \beta_1 & , \beta_0 \\ \beta_1 + \beta_2 & , & \beta_0 & , \beta_0 & , \beta_3 \\ 0 & , & -\beta_2 x_3 & , \beta_1 x_3 & , \beta_2 x_1 - \beta_1 x_2 \\ -(\beta_1 + \beta_2) x_3 & , & \beta_1 x_2 & , \beta_2 x_1 & , 0 \end{vmatrix} = (\beta_1 + \beta_2) \begin{vmatrix} 0 & , \beta_2 & , \beta_1 & , \beta_0 \\ 1 & , 0 & , 0 & , \beta_3 \\ 0 & , -\beta_2 x_3 & , \beta_1 x_3 & , \beta_2 x_1 - \beta_1 x_2 \\ -x_3 & , \beta_1 x_2 + \beta_0 x_3 & , \beta_2 x_1 + \beta_0 x_3 & , 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder, da für  $x_4 = 0$  die Beziehungen

$$\begin{aligned}\beta_1 x_2 + \beta_0 x_3 &= -\beta_2 x_1 + \beta_3 x_4 = -\beta_2 x_1 \\ \beta_2 x_1 + \beta_0 x_3 &= -\beta_1 x_2 + \beta_3 x_4 = -\beta_1 x_2\end{aligned}$$

gelten,

$$(\beta_1 + \beta_2) \beta_1 \beta_2 \begin{vmatrix} 0, & 1, & 1, \beta_0 \\ 1, & 0, & 0, \beta_3 \\ 0, -x_3, & x_3, \beta_2 x_1 - \beta_1 x_2 \\ -x_3, -x_1, -x_2, 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Der Schnitt besteht also aus den drei Geraden

$$\beta_2 = 0, \beta_1 = 0, \beta_1 + \beta_2 = 0,$$

oder

$$\xi_2 = 0, \xi_1 = 0, \xi_1 = \xi_2,$$

oder endlich

$$AX_1, \quad AX_2, \quad AE,$$

und aus einer kubischen Kurve.

Die Gleichung der kubischen Kurve ergibt sich aus (9) nach der Substitution  $p_1 = x_1 : x_3$  und  $p_2 = x_2 : x_3$  (siehe zur Erläuterung Abt. A S. 39).

Die Substitution liefert

$$x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2 - a_2 x_1^2 x_3 + a_1 x_2^2 x_3 + b_2' x_1 x_3^2 - b_1' x_2 x_3^2 - (a_1 b_2' - a_2 b_1') x_3^3 = 0. \quad (19)$$

Diese Kurve enthält die Punkte  $X_1$ ,  $X_2$  und  $E$ , aber nicht den Punkt  $X_3$ .

Die Tangente in  $X_1$  ist durch

$$x_2 - a_2 x_3 = 0$$

angewiesen; sie ist offenbar mit  $AX_1$  identisch.

Ebenso fällt die Tangente in  $X_2$  mit  $AX_2$  zusammen.

Der Punkt  $A$  gehört auch der Kurve an; er ist der gemeinschaftliche Tangentialpunkt von  $X_1$  und  $X_2$ .

Die Kurve trägt auch die Punkte, welche durch

$$\left. \begin{aligned} x_1^2 &= b_1' x_3^2, \\ x_2^2 &= b_2' x_3^2, \end{aligned} \right\}$$

oder

$$\frac{x_1}{x_3} = \pm \sqrt{b_1'}, \quad \frac{x_2}{x_3} = \pm \sqrt{b_2'}$$

bestimmt sind; es sind also die vier in  $\omega_\infty$  dem Punkte  $B'$  zugeordneten Punkte  $B, B_1, B_2, B_3$ .

Die Tangente in  $A$  wird am leichtesten ermittelt, indem wir die Tetraederecke  $X_3$  in  $A$  legen, etwa durch die Substitution

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \xi_1 + a_1 \xi_3, \\ x_2 &= \xi_2 + a_2 \xi_3. \end{aligned} \right\}$$

Diese giebt alsdann

$$\xi_2 (\xi_1 + a_1 \xi_3)^2 - \xi_1 (\xi_2 + a_2 \xi_3)^2 + (b_2' \xi_1 - b_1' \xi_2) \xi_3^2 = 0.$$

Der Coefficient von  $\xi_3^2$ , gleich Null gesetzt, ergibt

$$(a_2^2 - b_2') \xi_1 - (a_1^2 - b_1') \xi_2 = 0$$

oder

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{a_1^2 - b_1'}{a_2^2 - b_2'}.$$

Diese Gleichung kommt auch derjenigen Gerade in  $\omega_0$  zu, welche die axiale Projektion aus  $l$  der genannten Tangente ist; diese Gerade geht offenbar durch den Punkt

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= (a_1^2 - b_1') \xi_4, \\ \xi_2 &= (a_2^2 - b_2') \xi_4, \end{aligned} \right\}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1^2 x_4, \\ x_2 &= a_2^2 x_4, \end{aligned} \right\}$$

d. h. durch den in  $\omega_0$  liegenden Bildpunkt  $A'$  von  $A$ .

Die Tangente in  $A$  an der kubischen Kurve in  $\omega_\infty$  ist deshalb die axiale Projektion aus  $l$  auf  $\omega_\infty$  des Bildes  $A'$  von  $A$ .

Der Schnitt der axialen Regelfläche mit  $\omega_0$  ist jetzt *nicht* dem Schnitt in  $\omega_\infty$  analog. Er ist nämlich eine Kurve sechsten Grades, deren Gleichung durch die Substitution  $x_3 = 0$  aus (18) folgt, und daher lautet:

$$\begin{vmatrix} 0 & , \beta_2 & , & \beta_1 & , \beta_0 \\ \beta_1 + \beta_2 & , \beta_0 & , & \beta_0 & , \beta_3 \\ (\beta_1 - \beta_2)x_4 & , \beta_0 x_4 & , -\beta_0 x_4 & , \beta_2 x_1 - \beta_1 x_2 \\ \beta_0 x_4 & , \beta_1 x_2 & , & \beta_2 x_1 & , 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (19a)$$

In dieser Gleichung hat man (siehe (11) und (16))

$$\begin{aligned}\beta_0 &= -a_2 x_1 + a_1 x_2 - (a_1 b_2' - a_2 b_1') x_4, \\ \beta_1 &= x_1 - b_1' x_4, \\ \beta_2 &= -x_2 + b_2' x_4, \\ \beta_3 &= b_2' x_1 - b_1' x_2\end{aligned}$$

zu setzen.

Statt in der hier skizzierten Weise die Gleichung der Kurve sechsten Grades  $\lambda$  abzuleiten, wollen wir sie lieber dadurch zu erhalten versuchen, dass wir  $\lambda$  durch einen Strahlenbüschel ( $m$ ) in  $\omega_0$  mit  $B'$  als Scheitel und einen zu diesem projektivischen Kegelschnittbüschel  $\nu$  erzeugt denken. Die Zuordnung geschieht alsdann in der Weise, dass der Kegelschnitt  $\nu$  das Bild derjenigen Gerade  $n$  ist, welche die  $\nu$  entsprechende Gerade  $m$  (auf  $X_1 X_2$ ) schneidet.

Eine Gerade  $m$  durch  $B'$  in  $\omega_0$  wird durch

$$\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 - (\mu_1 b_1' + \mu_2 b_2') x_4 = 0,$$

eine Gerade  $n$  durch  $A$  in  $\omega_\infty$  durch

$$\nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 - (\nu_1 a_1 + \nu_2 a_2) x_3 = 0$$

dargestellt.

. Die Geraden  $n$  und  $m$  schneiden sich, wenn der Beziehung

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

genügt wird; wir können alsdann setzen:

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \rho \mu_1, \\ \nu_2 &= \rho \mu_2.\end{aligned}$$

Die Gleichung von  $n$  bekommt daher die Form

$$\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 - (\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2) x_3 = 0,$$

und ihr Bildkegelschnitt  $\nu$  in  $\omega_0$  ist also durch

$$\mu_1 \sqrt{x_1} + \mu_2 \sqrt{x_2} - (\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2) \sqrt{x_4} = 0,$$

oder durch

$$\begin{aligned}\nu \equiv & \mu_1^4 x_1^2 + \mu_2^4 x_2^2 + (\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2)^4 x_4^2 - 2 \mu_1^2 \mu_2^2 x_1 x_2 - \\ & - 2 \mu_1^2 (\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2)^2 x_1 x_4 - 2 \mu_2^2 (\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2)^2 x_2 x_4 = 0\end{aligned}$$

bestimmt.

Die Substitution

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \xi_1 + b_1' \xi_4, \\ x_2 &= \xi_2 + b_2' \xi_4, \\ x_4 &= \xi_4, \end{aligned} \right\}$$

welche die Ecke  $X_4$  nach  $B'$  versetzt, giebt für  $m$  die Gleichung

$$\mu_1 \xi_1 + \mu_2 \xi_2 = 0,$$

und für  $\nu$ :

$$\begin{aligned} &\mu_1^4 (\xi_1 + b_1' \xi_4)^2 + \mu_2^4 (\xi_2 + b_2' \xi_4)^2 + (\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2)^4 \xi_4^2 - \\ &- 2 \mu_1^2 \mu_2^2 (\xi_1 + b_1' \xi_4) (\xi_2 + b_2' \xi_4) - 2 \mu_1^2 (\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2)^2 (\xi_1 + b_1' \xi_4) \xi_4 - \\ &- 2 \mu_2^2 (\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2)^2 (\xi_2 + b_2' \xi_4) \xi_4 = 0. \end{aligned}$$

Durch Elimination von  $\mu_1$  und  $\mu_2$  erhalten wir

$$\begin{aligned} &\xi_2^4 (\xi_1 + b_1' \xi_4)^2 + \xi_1^4 (\xi_2 + b_2' \xi_4)^2 + (a_2 \xi_1 - a_1 \xi_2)^4 \xi_4^2 - \\ &- 2 \xi_1^2 \xi_2^2 (\xi_1 + b_1' \xi_4) (\xi_2 + b_2' \xi_4) - 2 \xi_2^2 (a_2 \xi_1 - a_1 \xi_2)^2 (\xi_1 + b_1' \xi_4) \xi_4 - \\ &- 2 \xi_1^2 (a_2 \xi_1 - a_1 \xi_2)^2 (\xi_2 + b_2' \xi_4) \xi_4 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19b) \end{aligned}$$

Diese Gleichung stellt offenbar die Kurve  $\lambda$  dar.

Die Kurve  $\lambda$  schneidet  $X_1 X_2$  in den durch

$$\xi_1^2 \xi_2^4 + \xi_1^4 \xi_2^2 - 2 \xi_1^3 \xi_2^3 = 0$$

oder

$$\xi_1^2 \xi_2^2 (\xi_1 - \xi_2)^2 = 0$$

bestimmten Punkten, also zweimal in  $X_1$ , zweimal in  $X_2$  und zweimal in  $E$ .

Die Tangenten in  $X_1$  sind durch

$$(\xi_2 + b_2' \xi_4)^2 + a_2^4 \xi_4^2 - 2 a_2^2 (\xi_2 + b_2' \xi_4) \xi_4 = 0$$

oder

$$(\xi_2 + (b_2' - a_2^2) \xi_4)^2 = 0$$

angewiesen, und demnach in der Gerade

$$\xi_2 + (b_2' - a_2^2) \xi_4 = 0$$

oder

$$x_2 - a_2^2 x_4 = 0$$

zusammengefallen, also in der Gerade, welche  $X_1$  mit dem Bilde  $A'$  von  $A$  vereinigt.

Wir folgern hieraus, dass  $X_1$  ein Rückkehrpunkt ist, und dass seine Tangente durch  $A'$  geht. Es leuchtet ein, dass dasselbe auch von  $X_2$  gilt. Die Punkte  $X_1$  und  $X_2$  sind auf der axialen Regelfläche uniplanar. Jeder durch  $X_1 X_2$  gelegte Schnitt hat in  $X_1$  und  $X_2$  Rückkehrpunkte.

Die Kurve  $\lambda$  berührt die Gerade  $X_1 X_2$  in  $E$ .

Sie hat überdies in  $B'$  ( $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_2 = 0$ ) einen vierfachen Punkt, dessen Tangenten bestimmt sind durch.

$$b_1'^2 \xi_2^4 + b_2'^2 \xi_1^4 + (a_2 \xi_1 - a_1 \xi_2)^4 - 2 b_1' b_2' \xi_1^2 \xi_2^2 - \\ - 2 b_1' (a_2 \xi_1 - a_1 \xi_2)^2 \xi_2^2 - 2 b_2' (a_2 \xi_1 - a_1 \xi_2)^2 \xi_1^2 = 0,$$

oder

$$(b_2' \xi_1^2 + b_1' \xi_2^2 - (a_2 \xi_1 - a_1 \xi_2)^2)^2 = 4 b_1' b_2' \xi_1^2 \xi_2^2,$$

oder

$$b_2' \xi_1^2 + b_1' \xi_2^2 - (a_2 \xi_1 - a_1 \xi_2)^2 = \pm 2 \sqrt{b_1'} \cdot \sqrt{b_2'} \cdot \xi_1 \xi_2$$

oder

$$1^\circ \quad \pm (\xi_1 \sqrt{b_2'} - \xi_2 \sqrt{b_1'}) = a_2 \xi_1 - a_1 \xi_2,$$

$$2^\circ \quad \pm (\xi_1 \sqrt{b_2'} + \xi_2 \sqrt{b_1'}) = a_2 \xi_1 - a_1 \xi_2,$$

oder

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{a_1 \pm \sqrt{b_1'}}{a_2 \pm \sqrt{b_2'}}.$$

Die axialen Projektionen dieser Geraden aus  $l$  auf  $\omega_\infty$  werden durch dieselbe Gleichungen angewiesen. Sie tragen die vier Punkte

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= (a_1 \pm \sqrt{b_1'}) \xi_3, \\ \xi_2 &= (a_2 \pm \sqrt{b_2'}) \xi_3, \end{aligned} \right\}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \pm \sqrt{b_1'} \cdot x_3, \\ x_2 &= \pm \sqrt{b_2'} \cdot x_3, \end{aligned} \right\}$$

welche mit den vier Bildpunkten  $B$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  des Punktes  $B'$  identisch sind. Die vier Tangenten im vierfachen Punkte  $B'$

sind demnach die axialen Projektionen aus  $l$  auf  $\omega_0$  der vier Bilder von  $B'$ , oder der vier nach  $B'$  zielenden Congruenzstrahlen.

Betrachten wir jetzt die auf der axialen Regelfläche befindliche Doppelkurve. Wir werden dabei demselben Gedankengang wie in der vorigen Abteilung folgen.

Ein Strahl  $p$  liegt mit  $l$  in der Ebene

$$\lambda_1(x_1 - a_1 x_3 - b_1' x_4) + \lambda_2(x_2 - a_2 x_3 - b_2' x_4) = 0, \quad (20)$$

wenn die Identität

$$\lambda_1 \{(p_1 - a_1)x_3 + (p_1^2 - b_1')x_4\} + \lambda_2 \{(p_2 - a_2)x_3 + (p_2^2 - b_2')x_4\} \equiv 0,$$

und also die Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1(p_1 - a_1) + \lambda_2(p_2 - a_2) &= 0, \\ \lambda_1(p_1^2 - b_1') + \lambda_2(p_2^2 - b_2') &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

erfüllt sind.

Ein Strahl  $q$  liegt in derselben Ebene, wenn man hat

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1(q_1 - a_1) + \lambda_2(q_2 - a_2) &= 0, \\ \lambda_1(q_1^2 - b_1') + \lambda_2(q_2^2 - b_2') &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Der Strahl  $p$  schneidet den Strahl  $q$ , falls der Gleichung

$$\begin{vmatrix} -1, & 0, & p_1, & p_1^2 \\ 0, & -1, & p_2, & p_2^2 \\ -1, & 0, & q_1, & q_1^2 \\ 0, & -1, & q_2, & q_2^2 \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$(p_1 - q_1)(p_2 - q_2)\{(p_1 + q_1) - (p_2 + q_2)\} = 0$$

genügt wird.

Die Bedingungen  $p_1 - q_1 = 0$  und  $p_2 - q_2 = 0$  betreffen den Fall, wo die Strahlen  $p$  und  $q$  in der nämlichen Ebene durch  $X_2$  oder  $X_1$  liegen; wir behalten daher nur die Bedingung

$$p_1 + q_1 = p_2 + q_2 \quad (23)$$

Den Schnittpunkt  $D$  von  $p$  und  $q$  bestimmt man aus

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= p_1 x_3 + p_1^2 x_4 = q_1 x_3 + q_1^2 x_4, \\ x_2 &= p_2 x_3 + p_2^2 x_4 = q_2 x_3 + q_2^2 x_4, \end{aligned} \right\}$$

oder



$$\left. \begin{aligned} (p_1 - q_1)x_3 &= -(p_1 - q_1)(p_1 + q_1)x_4, \\ (p_2 - q_2)x_3 &= -(p_2 - q_2)(p_2 + q_2)x_4, \end{aligned} \right\}$$

also aus

$$x_3 = -(p_1 + q_1)x_4 = -(p_2 + q_2)x_4, \quad . \quad . \quad (24)$$

welche Gleichungen sich vermöge (23) vertragen.

Aus (1) folgt weiter

$$x_1 = -p_1(p_1 + q_1)x_4 + p_1^2 x_4 = -p_1 q_1 x_4, \quad . \quad . \quad (25)$$

$$x_2 = -p_2(p_2 + q_2)x_4 + p_2^2 x_4 = -p_2 q_2 x_4, \quad . \quad . \quad (26)$$

Wenn die Grössen  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $q_1$  und  $q_2$  auch den Gleichungen (21) und (22) genügen, so ist  $D$  der Schnittpunkt zweier Strahlen, welche beide  $l$  schneiden;  $D$  ist alsdann ein Punkt der Doppelkurve der Axialen Regelfläche von  $l$ .

Obigen Gedankengang zusammenfassend, können wir behaupten, dass der in der Ebene

$$\lambda_1(x_1 - a_1 x_3 - b_1' x_4) + \lambda_2(x_2 - a_2 x_3 - b_2' x_4) = 0 \quad (20)$$

befindliche Punkt  $D$  der Doppelkurve durch

$$x_1 = -p_1 q_1 x_4, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

$$x_2 = -p_2 q_2 x_4, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

$$x_3 = -(p_1 + q_1)x_4 = -(p_2 + q_2)x_4, \quad . \quad . \quad (24)$$

bestimmt ist, wenn  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $q_1$  und  $q_2$  den Bedingungen

$$\lambda_1(p_1 - a_1) + \lambda_2(p_2 - a_2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

$$\lambda_1(q_1 - a_1) + \lambda_2(q_2 - a_2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

genügen.

Die Gleichungen der Doppelkurve erhält man, indem man aus (21), (22), (23), (24), (25) und (26)  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $q_1$  und  $q_2$  eliminiert; wir bekommen dann zwei Gleichungen in  $\lambda_1 : \lambda_2$ , aus welchen wir mit Hülfe von (20) das Verhältniss  $\lambda_1 : \lambda_2$  fortschaffen können. Es bleiben dann zwei Gleichungen übrig, in welchen neben den Constanten  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1'$  und  $b_2'$  nur die Coordinaten auftreten; sie stellen zwei Flächen dar, welche sich in der Doppelkurve schneiden.

Zunächst stellen wir die Anzahl der Schnittpunkte von  $l$  mit der Doppelkurve fest.

Wenn der Punkt  $D$  auf  $l$  liegt, so schneiden die Strahlen  $p$  und  $q$ , welche sich auf  $l$  treffen und mit  $l$  in einer Ebene liegen, die Ebene  $\omega_\infty$  in zwei Punkten  $P$  und  $Q$ , welche mit der Spur  $A$  von  $l$  in einer Geraden liegen.

Die Strahlen, welche nach einem Punkte  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  zielen, treffen  $\omega_\infty$  in Punkten, deren  $p_1$ -Coordinate durch

$$x_4 p_1^2 + x_3 p_1 - x_1 = 0,$$

und deren  $p_2$ -Coordinate durch

$$x_4 p_2^2 + x_3 p_2 - x_2 = 0$$

gegeben ist.

Die Formeln

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 + a_1 \xi_3 + b_1' \xi_4, \\ x_2 &= \xi_2 + a_2 \xi_3 + b_2' \xi_4, \\ x_3 &= \xi_3, \\ x_4 &= \xi_4 \end{aligned}$$

bringen die Kante  $X_3 X_4$  des Coordinatentetraeders nach  $l = AB'$ .

Diesen Bezeichnungen entsprechend, wird ein Punkt in  $\omega_\infty$  durch

$$\frac{\xi_1}{\xi_3} = \pi_1, \quad \frac{\xi_2}{\xi_3} = \pi_2$$

angewiesen, wonach

$$p_1 = \pi_1 + a_1, \quad p_2 = \pi_2 + a_2.$$

Die Gleichungen (1) gestalten sich nun derart:

$$\left. \begin{aligned} \xi_4 (\pi_1 + a_1)^2 + \xi_3 (\pi_1 + a_1) - (\xi_1 + a_1 \xi_3 + b_1' \xi_4) &= 0, \\ \xi_4 (\pi_2 + a_2)^2 + \xi_3 (\pi_2 + a_2) - (\xi_2 + a_2 \xi_3 + b_2' \xi_4) &= 0, \end{aligned} \right\}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} \xi_4 \pi_1^2 + (\xi_3 + 2 a_1 \xi_4) \pi_1 + \{ - \xi_1 + (a_1^2 - b_1') \xi_4 \} &= 0, \\ \xi_4 \pi_2^2 + (\xi_3 + 2 a_2 \xi_4) \pi_2 + \{ - \xi_2 + (a_2^2 - b_2') \xi_4 \} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Wenn der Punkt, durch den die Strahlen gehen, auf  $l$  ( $\xi_1 = 0, \xi_2 = 0$ ) liegen soll, so bekommen die Gleichungen in  $\pi_1$  und  $\pi_2$  die Form

$$\xi_4 \pi_1^2 + (\xi_3 + 2 a_1 \xi_4) \pi_1 + (a_1^2 - b_1') \xi_4 = 0, \quad (27)$$

$$\xi_4 \pi_2^2 + (\xi_3 + 2 a_2 \xi_4) \pi_2 + (a_2^2 - b_2') \xi_4 = 0. \quad (28)$$

Es seien  $c_1$  und  $c_1'$  die Wurzeln von (27),  $c_2$  und  $c_2'$  die Wurzeln von (28).

Der Punkt  $A$  ist durch

$$\pi_1 = 0, \quad \pi_2 = 0$$

bestimmt.

Es werden zwei der vier durch (27) und (28) angewiesenen Punkte mit  $A$  in gerader Linie liegen, wenn (vergl. Abt. A S. 45) die Bedingung

$$(c_1 + c_1')^2 c_2 c_2' - c_1 c_1' (c_2 + c_2')^2 = 0$$

erfüllt ist.

Aus (27) und (28) geht hervor:

$$c_1 + c_1' = -\frac{\xi_3 + 2a_1\xi_4}{\xi_4}, \quad c_1 c_1' = a_1^2 - b_1',$$

$$c_2 + c_2' = -\frac{\xi_3 + 2a_2\xi_4}{\xi_4}, \quad c_2 c_2' = a_2^2 - b_2';$$

die obige Bedingung erhält also diese Gestalt:

$$(a_2^2 - b_2')(\xi_3 + 2a_1\xi_4)^2 - (a_1^2 - b_1')(\xi_3 + 2a_2\xi_4)^2 = 0. \quad (29)$$

Die Schnittpunkte von  $l$  mit der Doppelkurve liegen demnach in denjenigen *zwei* Ebenen durch  $X_1 X_2$ , welche durch (29), oder durch

$$(\xi_3 + 2a_1\xi_4)\sqrt{a_2^2 - b_2'} = \pm (\xi_3 + 2a_2\xi_4)\sqrt{a_1^2 - b_1'} \quad (30)$$

bestimmt sind.

Es befinden sich daher auf  $l$  zwei Punkte der Doppelkurve, welche somit, da eine durch  $l$  gelegte Ebene ausserhalb  $l$  einen Punkt der Doppelkurve liefert, vom *dritten* Grade ist.

Wir wollen jetzt die Doppelkurve analytisch behandeln.

Die Kante  $X_3 X_4$  des Coordinatentetraeders wird wieder nach  $l = AB'$  verlegt.

Die Ebene durch  $l$  wird nun durch

$$\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 = 0$$

dargestellt.

Der Schnittpunkt  $D$  von  $p$  und  $q$  ist durch

$$\frac{\xi_1}{\xi_4} = \frac{x_1 - a_1 x_3 - b_1' x_4}{x_4} = - \{p_1 q_1 - a_1 (p_1 + q_1) + b_1'\},$$

also durch

$$\xi_1 = - \{p_1 q_1 - a_1 (p_1 + q_1) + b_1'\} \xi_4, \quad . \quad . \quad (32)$$

$$\xi_2 = - \{p_2 q_2 - a_2 (p_2 + q_2) + b_2'\} \xi_4, \quad . \quad . \quad (33)$$

$$\xi_3 = - (p_1 + q_1) \xi_4 = - (p_2 + q_2) \xi_4 \quad . \quad . \quad (34)$$

bestimmt.

Aus den Gleichungen (21) und (22) werden durch Addition und Multiplikation die folgenden Beziehungen hergeleitet:

$$\lambda_1 (p_1 + q_1) + \lambda_2 (p_2 + q_2) = 2 (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) \quad . \quad (35)$$

und

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 p_1 q_1 - \lambda_1^2 a_1 (p_1 + q_1) + \lambda_1^2 a_1^2 &= \\ = \lambda_2^2 p_2 q_2 - \lambda_2^2 a_2 (p_2 + q_2) + \lambda_2^2 a_2^2. \quad . \quad . \quad (36) \end{aligned}$$

Wir setzen

$$p_1 q_1 = \varphi_1,$$

$$p_2 q_2 = \varphi_2,$$

$$p_1 + q_1 = p_2 + q_2 = -\mu,$$

wonach die den Schnittpunkt  $D$  mit  $X_1 X_2$  verbindende Ebene durch

$$x_3 = \mu x_4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

dargestellt wird.

Die Gleichungen (32) bis (36) verwandeln sich nun in

$$\xi_1 = - (\varphi_1 + \mu a_1 + b_1') \xi_4, \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

$$\xi_2 = - (\varphi_2 + \mu a_2 + b_2') \xi_4, \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

$$\xi_3 = \mu \xi_4, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \mu = - 2 (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2), \quad . \quad . \quad (41)$$

$$\lambda_1^2 \varphi_1 + \lambda_1^2 \mu a_1 + \lambda_1^2 a_1^2 = \lambda_2^2 \varphi_2 + \lambda_2^2 \mu a_2 + \lambda_2^2 a_2^2. \quad (42)$$

Durch Elimination von  $\mu$  aus (40) und (41) erhält man

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \xi_3 + 2 (\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) \xi_4 = 0 \quad . \quad . \quad (43)$$

Aus (38) und (39) folgern wir

$$\varphi_1 = - \frac{\xi_1 + (\mu a_1 + b_1') \xi_4}{\xi_4},$$

$$\varphi_2 = - \frac{\xi_2 + (\mu a_2 + b_2') \xi_4}{\xi_4}.$$

Die Substitution dieser Ausdrücke in (42) ergibt

$$\begin{aligned} & -\lambda_1^2 \xi_1 - \lambda_1^2 (\mu a_1 + b_1') \xi_4 + \lambda_1^2 \mu a_1 \xi_4 + \lambda_1^2 a_1^2 \xi_4 = \\ & = -\lambda_2^2 \xi_2 - \lambda_2^2 (\mu a_2 + b_2') \xi_4 + \lambda_2^2 \mu a_2 \xi_4 + \lambda_2^2 a_2^2 \xi_4, \end{aligned} \quad (44)$$

oder

$$\lambda_1^2 \{ \xi_1 + (b_1' - a_1^2) \xi_4 \} = \lambda_2^2 \{ \xi_2 + (b_2' - a_2^2) \xi_4 \}. \quad (44)$$

Zum Schluss wollen wir mittels (31)  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  aus (43) und (44) eliminieren; wir finden dann

$$\Phi \equiv (\xi_1 - \xi_2) \xi_3 + 2 (a_2 \xi_1 - a_1 \xi_2) \xi_4 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

$$\Psi \equiv \xi_2^2 \{ \xi_1 + (b_1' - a_1^2) \xi_4 \} - \xi_1^2 \{ \xi_2 + (b_2' - a_2^2) \xi_4 \} = 0. \quad (46)$$

Durch diese beiden Gleichungen werden zwei Flächen dargestellt, welchen die Doppelkurve angehört.

$\Phi$  ist eine quadratische Regelfläche, welche die Gerade  $l$  ( $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_2 = 0$ ) trägt.

$\Psi$  ist eine kubische Regelfläche, auf der  $l$  Doppelgerade ist.

Der Schnitt von  $\Phi$  und  $\Psi$  enthält also die doppelt zu zählende Gerade  $l$ . Ausserdem haben die beiden Flächen noch die Gerade  $AE$  ( $\xi_1 = \xi_2$ ,  $\xi_4 = 0$ ) gemeinsam. Der Restschnitt ist demnach eine kubische Raumkurve.

Wir setzen

$$\left. \begin{aligned} \xi_3 + 2 a_1 \xi_4 &= \xi_5, \\ \xi_3 + 2 a_2 \xi_4 &= \xi_6, \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47)$$

mithin

$$\xi_4 = \frac{\xi_5 - \xi_6}{2 (a_1 - a_2)};$$

die Gleichungen  $\Phi = 0$  und  $\Psi = 0$  bekommen daher die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \Phi &\equiv \xi_2 \xi_5 - \xi_1 \xi_6 = 0, \\ \Psi &\equiv 2 (a_1 - a_2) (\xi_1 - \xi_2) \xi_1 \xi_2 + \\ &+ \{ (b_2' - a_2^2) \xi_1^2 - (b_1' - a_1^2) \xi_2^2 \} (\xi_5 - \xi_6) = 0. \end{aligned}$$

Es gilt nun die Identität:

$$\begin{aligned} 2(a_1 - a_2)(\xi_1 - \xi_2)\xi_1\xi_2 + \{(b_2' - a_2^2)\xi_1^2 - (b_1' - a_1^2)\xi_2^2\}(\xi_5 - \xi_6) \equiv \\ \equiv \{(b_2' - a_2^2)\xi_1 - (b_1' - a_1^2)\xi_2\}(\xi_2\xi_5 - \xi_1\xi_6) + \\ + (\xi_1 - \xi_2)[\xi_1\{2a_1\xi_2 + (b_2' - a_2^2)\xi_5\} - \xi_2\{2a_2\xi_1 + (b_1' - a_1^2)\xi_6\}]. \end{aligned}$$

Setzen wir, zur Abkürzung,

$$\begin{aligned} (b_2' - a_2^2)\xi_1 - (b_1' - a_1^2)\xi_2 &= V, \\ \xi_1 - \xi_2 &= W, \\ \xi_1\{2a_1\xi_2 + (b_2' - a_2^2)\xi_5\} - \xi_2\{2a_2\xi_1 + (b_1' - a_1^2)\xi_6\} &= \Omega, \end{aligned}$$

so nimmt obige Identität diese Form an:

$$\Psi \equiv V\Phi + W\Omega.$$

Die beiden quadratischen Flächen  $\Phi$  und  $\Omega$  haben, ausser  $l$  ( $\xi_1 = 0, \xi_2 = 0$ ), eine kubische Raumkurve gemein, welche vermöge der Identität auch dem Schnitte von  $\Psi$  und  $\Phi$  angehört.

Es ist demnach klar, dass die Doppelkurve der axialen Regelfläche von  $l = AB'$  der partielle Schnitt ist von

$$\Phi \equiv \xi_2\xi_5 - \xi_1\xi_6 = 0$$

und

$$\Omega \equiv \xi_1\{2a_1\xi_2 + (b_2' - a_2^2)\xi_5\} - \xi_2\{2a_2\xi_1 + (b_1' - a_1^2)\xi_6\} = 0.$$

Wenn wir  $\xi_5$  und  $\xi_6$  durch ihre Ausdrücke (47) ersetzen, so finden wir

$$\Phi \equiv \xi_2(\xi_3 + 2a_1\xi_4) - \xi_1(\xi_3 + 2a_2\xi_4) = 0, \quad . \quad . \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \Omega \equiv 2(a_1 - a_2)\xi_1\xi_2 + (b_2' - a_2^2)(\xi_3 + 2a_1\xi_4)\xi_1 - \\ - (b_1' - a_1^2)(\xi_3 + 2a_2\xi_4)\xi_2 = 0. \quad . \quad . \quad (49) \end{aligned}$$

Die Doppelkurve schneidet  $\omega_\infty$  ( $\xi_4 = 0$ ) offenbar in den durch

$$\begin{aligned} (\xi_1 - \xi_2)\xi_3 &= 0, \\ 2(a_1 - a_2)\xi_1\xi_2 + \{(b_2' - a_2^2)\xi_1 - (b_1' - a_1^2)\xi_2\}\xi_3 &= 0 \end{aligned}$$

bestimmten Punkten, also in den Punkten  $X_1$  und  $X_2$  und in dem Punkte, welcher, mit  $A$ , den Gleichungen

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_2 &= 0, \\ 2(a_1 - a_2)\xi_1\xi_2 + \{(b_2' - a_2^2)\xi_1 - (b_1' - a_1^2)\xi_2\}\xi_3 &= 0, \end{aligned}$$

oder

$$\xi_1 - \xi_2 = 0, \\ 2(a_1 - a_2)\xi_1 + \{(b_2' - a_2^2) - (b_1' - a_1^2)\}\xi_3 = 0$$

genügt. Dieser Punkt ist der Schnittpunkt von  $AE$  ( $\xi_1 - \xi_2 = 0$ ) mit der kubischen Kurve in  $\omega_\infty$ , welche dem Schnitt der axialen Regelfläche angehört.

Die Doppelkurve enthält die Punkte  $X_1$  und  $X_2$ .

Aus der Tatsache, dass  $l$  die Doppelkurve in zwei Punkten trifft, geht hervor, dass  $l$  zweimal mit zwei Congruenzstrahlen einem Strahlenbüschel angehört; d. h. der **Axengrad der Congruenz ist zwei**.

§ 6. Die axiale Regelfläche einer Gerade  $l$ , welche  $X_3 X_4$  schneidet.

Falls die Gerade  $l$  die Gerade  $X_3 X_4$  schneidet, hat man für die Coordinaten der Spuren  $A$  und  $B'$  in  $\omega_\infty$  und  $\omega_0$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2'}{b_1'} = t,$$

wonach

$$a_1 b_2' - a_2 b_1' = 0.$$

Die Grössen  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  und  $\beta_3$  der Gleichung (18) erhalten nun die folgenden Werte (Siehe (11) und (16))

$$\begin{aligned} \beta_0 &= -a_1(tx_1 - x_2), \\ \beta_1 &= x_1 - a_1x_3 - b_1'x_4, \\ \beta_2 &= -x_2 + ta_1x_3 + tb_1'x_4, \\ \beta_3 &= b_1'(tx_1 - x_2). \end{aligned}$$

Die Gleichung (18) gestaltet sich daher wie folgt:

$$\Delta' \equiv \begin{vmatrix} 0 & , -x_2 + ta_1x_3 + tb_1'x_4 & , \\ x_1 - x_2 - (1-t)(a_1x_3 + b_1'x_4) & , -a_1(tx_1 - x_2) & , \\ \{x_1 + x_2 - (1+t)(a_1x_3 + b_1'x_4)\}x_4 & , (-x_2 + ta_1x_3 + tb_1'x_4)x_3 - a_1(tx_1 - x_2)x_4, \\ -(x_1 - x_2)x_3 - a_1(tx_1 - x_2)x_4 - (1-t)(a_1x_3 + b_1'x_4)x_3, (x_1 - a_1x_3 - b_1'x_4)x_2 & , \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} & x_1 - a_1x_3 - b_1'x_4 & , -a_1(tx_1 - x_2) \\ & -a_1(tx_1 - x_2) & , b_1'(tx_1 - x_2) \\ & (x_1 - a_1x_3 - b_1'x_4)x_3 + a_1(tx_1 - x_2)x_4, & -2x_1x_2 + (a_1x_3 + b_1'x_4)(tx_1 - x_2) \\ & (-x_2 + ta_1x_3 + tb_1'x_4)x_1 & , 0 \end{aligned} = 0. (50)$$

Die kubische Kurve in  $\omega_\infty$  ist jetzt durch (siehe (19))

$$x_1 x_2 (x_1 - x_2) - a_1 (t x_1^2 - x_2^2) x_3 + b_1' (t x_1 - x_2) x_3^2 = 0 \quad (51)$$

bestimmt. Sie enthält nun auch den Punkt  $X_3$ , dessen Tangente durch

$$t x_1 - x_2 = 0$$

oder

$$x_2 = t x_1$$

gegeben, daher mit der Gerade  $X_3 A$  identisch ist.

Die Schnittkurve  $\lambda$  in  $\omega_0$  hat nun die Gleichung

$$\begin{aligned} & \xi_2^4 (\xi_1 + b_1' \xi_4)^2 + \xi_1^4 (\xi_2 + t b_1' \xi_4)^2 + a_1^4 (t \xi_1 - \xi_2)^4 \xi_4^2 - \\ & - 2 \xi_1^2 \xi_2^2 (\xi_1 + b_1' \xi_4) (\xi_2 + t b_1' \xi_4) - 2 a_1^2 \xi_2^2 (t \xi_1 - \xi_2)^2 (\xi_1 + b_1' \xi_4) \xi_4 - \\ & - 2 a_1^2 \xi_1^2 (t \xi_1 - \xi_2)^2 (\xi_2 + t b_1' \xi_4) \xi_4 = 0, \end{aligned}$$

welcher jetzt ebenso durch

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -b_1' \xi_4, \\ \xi_2 &= -t b_1' \xi_4 \end{aligned}$$

genügt wird.

Indem wir die Coordinatenecke wieder von  $B'$  nach  $X_4$  zurückführen, und zwar mittels der Formeln

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 - b_1' x_4, \\ \xi_2 &= x_2 - t b_1' x_4, \\ \xi_4 &= x_4, \end{aligned}$$

so finden wir für  $\lambda$  diese Gleichung:

$$\begin{aligned} & (x_2 - t b_1' x_4)^4 x_1^2 + (x_1 - b_1' x_4)^4 x_2^2 + a_1^4 (t x_1 - x_2)^4 x_4^2 - \\ & - 2 (x_1 - b_1' x_4)^2 (x_2 - t b_1' x_4)^2 x_1 x_2 - 2 a_1^2 (x_2 - t b_1' x_4)^2 (t x_1 - x_2)^2 x_1 x_4 - \\ & - 2 a_1^2 (x_1 - b_1' x_4)^2 (t x_1 - x_2)^2 x_2 x_4 = 0. \end{aligned}$$

Der Punkt  $X_4$  erscheint hier als ein Doppelpunkt, dessen Tangenten durch

$$t^4 b_1'^4 x_1^2 + b_1'^4 x_2^2 - 2 t^2 b_1'^4 x_1 x_2 = 0,$$

oder

$$(t^2 x_1 - x_2)^2 = 0$$

dargestellt werden.



Der Punkt  $X_4$  ist demnach ein *Rückkehrpunkt*, mit der Gerade

$$\frac{x_2}{x_1} = t^2$$

als Tangente; diese Gerade verbindet offenbar  $X_4$  mit  $A'$ .

Die Doppelkurve der axialen Regelfläche wird nun die Ebene  $\omega_0$  in den Punkten  $X_1$ ,  $X_2$  und  $X_4$  treffen. Ihre Schnittpunkte mit  $l$  sind nun durch (siehe (29))

$$t(ta_1^2 - b_1')(\xi_3 + 2a_1\xi_4)^2 - (a_1^2 - b_1')(\xi_3 + 2ta_1\xi_4)^2 = 0 \quad (52)$$

bestimmt, während die Kurve durch

$$\Phi \equiv \xi_2(\xi_3 + 2a_1\xi_4) - \xi_1(\xi_3 + 2ta_1\xi_4) = 0, \quad . \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \Omega \equiv & 2a_1(1-t)\xi_1\xi_2 + t(b_1' - ta_1^2)(\xi_3 + 2a_1\xi_4)\xi_1 - \\ & - (b_1' - a_1^2)(\xi_3 + 2ta_1\xi_4)\xi_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54) \end{aligned}$$

dargestellt wird.

Die kubische Doppelkurve ist hier, im Gegensatz zu dem analogen Fall in der vorigen Congruenz, noch immer eine Raumkurve. Dies lässt sich erklären aus dem Umstande, dass die Punkte  $X_3$  und  $X_4$  in der jetzigen Congruenz *nicht* singulär sind.

#### § 7. Die axiale Regelfläche einer Gerade $l_\mu$ , welche $X_1 X_2$ schneidet.

Die Gerade  $l$  werde jetzt in eine durch  $X_1 X_2$  gehende Ebene gelegt, z. B. in die Ebene  $\omega_\mu$  ( $x_3 = \mu x_4$ ). Ihre Gleichungen seien

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 &= 0, \\ x_3 &= \mu x_4. \end{aligned}$$

Wenn wir in den in § 5 befindlichen Ausdrücken

$$a_1 = + \frac{\alpha_2 \alpha_0}{\delta},$$

$$a_2 = - \frac{\alpha_1 \alpha_0}{\delta},$$

$$b_1' = - \frac{\mu \alpha_2 \alpha_0}{\delta},$$

$$b_2' = + \frac{\mu \alpha_1 \alpha_0}{\delta},$$

$$\Delta = a_1 b_2' - a_2 b_1' = - \frac{(\mu \alpha_3 + \alpha_4) \alpha_0}{\delta}$$

setzen, so ist auf das unendlich werden der Coordinaten  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1'$  und  $b_2'$  Rücksicht genommen.

Die Grössen  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  und  $\beta_3$  (siehe (11) und (16)) erhalten nun die folgenden Werte:

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + (\mu \alpha_3 + \alpha_4) x_3}{\delta} a_0, \\ \beta_1 &= \frac{\delta x_1 - \alpha_2 (x_3 - \mu x_4) a_0}{\delta}, \\ \beta_2 &= \frac{-\delta x_2 - \alpha_1 (x_3 - \mu x_4) a_0}{\delta}, \\ \beta_3 &= \frac{\mu (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + (\mu \alpha_3 + \alpha_4) x_3}{\delta} a_0.\end{aligned}$$

Indem man diese Ausdrücke in die Gleichung (18) einsetzt und, nach Fortschaffung der Nenner,  $\delta = 0$  setzt, so findet man die Gleichung der axialen Regelfläche von  $l_\mu$ .

Die kubische Kurve in  $\omega_\infty$  wird (siehe (19)) durch

$$\delta(x_1 - x_2)x_1x_2 + [\alpha_1x_1^2 + \alpha_2x_2^2 + \{\mu(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3) + \alpha_4x_3\}x_3]x_3a_0 = 0,$$

oder

$$x_3 = 0$$

und

$$\alpha_1x_1^2 + \alpha_2x_2^2 + \{\mu(\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3) + \alpha_4x_3\}x_3 = 0 \quad (55)$$

dargestellt.

Die Kurve zerfällt also in die Gerade  $X_1X_2$  und einen Kegelschnitt. Dieser schneidet  $X_1X_2$  in den Punkten

$$\frac{x_2}{x_1} = \pm \sqrt{-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}, \quad x_3 = 0,$$

daher in den Bildern desjenigen Punktes in  $\omega_0$ , welcher durch

$$\frac{x_2}{x_1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad x_3 = 0,$$

oder

$$\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 = 0, \quad x_3 = 0$$

bestimmt ist; also des Punktes  $L_\mu$ , wo die Gerade  $l_\mu$  die Gerade  $X_1X_2$  schneidet, wobei dieser als Punkt von  $\omega_0$  betrachtet wird.

Die Geraden  $AX_1$ ,  $AX_2$  und  $AE$ , welche im allgemeinen Falle

die kubische Kurve in  $\omega_\infty$  zu einem Gebilde sechsten Grades ergänzen, sind nun alle, weil  $A = L_\mu$  auf  $X_1 X_2$  liegt, mit  $X_1 X_2$  zusammengefallen. Ausserdem enthält die kubische Kurve die Gerade  $X_1 X_2$  als Bestandteil.

Der Schnitt der Regelfläche mit  $\omega_\infty$  enthält also viermal die Gerade  $X_1 X_2$  und einen Kegelschnitt.

Die Schnittkurve  $\lambda$  in  $\omega_0$  wird (siehe S. 113) durch die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 \sqrt{x_1} + \mu_2 \sqrt{x_2} - (\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2) \sqrt{x_4} &= 0, \\ \frac{\mu_1}{\mu_2} &= -\frac{x_2 - b_2' x_4}{x_1 - b_1' x_4}, \end{aligned} \right\}$$

also durch

$$(x_2 - b_2' x_4) \sqrt{x_1} - (x_1 - b_1' x_4) \sqrt{x_2} + \\ + \{a_2 x_1 - a_1 x_2 + (a_1 b_2' - a_2 b_1') x_4\} \sqrt{x_4} = 0$$

dargestellt. Mit Verwendung der Ausdrücke für  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1'$ ,  $b_2'$  und  $\Delta$  finden wir

$$\mu \alpha_1 x_1 \sqrt{x_1} + \mu \alpha_2 x_2 \sqrt{x_2} + \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + (\mu \alpha_3 + \alpha_4) x_4\} \sqrt{x_4} = 0,$$

oder, nachdem wir die Wurzelgrössen fortgeschafft, und durch  $x_4^2$  geteilt haben,

$$[\mu^2 (\alpha_1^2 x_1 + \alpha_2^2 x_2) x_4 - \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + (\mu \alpha_3 + \alpha_4) x_4\}^2] - \\ - 4 \mu^4 \alpha_1^2 \alpha_2^2 x_1 x_2 x_4^2 = 0.$$

Der Schnitt  $\lambda$  besteht daher aus der doppelt zu zählenden Gerade  $X_1 X_2$  und einer biquadratischen Kurve, welche die Gerade  $X_1 X_2$  in den vier durch

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^4 = 0$$

bestimmten Punkten schneidet. Diese Schnittpunkte sind also in dem Schnittpunkt  $L_\mu$  von  $l_\mu$  mit  $X_1 X_2$  zusammengefallen.

Die Kurve hat in  $L_\mu$  einen Doppelpunkt, dessen beide Zweige die nämliche Tangente  $X_1 X_2$  haben, während die Kurve in  $L_\mu$  vier Punkten mit  $X_1 X_2$  gemein hat.

Zur Auffindung der Gleichungen der Doppelkurve, müssen wir die Rechnung des allgemeinen Falles wiederholen, weil hier  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1'$ ,  $b_2'$  und  $\Delta$  unendlich gross sind, und die Betrachtungen auf S. 116 und ff. hinfällig werden.

Sie werden jetzt in der folgenden Weise abgeändert.

Eine durch  $l_\mu$  gelegte Ebene wird durch

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + \lambda (x_3 - \mu x_4) = 0 \quad . \quad (56)$$

dargestellt.

In dieser Ebene befinden sich die Strahlen  $p$  und  $q$ , wenn den Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 + \lambda &= 0, \\ \alpha_1 p_1^2 + \alpha_2 p_2^2 + \alpha_4 - \mu \lambda &= 0 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 + \lambda &= 0, \\ \alpha_1 q_1^2 + \alpha_2 q_2^2 + \alpha_4 - \mu \lambda &= 0 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

genügt wird.

Der Schnittpunkt von  $p$  und  $q$  bestimmt sich aus

$$x_1 = -p_1 q_1 x_4, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

$$x_2 = -p_2 q_2 x_4, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

$$x_3 = -(p_1 + q_1) x_4 = -(p_2 + q_2) x_4. \quad . \quad . \quad (24)$$

Aus den Gleichungen (57) und (58) folgt

$$\alpha_1 (p_1 + q_1) + \alpha_2 (p_2 + q_2) + 2 (\alpha_3 + \lambda) = 0 \quad . \quad (59)$$

und

$$\alpha_1^2 p_1 q_1 = \alpha_2^2 p_2 q_2 + \alpha_2 (\alpha_3 + \lambda) (p_2 + q_2) + (\alpha_3 + \lambda)^2, \quad (60)$$

oder, vermöge (24), (25) und (26),

$$(\alpha_1 + \alpha_2) x_3 - 2 (\alpha_3 + \lambda) x_4 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

und

$$-\alpha_1^2 x_1 = -\alpha_2^2 x_2 - \alpha_2 (\alpha_3 + \lambda) x_3 + (\alpha_3 + \lambda)^2 x_4.$$

Die letzte Gleichung gestaltet sich mittels (61) wie folgt:

$$\alpha_1^2 x_1 - \alpha_2^2 x_2 - \alpha_2 (\alpha_3 + \lambda) x_3 + \frac{(\alpha_1 + \alpha_2) (\alpha_3 + \lambda)}{2} x_3 = 0$$

oder

$$2 (\alpha_1^2 x_1 - \alpha_2^2 x_2) + (\alpha_1 - \alpha_2) (\alpha_3 + \lambda) x_3 = 0. \quad . \quad (62)$$

Die Elimination von  $\lambda$  aus (56), (61) und (62) ergibt schliesslich

$$(x_3 - \mu x_4) \{ (\alpha_1 + \alpha_2) x_3 - 2\alpha_3 x_4 \} + 2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4) x_4 = 0,$$

oder

$$\Phi_\mu \equiv (\alpha_1 + \alpha_2) x_3 (x_3 - \mu x_4) + 2 \{ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + (\mu \alpha_3 + \alpha_4) x_4 \} x_4 = 0, \quad (63)$$

und

$$\{ 2(\alpha_1^2 x_1 - \alpha_2^2 x_2) + (\alpha_1 - \alpha_2) \alpha_3 x_3 \} (x_3 - \mu x_4) - (\alpha_1 - \alpha_2) (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4) x_3 = 0,$$

oder

$$\Omega_\mu \equiv 2(\alpha_1^2 x_1 - \alpha_2^2 x_2) (x_3 - \mu x_4) - (\alpha_1 - \alpha_2) \{ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + (\mu \alpha_3 + \alpha_4) x_4 \} x_3 = 0. \quad (64)$$

Es gilt ferner diese Identität:

$$\begin{aligned} & \mu(\alpha_1 - \alpha_2) [(\alpha_1 + \alpha_2) x_3 (x_3 - \mu x_4) + 2 \{ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + (\mu \alpha_3 + \alpha_4) x_4 \} x_4] + \\ & + 2 [2(\alpha_1^2 x_1 - \alpha_2^2 x_2) (x_3 - \mu x_4) - (\alpha_1 - \alpha_2) \{ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + (\mu \alpha_3 + \alpha_4) x_4 \} x_3] \equiv \\ & \equiv (x_3 - \mu x_4) [2(\alpha_1 + \alpha_2) (\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2) + (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \mu x_3 - 2(\alpha_1 - \alpha_2) (\mu \alpha_3 + \alpha_4) x_4], \end{aligned}$$

oder, wenn wir

$$x_3 - \mu x_4 = \omega_\mu,$$

$$\begin{aligned} & 2(\alpha_1 + \alpha_2) (\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2) + (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \mu x_3 - \\ & - 2(\alpha_1 - \alpha_2) (\mu \alpha_3 + \alpha_4) x_4 = W_\mu \end{aligned}$$

setzen,

$$\mu(\alpha_1 - \alpha_2) \Phi_\mu + 2 \Omega_\mu \equiv \omega_\mu \cdot W_\mu.$$

Die Ebene  $\omega_\mu$  schneidet  $\Phi_\mu$  in den Geraden  $l_\mu$  und  $X_1 X_2$ .

Die Ebene  $W_\mu$  schneidet die Fläche  $\Phi_\mu$  in einem durch

$$\Phi_\mu \equiv (\alpha_1 + \alpha_2) x_3 (x_3 - \mu x_4) + 2 \{ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + (\mu \alpha_3 + \alpha_4) x_4 \} x_4 = 0, \quad (63)$$

$$\begin{aligned} W_\mu \equiv & 2(\alpha_1 + \alpha_2) (\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2) + (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \mu x_3 - \\ & - 2(\alpha_1 - \alpha_2) (\mu \alpha_3 + \alpha_4) x_4 = 0. \quad (65) \end{aligned}$$

gegebenen Kegelschnitt, welcher die Punkte  $X_1$  und  $X_2$  nicht enthält. Er schneidet  $l_\mu$  in dem Punkte

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= - \frac{4 \alpha_2 (\mu \alpha_3 + \alpha_4) + \mu (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)}{4 \alpha_1 (\alpha_1 + \alpha_2)} x_4, \\ x_2 &= - \frac{4 \alpha_1 (\mu \alpha_3 + \alpha_4) - \mu (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)}{4 \alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2)} x_4, \\ x_3 &= \mu x_4, \end{aligned} \right\}$$

und  $X_1 X_2$  in dem Punkte

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 &= 0, \\ x_3 &= 0, \\ x_4 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

welcher  $L_\mu$  in Bezug auf  $X_1$  und  $X_2$  harmonisch zugeordnet ist.

Die Doppelkurve, welche im allgemeinen Falle eine kubische Raumkurve ist, zerfällt hier in die Gerade  $X_1 X_2$  und den obigen Kegelschnitt.

Wenn die Gerade  $l_\mu$  ausserdem  $X_3 X_4$  schneidet, so gilt

$$\mu \alpha_3 + \alpha_4 = 0,$$

wonach sich für die Grössen  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  und  $\beta_3$  die folgenden Werte ergeben:

$$\beta_0 = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}{\delta} a_0,$$

$$\beta_1 = - \frac{\alpha_2 (x_3 - \mu x_4)}{\delta} a_0,$$

$$\beta_2 = - \frac{\alpha_1 (x_3 - \mu x_4)}{\delta} a_0,$$

$$\beta_3 = \frac{\mu (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)}{\delta} a_0.$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichung (18) erhalten wir die Gleichung der axialen Regelfläche. Die kubische Kurve in  $\omega_\infty$  besteht jetzt aus der Gerade  $X_1 X_2$  und dem Kegelschnitte (siehe (55) S. 126)

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \mu (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) x_3 = 0, \quad . \quad . \quad (66)$$

welcher durch  $X_3$  hindurchgeht und in  $X_3$  durch

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0,$$

also durch die Gerade  $X_3 L_\mu$  berührt wird.

Die Kurve  $\lambda$  sechsten Grades in  $\omega_0$  ist in die doppelt zu zählende Gerade  $X_1 X_2$  und die biquadratische Kurve

$$[\mu^2(\alpha_1^2 x_1 + \alpha_2^2 x_2)x_4 - (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^2] - 4\mu^4 \alpha_1^2 \alpha_2^2 x_1 x_2 x_4^2 = 0 \quad (66a)$$

ausgeartet. Diese Kurve enthält jetzt auch den Punkt  $X_4$ , sogar als einen Doppelpunkt, dessen Tangenten durch

$$(\alpha_1^2 x_1 + \alpha_2^2 x_2)^2 - 4\alpha_1^2 \alpha_2^2 x_1 x_2 = 0,$$

oder

$$(\alpha_1^2 x_1 - \alpha_2^2 x_2)^2 = 0$$

bestimmt und deshalb in der Gerade

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2},$$

d. h. der Bildgerade von  $X_3 L_\mu$ , zusammengefallen sind. Der Punkt  $X_4$  ist somit ein Rückkehrpunkt, dessen Tangente mit dem Bilde von  $X_3 L_\mu$  identisch ist.

Die Doppelkurve besteht aus der Gerade  $X_1 X_2$  und aus einem Kegelschnitte, welcher nun diese Gleichungen hat:

$$\Phi_\mu' \equiv (\alpha_1 + \alpha_2) x_3 (x_3 - \mu x_4) + 2(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) x_4 = 0, \quad (67)$$

$$W_\mu' \equiv 2\alpha_1 x_1 - 2\alpha_2 x_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) \mu x_3 = 0. \quad (68)$$

Ihr Schnittpunkt mit  $l_\mu$  ist durch

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\frac{\mu(\alpha_1 - \alpha_2)}{4\alpha_1} x_4, \\ x_2 &= +\frac{\mu(\alpha_1 - \alpha_2)}{4\alpha_2} x_4, \\ x_3 &= \mu x_4 \end{aligned} \right\}$$

angewiesen, indess sie wieder  $X_1 X_2$  in demjenigen Punkte trifft, welcher  $L_\mu$  in Bezug auf  $X_1$  und  $X_2$  harmonisch zugeordnet ist.

Wir haben jetzt einige Fälle zu erledigen, wo die Gerade  $l$  in einer singulären Ebene liegt, und ihre axiale Regelfläche somit von niedrigeren Grade ist.

#### § 8. Die axiale Regelfläche einer Gerade $l$ in $\varepsilon$ .

Wenn die Gerade  $l$  in  $\varepsilon$  liegt, so lautet die eine ihrer Gleichungen:





$$\Delta' \equiv \frac{(x_1 - x_2)^2}{2} \begin{vmatrix} 0 & , & -x_2 + ax_3 + b'x_4, \\ 1 & , & -a \\ -x_3^2 - 3ax_3x_4 - 2b'x_4^2, & 2x_2(x_3 + ax_4), & \\ -(x_3 + ax_4) & , & x_2 + ax_3 + b'x_4, \\ & & x_1 - ax_3 - b'x_4, -a(x_1 - x_2) \\ & & -a & , & b' \\ & & 2x_1(x_3 + ax_4), & -2x_1x_2 \\ & & x_1 + ax_3 + b'x_4, & -a(x_1 + x_2) \end{vmatrix} = 0.$$

Schliesslich ersetzen wir die erste Horizontalreihe durch die Summe der ersten und vierten und die vierte durch ihre Differenz; wir bekommen alsdann:

$$\Delta' \equiv 2(x_1 - x_2)^2 \begin{vmatrix} x_3 + ax_4 & , & ax_3 + b'x_4 & , & x_1 & , & ax_1 \\ 2 & , & a & , & a & , & b' \\ x_3^2 + 3ax_3x_4 + 2b'x_4^2, & x_2(x_3 + ax_4), & x_1(x_3 + ax_4), & x_1x_2 \\ x_3 + ax_4 & , & x_2 & , & ax_3 + b'x_4 & , & ax_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (71)$$

Die axiale Regelfläche einer Gerade  $l$  in  $\varepsilon$  besteht also aus der doppelt zu zählenden Ebene  $\varepsilon$  und aus einer *biquadratischen Fläche*.

Die kubische Kurve in  $\omega_x$  wird jetzt (siehe (19)) durch

$$(x_1 - x_2)x_1x_2 - a(x_1^2 - x_2^2)x_3 + b'(x_1 - x_2)x_3^2 = 0$$

dargestellt. Sie ist demnach in die Gerade

$$x_1 - x_2 = 0,$$

oder

$$X_3 E,$$

und in den Kegelschnitt  $\gamma_x$ :

$$x_1x_2 - a(x_1 + x_2)x_3 + b'x_3^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

ausgeartet.

Der Kegelschnitt  $\gamma_x$  enthält die Punkte  $X_1$  und  $X_2$ . Seine Tangente in  $X_1$  ist durch

$$x_2 - ax_3 = 0$$

bestimmt, also mit der Gerade  $X_1 A$  identisch.

Wir sehen daher, dass die Tangenten in  $X_1$  und  $X_2$  sich in  $A$  schneiden, wonach  $A$  der Pol von  $X_1 X_2$  in Bezug auf  $\mathcal{V}_\infty$  ist.

Der Kegelschnitt  $\mathcal{V}_\infty$  wird durch seine Tangenten  $X_1 A$  und  $X_2 A$  zu dem biquadratischen Durchschnitt der axialen Regelfläche ergänzt.

Die Kurve sechsten Grades  $\lambda$  hat nun die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} & \xi_2^4 (\xi_1 + b' \xi_4)^2 + \xi_1^4 (\xi_2 + b' \xi_4)^2 + a^4 (\xi_1 - \xi_2)^4 \xi_4^2 - \\ & - 2 \xi_1^2 \xi_2^2 (\xi_1 + b' \xi_4) (\xi_2 + b' \xi_4) - 2 a^2 \xi_2^2 (\xi_1 - \xi_2)^2 (\xi_1 + b' \xi_4) \xi_4 - \\ & - 2 a^2 \xi_1^2 (\xi_1 - \xi_2)^2 (\xi_2 + b' \xi_4) \xi_4 = 0, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} & \{\xi_2^2 (\xi_1 + b' \xi_4) - \xi_1^2 (\xi_2 + b' \xi_4)\}^2 + \\ & + a^2 \xi_4 (\xi_1 - \xi_2)^2 \{a^2 \xi_4 (\xi_1 - \xi_2)^2 - 2 \xi_2^2 (\xi_1 + b' \xi_4) - 2 \xi_1^2 (\xi_2 + b' \xi_4)\} = 0, \end{aligned}$$

oder endlich

$$\begin{aligned} & (\xi_1 - \xi_2)^2 [\{\xi_1 \xi_2 + b' (\xi_1 + \xi_2) \xi_4\}^2 + \\ & + a^2 \xi_4 \{a^2 \xi_4 (\xi_1 - \xi_2)^2 - 2 \xi_2^2 (\xi_1 + b' \xi_4) - 2 \xi_1^2 (\xi_2 + b' \xi_4)\}] = 0. \end{aligned}$$

Sie besteht also aus der doppelt zu zählenden Gerade  $X_4 E$  und einer biquadratischen Kurve, welche den Schnitt der biquadratischen Regelfläche mit  $\omega_0$  bildet.

Diese Kurve hat in  $X_1$  einen Rückkehrpunkt, dessen Tangente durch

$$\xi_2 + (b' - a^2) \xi_4 = 0,$$

oder durch

$$w_2 - a^2 x_4 = 0$$

angewiesen ist, und deshalb mit der Gerade  $X_1 A'$  zusammenfällt.

Die biquadratische Kurve hat also in  $X_1$  und  $X_2$  Rückkehrpunkte, deren Tangenten sich im Bilde  $A'$  von  $A$  schneiden.

Es leuchtet ein, dass die Gerade  $l$  in  $\varepsilon$  auf der biquadratischen Regelfläche *Doppelgerade* ist.

Neben dieser Doppelgerade besitzt die Regelfläche aber noch eine Doppelkurve, welche durch (siehe (45) und (46))

$$\Phi \equiv (\xi_1 - \xi_2) \xi_3 + 2 a (\xi_1 - \xi_2) \xi_4 = (\xi_1 - \xi_2) (\xi_3 + 2 a \xi_4) = 0,$$

$$\begin{aligned} \Psi & \equiv - \xi_1 \xi_2 (\xi_1 - \xi_2) - (b' - a^2) (\xi_1^2 - \xi_2^2) \xi_4 = \\ & = - (\xi_1 - \xi_2) \{\xi_1 \xi_2 + (b' - a^2) (\xi_1 + \xi_2) \xi_4\} = 0 \end{aligned}$$

bestimmt wird. Sie ist demnach ein *Kegelschnitt*, welcher durch

$$\left. \begin{aligned} \xi_3 + 2a\xi_4 &= 0, \\ \xi_1\xi_2 + (b' - a^2)(\xi_1 + \xi_2)\xi_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

dargestellt wird.

Dieser Kegelschnitt enthält die Punkte  $X_1$  und  $X_2$  und schneidet  $l$  im Punkte  $C_\mu$ :

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 = \xi_2 &= 0, \\ \xi_3 + 2a\xi_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

Er trifft die Ebene  $\varepsilon$ , ausser in  $C_\mu$ ,  
im Punkte

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 = \xi_2 &= 2(a^2 - b')\xi_4, \\ \xi_3 + 2a\xi_4 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

oder

$$\begin{aligned} x_1 = x_2 &= \xi_1 + a\xi_3 + b'\xi_4 = \\ &= 2a^2\xi_4 - 2b'\xi_4 - 2a^2\xi_4 + b'\xi_4 = -b'\xi_4, \end{aligned}$$

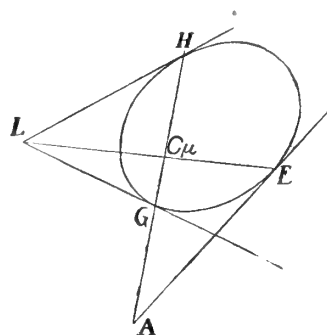


Fig. 8.

also

$$x_1 = x_2 = -b'x_4 = \frac{b'}{2a}x_3. \quad (75)$$

Dieser Punkt ist der Pol  $L$  der Gerade  $l$  ( $x_1 = x_2 = ax_2 + b'x_4$ ) in Bezug auf den Kegelschnitt  $e$ :

$$x_3^2 + 4x_1x_4 = x_3^2 + 4x_2x_4 = 0.$$

Wir können noch erwähnen, dass die Tangente in  $C_\mu$  an dem Doppelkegelschnitte die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 + \xi_2 &= 0, \\ \xi_3 + 2a\xi_4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

hat, und somit den Punkt  $E'$  von  $X_1X_2$  enthält.

### § 9. Die axiale Regelfläche eines Congruenzstrahles $s$ .

Auch hier soll die axiale Regelfläche eines Congruenzstrahles auf direkten Weg ermittelt werden.

Ein Strahl  $p$  schneidet den Strahl  $s$ , wenn die Beziehung

$$p_1 + s_1 = p_2 + s_2 \quad (76)$$

gilt.

Es sollen nun  $p_1$  und  $p_2$  aus (1) und (76) eliminiert werden.

Aus (1) geht hervor

$$p_1 = \frac{-x_3 \pm \sqrt{x_3^2 + 4x_1x_4}}{2x_4},$$

$$p_2 = \frac{-x_3 \pm \sqrt{x_3^2 + 4x_2x_4}}{2x_4}.$$

Die Gleichung (76) ergibt also

$$p_1 - p_2 = \frac{-x_3 \pm \sqrt{x_3^2 + 4x_1x_4}}{2x_4} - \frac{-x_3 \pm \sqrt{x_3^2 + 4x_2x_4}}{2x_4} = -(s_1 - s_2),$$

oder

$$\pm \sqrt{x_3^2 + 4x_1x_4} \mp \sqrt{x_3^2 + 4x_2x_4} = -2(s_1 - s_2)x_4,$$

also

$$\begin{aligned} x_3^2 + 4x_1x_4 + x_3^2 + 4x_2x_4 - 4(s_1 - s_2)^2x_4^2 &= \\ &= \pm 2\sqrt{x_3^4 + 4(x_1 + x_2)x_3^2x_4 + 16x_1x_2x_4^2}, \end{aligned}$$

oder

$$\{2x_3^2 + 4(x_1 + x_2)x_4 - 4(s_1 - s_2)^2x_4^2\}^2 = 4x_3^4 + 16(x_1 + x_2)x_3^2x_4 + 64x_1x_2x_4^2,$$

oder endlich

$$(x_1 - x_2)^2 - 2(s_1 - s_2)^2(x_1 + x_2)x_4 - (s_1 - s_2)^2x_3^2 + (s_1 - s_2)^4x_4^2 = 0. \quad (77)$$

Die axiale Regelfläche eines Congruenzstrahles ist also ein *Hyperboloid*.

Die Fläche schneidet  $\omega_0$  in den Geraden

$$x_1 - x_2 - (s_1 - s_2)x_3 = 0,$$

oder  $SE$ , und

$$x_1 - x_2 + (s_1 - s_2)x_3 = 0,$$

d. h. in der Gerade  $S_1E$ , welche  $E$  mit dem Punkte  $S_1$ :

$$p_1 = -s_1, \quad p_2 = -s_2$$

verbindet, der mit  $S$  das Bild  $S'$  gemein hat.

§ 10. Die axiale Regelfläche eines Congruenzstrahles in  $\varepsilon$ .

Wenn der Congruenzstrahl  $s$  in  $\varepsilon$  liegt, hat man

$$s_1 = s_2,$$

wonach (77) sich in

$$(x_1 - x_2)^2 = 0$$

verwandelt.

Das Hyperboloid ist daher in die doppelt zu zählende Ebene  $\varepsilon$  ausgeartet.

Zum Überflusse bemerken wir noch, dass die Ebene  $\varepsilon' (x_1 + x_2 = 0)$ , welche in der vorigen Congruenz singulär war, jetzt nicht singulär ist. Auch die Ebene  $\omega_0$  ist nunmehr nicht singulär.

### § 11. Die axiale Regelfläche einer Geraden $m$ in $\omega_\infty$ .

Eine in  $\omega_\infty$  befindliche Gerade  $m$  ist ein besonderer Fall einer Geraden  $l_\mu$ , welche in der Ebene  $\omega_\mu$  liegt. Wir haben nl. jetzt

$$\mu = \infty$$

zu setzen.

Die Ausdrücke  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  und  $\beta_3$  gestalten sich nun (siehe S. 126) wie folgt:

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \alpha_3 x_4 a_0', \\ \beta_1 &= \alpha_2 x_4 a_0', \\ \beta_2 &= \alpha_1 x_4 a_0', \\ \beta_3 &= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) a_0',\end{aligned}$$

wo

$$a_0' = \frac{\mu a_0}{\delta}.$$

Ersetzen wir  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  und  $\beta_3$  in der Gleichung (18) durch die obigen Formen, so ergibt sich

$$\begin{vmatrix} 0 & , \alpha_1 x_4 & , \alpha_2 x_4 & , \alpha_3 x_4 \\ (\alpha_1 + \alpha_2) x_4 & , \alpha_3 x_4 & , \alpha_3 x_4 & , \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \\ -(\alpha_1 - \alpha_2) x_4^2 & , (-\alpha_1 x_3 + \alpha_3 x_4) x_1, (\alpha_2 x_3 - \alpha_3 x_4) x_1, (\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2) x_1 \\ -(\alpha_1 + \alpha_2) x_3 + \alpha_3 x_4 & , \alpha_2 x_2 x_4 & , \alpha_1 x_1 x_4 & , 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder, nach Teilung durch  $x_4^3$ :

$$\begin{vmatrix} 0 & , \alpha_1 & , \alpha_2 & , \alpha_3 x_4 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & , \alpha_3 & , \alpha_3 & , \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \\ -(\alpha_1 - \alpha_2) x_4 & , -\alpha_1 x_3 + \alpha_3 x_4, \alpha_2 x_3 - \alpha_3 x_4, (\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2) x_4 \\ -(\alpha_1 + \alpha_2) x_3 + \alpha_3 x_4 & , \alpha_2 x_2 & , \alpha_1 x_1 & , 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (78)$$

Die axiale Regelfläche ist demnach in die dreifach zu zählende Ebene  $\omega_\infty$  und eine kubische Regelfläche zerfallen.

Der Schnitt in  $\omega_\infty$  hat die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 0 & , & \alpha_1 & , & \alpha_2 & , & 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & , & \alpha_3 & , & \alpha_3 & , & \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 \\ 0 & , & -\alpha_1 x_3 & , & \alpha_2 x_3 & , & 0 \\ -(\alpha_1 + \alpha_2) x_3 & , & \alpha_2 x_2 & , & \alpha_1 x_1 & , & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$x_3^2 (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) = 0.$$

Er ist offenbar ausgeartet in die Gerade  $m$  und in die doppelt zu zählende Gerade  $X_1 X_2$ .

Der Schnitt in  $\omega_0$  ist bestimmt durch

$$\begin{vmatrix} 0 & , & \alpha_1 & , & \alpha_2 & , & \alpha_3 x_4 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & , & \alpha_3 & , & \alpha_3 & , & \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \\ -(\alpha_1 - \alpha_2) x_4 & , & \alpha_3 x_4 & , & -\alpha_3 x_4 & , & (\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2) x_4 \\ \alpha_3 x_4 & , & \alpha_2 x_2 & , & \alpha_1 x_1 & , & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$x_4 (\alpha_1^4 x_1^2 + \alpha_2^4 x_2^2 + \alpha_3^4 x_4^2 - 2\alpha_2^2 \alpha_3^2 x_2 x_4 - 2\alpha_1^2 \alpha_3^2 x_1 x_4 - 2\alpha_1^2 \alpha_2^2 x_1 x_2) = 0. \quad (79)$$

Dieses Gebilde besteht aus der Gerade  $X_1 X_2$  und aus dem Bildkegelschnitte  $\mu$  der in  $\omega_\infty$  liegenden Gerade  $m$ .

Der Kegelschnitt  $\mu$  berührt  $X_1 X_2$  im Punkte

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1^2 x_1 - \alpha_2^2 x_2 &= 0, \\ x_4 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (80)$$

d. h. im Bildpunkte  $M'_3$  des Punktes  $M_3$ , wo  $m$  und  $X_1 X_2$  sich schneiden.

Die Doppelkurve der axialen Regelfläche einer in  $\omega_\mu$  liegenden Gerade besteht (siehe S. 130) aus der Gerade  $X_1 X_2$  und aus einem Kegelschnitte, welcher durch die Gleichungen (63) und (64) dargestellt ist ((65) wird hier hinfällig).

Indem wir  $\mu = \infty$  setzen, erhalten diese Gleichungen die folgende Form:

$$\begin{aligned} &[(\alpha_1 + \alpha_2) x_3 - 2\alpha_3 x_4] x_4 = 0, \\ &[2(\alpha_1^2 x_1 - \alpha_2^2 x_2) + (\alpha_1 - \alpha_2) \alpha_3 x_3] x_4 = 0. \end{aligned}$$

Der Kegelschnitt ist offenbar in eine Gerade der Ebene  $\omega_\infty$  und in die Gerade

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_1 + \alpha_2) x_3 - 2 \alpha_3 x_4 &= 0, \\ 2 \alpha_1^2 x_1 - 2 \alpha_2^2 x_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) \alpha_3 x_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad (81)$$

$$\left. \begin{aligned} 2 \alpha_1^2 x_1 - 2 \alpha_2^2 x_2 + (\alpha_1 - \alpha_2) \alpha_3 x_3 &= 0 \\ (\alpha_1 + \alpha_2) x_3 - 2 \alpha_3 x_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad (82)$$

ausgeartet. Sie ist also die *Doppelgerade*  $d_m$  der  $m$  zugehörigen kubischen Regelfläche.

Man ersieht ohne Mühe, dass die Gerade  $d_m$  auch den Punkt  $M'_3$  enthält.

Die Zwickpunkte, d. h. diejenigen Punkte auf  $m$ , wo zwei unendlich benachbarte Congruenzstrahlen sich treffen, gehören natürlich der Fokalfäche an.

Die Ebene (81) trifft den Fokalkegel  $F_1$ , ausser in  $X_1 X_2$ , noch in der Gerade

$$(\alpha_1 + \alpha_2) x_3 - 2 \alpha_3 x_4 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

$$2 (\alpha_1 + \alpha_2) x_2 + \alpha_3 x_3 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (83)$$

und den Fokalkegel  $F_2$ , ausser in  $X_1 X_2$ , in der Gerade

$$(\alpha_1 + \alpha_2) x_3 - 2 \alpha_3 x_4 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

$$2 (\alpha_1 + \alpha_2) x_1 + \alpha_3 x_3 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (84)$$

Der eine Schnittpunkt von  $d_m$  mit der Fokalfäche ist der Punkt  $M'_3$ ; der zweite ist mit demjenigen Punkte  $K$  identisch, welcher durch

$$(\alpha_1 + \alpha_2) x_3 - 2 \alpha_3 x_4 = 0, \quad (81)$$

$$2 (\alpha_1 + \alpha_2) x_1 + \alpha_3 x_3 = 0, \quad (83)$$

$$2 (\alpha_1 + \alpha_2) x_2 + \alpha_3 x_3 = 0, \quad (84)$$

oder

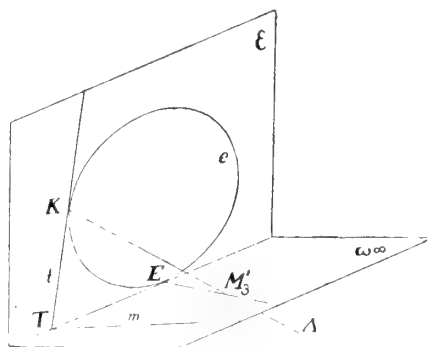


Fig. 9.

$$\frac{x_1}{\alpha_3^2} = \frac{x_2}{\alpha_3^2} = \frac{x_3}{-2 \alpha_3 (\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{x_4}{-(\alpha_1 + \alpha_2)^2}. \quad (85)$$

angewiesen ist.

Der Punkt  $K$  befindet sich daher in der Ebene  $E$ , und zwar auf dem Kegelschnitt  $e$ .

Die Zwickpunkte sind also die Punkte  $M'_3$  und  $K$ .

Es erhellt ohne Weiteres, dass die durch  $M'_3$  gehende *Torsallinie* mit der Gerade  $X_1 X_2$  identisch ist, und dass die durch  $K$  gehende *Torsallinie* durch

$$\left. \begin{aligned} x_4 p_1^2 - x_3 p_1 - x_1 &= 0, \\ x_4 p_2^2 - x_3 p_2 - x_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

also hier durch

$$\left. \begin{aligned} (\alpha_1 + \alpha_2)^2 p_1^2 + 2\alpha_3(\alpha_1 + \alpha_2)p_1 + \alpha_3^2 &= 0, \\ (\alpha_1 + \alpha_2)^2 p_2^2 + 2\alpha_3(\alpha_1 + \alpha_2)p_2 + \alpha_3^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

bestimmt ist, wonach

$$p_1 = \frac{x_1}{x_3} = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2}, \quad (87)$$

$$p_2 = \frac{x_2}{x_3} = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2}. \quad (88)$$

Diese Coordinaten genügen der Beziehung  $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$ ; der Strahl schneidet ja auch die Gerade  $m$ , welche die *einfache Leitlinie* der Fläche ist. Der *Torsalpunkt*  $T$  wird durch die Gleichungen (87), (88) und  $x_4 = 0$  dargestellt.

Die Torsallinie  $t$ , welche durch  $K$  geht, ist der durch  $T$  hindurchgehende Congruenzstrahl, also

$$x_1 = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2} x_3 + \frac{\alpha_3^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} x_4, \quad (89)$$

$$x_2 = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1 + \alpha_2} x_3 + \frac{\alpha_3^2}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2} x_4. \quad (90)$$

Sie berührt den Kegelschnitt  $e$  im Punkte  $K$ .

Der zweite Torsalpunkt ist der Punkt  $M_3$ , wo  $m$  die Gerade  $X_1 X_2$  trifft, daher:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 &= 0, \\ x_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

Die zweite Torsallinie ist, wie schon oben bemerkt wurde, mit der Gerade  $X_1 X_2$  identisch.

§ 12. Wenn die in  $\omega_\infty$  befindliche Gerade  $m$  um einen durch

$$\frac{x_1}{x_3} = a_1, \frac{x_2}{x_3} = a_2, x_4 = 0 \quad (92)$$

gegebenen Punkt  $A$  rotirt, so wird die Doppelgerade  $d_m$  eine gewisse Regelfläche beschreiben.

Weil die Gerade  $m$  stets den Punkt  $A$  enthält, sind die Coefficienten  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$  durch die Beziehung



$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (95)$$

verknüpft.

Wir setzen wieder

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_3} = \varphi_1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (96)$$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_3} = \varphi_2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97)$$

Die Doppelgerade  $d_m$  ergibt sich alsdann (siehe (81 und (82)) aus

$$(\varphi_1 + \varphi_2)x_3 - 2x_4 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

$$2\varphi_1^2 x_1 - 2\varphi_2^2 x_2 + (\varphi_1 - \varphi_2)x_3 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (99)$$

während die Grössen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  (siehe (95)) verbunden sind durch

$$a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (100)$$

Es sollen jetzt, zur Ermittlung der durch  $d_m$  beschriebenen Regelfläche,  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  aus (98), (99) und (100) eliminiert werden.

Aus (98) und (100) folgern wir

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{x_3 + 2a_2 x_4}{(a_1 - a_2)x_3}, \\ \varphi_2 &= +\frac{x_3 + 2a_1 x_4}{(a_1 - a_2)x_3}. \end{aligned}$$

Die Substitution dieser Ausdrücke in (99) ergibt

$$\begin{aligned} &2(x_3 + 2a_2 x_4)^2 x_1 - 2(x_3 + 2a_1 x_4)^2 x_2 - \\ &- 2\{x_3 + (a_1 + a_2)x_4\}(a_1 - a_2)x_3^2 = 0, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} &(x_1 - x_2)x_3^2 + 4(a_2 x_1 - a_1 x_2)x_3 x_4 + 4(a_2^2 x_1 - a_1^2 x_2)x_4^2 - \\ &- (a_1 - a_2)\{x_3 + (a_1 + a_2)x_4\}x_3^2 = 0. \quad . \quad . \quad (101) \end{aligned}$$

Diese Gleichung stellt die Regelfläche ( $d_m$ ) dar, welche offenbar vom *dritten* Grade ist.

Der Schnitt in  $\omega_\infty$  wird durch

$$\{x_1 - x_2 - (a_1 - a_2)x_3\}x_3^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (102)$$

bestimmt.

Er ist also aus der doppelt gezählten Gerade  $X_1 X_2$ , und der Gerade  $AE$  zusammengesetzt.

Der Schnitt in  $\omega_0$  hat die Gleichung

$$(a_2^2 x_1 - a_1^2 x_2) x_4^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (103)$$

Er besteht aus der doppelt zu zählenden Gerade  $X_1 X_2$  und aus der Gerade

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2},$$

d. h.  $X_4 A'$ .

Aus der Gleichung (101) erkennen wir, dass  $X_1 X_2$  die Doppelgerade  $\Delta$  der Regelfläche ist.

Die einfache Leitlinie ist natürlich der Congruenzstrahl  $a = AA'$ , welche  $A$  mit seinem Bilde  $A'$  in  $\omega_0$  vereinigt. Sie wird ja durch jede  $d_m$  geschnitten, weil sie der axialen Regelfläche jeder  $d_m$  angehört.

Ein Punkt

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 &= 0, \\ x_3 &= 0, \\ x_4 &= 0 \end{aligned} \right\} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

der Doppelgerade  $\Delta$  trägt zwei Geraden  $d_m$ .

Eine Gerade  $d_m$  wird bestimmt durch die Linienkoordinaten  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  derjenigen Gerade  $m$ , auf deren axiale Regelfläche sie Doppelgerade ist.

Aus (99) und (100) geht hervor, dass ein Punkt (104) zwei Paare  $(\varphi_1, \varphi_2)$  bestimmt, also zwei Geraden  $m$ , und deshalb zwei Geraden  $d_m$ . Diese zwei Paare  $(\varphi_1, \varphi_2)$  sind durch

$$\lambda_2 \varphi_1^2 + \lambda_1 \varphi_2^2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (105)$$

$$a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (100)$$

gegeben.

Die Elimination von  $\varphi_1$  ergibt

$$(\lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2) \varphi_2^2 + 2 \lambda_2 a_2 \varphi_2 + \lambda_2 = 0. \quad . \quad . \quad (106)$$

Die beiden hieraus fließenden Werte von  $\varphi_2$  coincidiren, wenn man hat

$$\lambda_1 = 0,$$

d. h. im Punkte  $X_1$  ( $x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0$ ) ruhen zwei unendlich

benachbarte Geraden  $d_m$ . Der Punkt  $X_1$  ist demnach ein *Zwickpunkt*. In derselben Weise zeigt man, dass auch  $X_2$  ein Zwickpunkt ist. Indem wir  $\lambda_1 = 0$  setzen, finden wir aus (106)

$$\varphi_2 = -\frac{1}{a_2},$$

und daher aus (100)

$$\varphi_1 = 0.$$

Die Torsallinie  $f_1$  von  $X_1$  ist somit durch

$$\left. \begin{aligned} -\frac{x_3}{a_2} - 2x_4 &= 0, \\ -\frac{2x_2}{a_2^2} + \frac{x_3}{a_2} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

oder durch

$$\left. \begin{aligned} x_3 + 2a_2x_4 &= 0, \\ 2x_2 - a_2x_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (110)$$

bestimmt.

Die Gerade  $f_1$  liegt in der Ebene  $x_2 - a_2x_3 - a_2^2x_4 = 0$  und schneidet den Congruenzstrahl  $a$  (einfache Leitlinie von  $(d_m)$ ) in dem Torsalpunkte  $A_{f_2}$ :

$$-\frac{x_1}{a_1(a_1 - 2a_2)} = \frac{x_2}{a_2^2} = \frac{x_3}{2a_2} = \frac{x_4}{-1} \quad . \quad . \quad . \quad (112)$$

Dieser Punkt  $A_{f_2}$  ist der Berührungspunkt von  $a$  mit dem Fokalkegel  $F_2$ .

Die Torsallinie  $f_1$  verbindet also  $X_1$  mit dem Brennpunkte  $A_{f_2}$  des Congruenzstrahles  $a = AA'$ .

Die zweite Torsallinie ( $f_2$ ) wird ebenso  $X_2$  mit dem Torsalpunkte  $A_{f_1}$ , dem zweiten Brennpunkte von  $a$ , vereinigen. Ihre Gleichungen sind

$$\left. \begin{aligned} x_3 + 2a_1x_4 &= 0, \\ 2x_1 - a_1x_3 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (111)$$

während der zweite Torsalpunkt  $A_{f_1}$  durch

$$\frac{x_1}{a_1^2} = \frac{x_2}{a_2(2a_1 - a_2)} = \frac{x_3}{2a_1} = \frac{x_4}{-1} \quad . \quad . \quad . \quad (113)$$

angewiesen wird.

Jeder Punkt  $A$  in  $\omega_\infty$  bestimmt eine derartige Regelfläche ( $d_m$ ), auf der  $a = AA'$  die einfache Leitlinie,  $X_1 X_2$  die Doppelgerade ist.

Wenn wir  $A$  die ganze Ebene  $\omega_\infty$  beschreiben lassen, so wird die einfache Leitlinie die Strahlencongruenz erzeugen; die Doppelgerade dagegen bleibt immer mit der Gerade  $X_1 X_2$  identisch, während  $X_1$  und  $X_2$  sich stets als Zwickpunkte verhalten.

§ 13. *Die Regelfläche der Congruenzstrahlen, welche auf einem durch die Punkte  $X_1$  und  $X_2$  hindurchgehenden Kegelschnitt ruhen.*

Wir legen den Kegelschnitt  $\gamma_\mu$ , auf welchem die Erzeugenden der zu untersuchenden Regelfläche ruhen, in die Ebene  $\omega_\mu$ ,

$$x_3 = \mu x_4,$$

und geben ihm die Gleichungen

$$\alpha_3 \beta_3 x_1 x_2 + x_1 (\alpha_2 \beta_3 x_3 + \alpha_3 \beta_2 x_4) + x_2 (\alpha_1 \beta_3 x_3 + \alpha_3 \beta_1 x_4) + (\alpha_0 \beta_3 x_3^2 + \alpha_3 \beta_0 x_4^2) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (114)$$

$$x_3 = \mu x_4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (115)$$

(Vergl. I. Abschnitt, S. 20).

Die Erzeugenden der jetzigen Regelfläche haben diejenigen Coordinaten ( $p_1, p_2$ ), welche der durch Elimination von  $x_1, x_2, x_3$  und  $x_4$  aus (1), (114) und (115) ermittelten Beziehung genügen. Die Elimination von  $x_3$  liefert

$$\begin{aligned} \alpha_3 \beta_3 x_1 x_2 + (\alpha_2 \beta_3 \mu + \alpha_3 \beta_2) x_1 x_4 + (\alpha_1 \beta_3 \mu + \alpha_3 \beta_1) x_2 x_4 + \\ + (\alpha_0 \beta_3 \mu^2 + \alpha_3 \beta_0) x_4^2 = 0, \\ x_1 = (p_1 \mu + p_1^2) x_4, \\ x_2 = (p_2 \mu + p_2^2) x_4. \end{aligned}$$

Durch Elimination von  $x_1$  und  $x_2$  gelangen wir zu

$$\begin{aligned} \alpha_3 \beta_3 p_1^2 p_2^2 + \alpha_3 \beta_3 \mu p_1^2 p_2 + \alpha_3 \beta_3 \mu p_1 p_2^2 + (\alpha_2 \beta_3 \mu + \alpha_3 \beta_2) p_1^2 + \\ + (\alpha_1 \beta_3 \mu + \alpha_3 \beta_1) p_2^2 + \alpha_3 \beta_3 \mu^2 p_1 p_2 + (\alpha_2 \beta_3 \mu + \alpha_3 \beta_2) \mu p_1 + \\ + (\alpha_1 \beta_3 \mu + \alpha_3 \beta_1) \mu p_2 + (\alpha_0 \beta_3 \mu^2 + \alpha_3 \beta_0) = 0, \quad . \quad (116) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \gamma_0 p_1^2 p_2^2 + \gamma_1 p_1^2 p_2 + \gamma_2 p_1 p_2^2 + \gamma_1' p_1^2 + \gamma_2' p_2^2 + \gamma_0' p_1 p_2 + \\ + \gamma_1'' p_1 + \gamma_2'' p_2 + \gamma_0'' = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (117) \end{aligned}$$

Wir ersetzen nun  $p_1^2$  durch  $\frac{-p_1 x_3 + x_1}{x_4}$ ,  $p_2^2$  durch  $\frac{-p_2 x_3 + x_2}{x_4}$ ,

und erhalten dann

$$[\gamma_0 x_3^2 - (\gamma_1 + \gamma_2) x_3 x_4 + \gamma_0' x_4^2] p_1 p_2 + [-\gamma_0 x_2 x_3 + \gamma_2 x_2 x_4 - \gamma_1' x_3 x_4 + \gamma_1'' x_4^2] p_1 + [-\gamma_0 x_1 x_3 + \gamma_1 x_1 x_4 - \gamma_2' x_3 x_4 + \gamma_2'' x_4^2] p_2 + [\gamma_0 x_1 x_2 + \gamma_1' x_1 x_4 + \gamma_2' x_2 x_4 + \gamma_0'' x_4^2] = 0. \quad (118)$$

Setzen wir, der Kürze wegen,

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 x_3^2 - (\gamma_1 + \gamma_2) x_3 x_4 + \gamma_0' x_4^2 &= \theta_3, \\ -\gamma_0 x_2 x_3 + \gamma_2 x_2 x_4 - \gamma_1' x_3 x_4 + \gamma_1'' x_4^2 &= \theta_2, \\ -\gamma_0 x_1 x_3 + \gamma_1 x_1 x_4 - \gamma_2' x_3 x_4 + \gamma_2'' x_4^2 &= \theta_1, \\ \gamma_0 x_1 x_2 + \gamma_1' x_1 x_4 + \gamma_2' x_2 x_4 + \gamma_0'' x_4^2 &= \theta_0, \end{aligned} \right\} \quad (119)$$

so können wir (118) in der folgenden Form schreiben:

$$\theta_3 p_1 p_2 + \theta_2 p_1 + \theta_1 p_2 + \theta_0 = 0. \quad (120)$$

Aus dieser Gleichung können mittels (1) oder (10) drei andere Gleichungen in  $p_1 p_2$ ,  $p_1$  und  $p_2$  abgeleitet werden (vergl. S. 77).

Wir multipliciren (120) mit  $x_4 p_1$  und erhalten dann

$$\theta_3 x_4 p_1^2 p_2 + \theta_2 x_4 p_1^2 + \theta_1 x_4 p_1 p_2 + \theta_0 x_4 p_1 = 0,$$

oder nach Verwendung von (10):

$$-\theta_3 x_3 p_1 p_2 + \theta_3 x_1 p_2 - \theta_2 x_3 p_1 + \theta_2 x_1 + \theta_1 x_4 p_1 p_2 + \theta_0 x_4 p_1 = 0,$$

oder

$$(\theta_3 x_3 - \theta_1 x_4) p_1 p_2 + (\theta_2 x_3 - \theta_0 x_4) p_1 - \theta_3 x_1 p_2 - \theta_2 x_1 = 0. \quad (121)$$

Ebenso, durch Multiplikation mit  $x_4 p_2$ :

$$(\theta_3 x_3 - \theta_2 x_4) p_1 p_2 - \theta_3 x_2 p_1 + (\theta_1 x_3 - \theta_0 x_4) p_2 - \theta_1 x_2 = 0. \quad (122)$$

Schliesslich multipliciren wir (121) mit  $x_4 p_2$ , wonach sich ergibt

$$(\theta_3 x_3 - \theta_1 x_4) x_4 p_1 p_2^2 + (\theta_2 x_3 - \theta_0 x_4) x_4 p_1 p_2 - \theta_3 x_1 x_4 p_2^2 - \theta_2 x_1 x_4 p_2 = 0,$$

also nach Benutzung von (10):

$$-(\theta_3 x_3 - \theta_1 x_4) x_3 p_1 p_2 + (\theta_3 x_3 - \theta_1 x_4) x_2 p_1 + (\theta_2 x_3 - \theta_0 x_4) x_1 p_1 p_2 + \theta_3 x_1 x_3 p_2 - \theta_3 x_1 x_2 - \theta_2 x_1 x_4 p_2 = 0,$$

oder

$$\begin{aligned} &[\theta_3 x_3^2 - (\theta_1 + \theta_2) x_3 x_4 + \theta_0 x_4^2] p_1 p_2 - (\theta_3 x_3 - \theta_1 x_4) x_2 p_1 - \\ &-(\theta_3 x_3 - \theta_2 x_4) x_1 p_2 + \theta_3 x_1 x_2 = 0. \end{aligned} \quad (123)$$

Wenn wir nun  $p_1 p_2$ ,  $p_1$  und  $p_2$  aus (120), (121), (122) und (123) eliminieren, so bekommen wir die folgende Gleichung:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \theta_3 & , \theta_2 & , \theta_1 & , \theta_0 \\ \theta_3 x_3 - \theta_1 x_4 & , \theta_2 x_3 - \theta_0 x_4 & , -\theta_3 x_1 & , -\theta_2 x_1 \\ \theta_3 x_3 - \theta_2 x_4 & , -\theta_3 x_2 & , \theta_1 x_3 - \theta_0 x_4 & , -\theta_1 x_2 \\ \theta_3 x_3^2 - (\theta_1 + \theta_2) x_3 x_4 + \theta_0 x_4^2 & , -(\theta_3 x_3 - \theta_1 x_4) x_2 & , -(\theta_3 x_3 - \theta_2 x_4) x_1 & , \theta_3 x_1 x_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Indem wir  $x_3^2$  mal die erste,  $-x_3^2$  mal die zweite und  $-x_3$  mal die dritte Horizontalreihe zu der vierten addieren, erhalten wir

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \theta_3 & , \theta_2 & , \theta_1 & , \theta_0 \\ \theta_3 x_3 - \theta_1 x_4 & , \theta_2 x_3 - \theta_0 x_4 & , -\theta_3 x_1 & , -\theta_2 x_1 \\ \theta_3 x_3 - \theta_2 x_4 & , -\theta_3 x_2 & , \theta_1 x_3 - \theta_0 x_4 & , -\theta_1 x_2 \\ \theta_0 x_4^2 & , (\theta_1 x_2 + \theta_0 x_3) x_4 & , (\theta_2 x_1 + \theta_0 x_3) x_1 & , \theta_3 x_1 x_2 + \theta_2 x_1 x_3 + \theta_1 x_2 x_3 + \theta_0 x_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Beziehungen (119) gestatten uns die folgenden Reduktionen auszuführen:

$$\begin{aligned} \theta_1 x_2 + \theta_0 x_3 &= -\gamma_0' x_1 x_2 x_3 + \gamma_1' x_1 x_2 x_4 - \gamma_2' x_2 x_3 x_4 + \gamma_2'' x_2 x_4^2 + \gamma_0' x_1 x_2 x_3 + \\ &\quad + \gamma_1' x_1 x_3 x_4 + \gamma_2' x_2 x_3 x_4 + \gamma_0'' x_3 x_4^2 \\ &= (\gamma_1' x_1 x_2 + \gamma_1' x_1 x_3 + \gamma_2'' x_2 x_4 + \gamma_0'' x_3 x_4) x_4, \\ \theta_2 x_1 + \theta_0 x_3 &= (\gamma_2' x_1 x_2 + \gamma_2' x_2 x_3 + \gamma_1'' x_1 x_4 + \gamma_0'' x_3 x_4) x_4, \\ \theta_3 x_1 x_2 + \theta_2 x_1 x_3 + \theta_1 x_2 x_3 + \theta_0 x_3^2 &= \gamma_0' x_1 x_2 x_3^2 - (\gamma_1 + \gamma_2) x_1 x_2 x_3 x_4 + \gamma_0' x_1 x_2 x_4^2 - \\ &\quad - \gamma_0' x_1 x_2 x_3^2 + \gamma_2' x_1 x_2 x_3 x_4 - \gamma_1' x_1 x_3^2 x_4 + \gamma_1'' x_1 x_3 x_4^2 - \\ &\quad - \gamma_0' x_1 x_2 x_3^2 + \gamma_1' x_1 x_2 x_3 x_4 - \gamma_2' x_2 x_3^2 x_4 + \gamma_2'' x_2 x_3 x_4^2 + \\ &\quad + \gamma_0' x_1 x_2 x_3^2 + \gamma_1' x_1 x_3^2 x_4 + \gamma_2' x_2 x_3^2 x_4 + \gamma_0'' x_3^2 x_4^2 \\ &= (\gamma_0' x_1 x_2 + \gamma_1'' x_1 x_3 + \gamma_2'' x_2 x_3 + \gamma_0'' x_3^2) x_4^2. \end{aligned}$$

Der Kürze halber, setzen wir noch

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1' x_1 x_2 + \gamma_1' x_1 x_3 + \gamma_2'' x_2 x_4 + \gamma_0'' x_3 x_4 &= \theta_4, \\ \gamma_2' x_1 x_2 + \gamma_2' x_2 x_3 + \gamma_1'' x_1 x_4 + \gamma_0'' x_3 x_4 &= \theta_5, \\ \gamma_0' x_1 x_2 + \gamma_1'' x_1 x_3 + \gamma_2'' x_2 x_3 + \gamma_0'' x_3^2 &= \theta_6. \end{aligned} \right\} \quad (124)$$

Die Gleichung der Regelfläche erscheint also teilbar durch  $x_4^2$ ; nach dieser Teilung ergibt sich

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \theta_3 & , \theta_2 & , \theta_1 & , \theta_0 \\ \theta_3 x_3 - \theta_1 x_4 & , \theta_2 x_3 - \theta_0 x_4 & , -\theta_3 x_1 & , -\theta_2 x_1 \\ \theta_3 x_3 - \theta_2 x_4 & , -\theta_3 x_2 & , \theta_1 x_3 - \theta_0 x_4 & , -\theta_1 x_2 \\ \theta_0 & , \theta_4 & , \theta_5 & , \theta_6 \end{vmatrix} = 0.$$

Subtrahiren wir  $x_3$  mal die erste Horizontalreihe von der zweiten und von der dritten, so folgt:

$$\Delta' \equiv \begin{vmatrix} \theta_3 & , & \theta_2 & , & \theta_1 & , & \theta_0 \\ -\theta_1 x_4 & , & -\theta_0 x_4 & , & -(\theta_3 x_1 + \theta_1 x_3) & , & -(\theta_2 x_1 + \theta_0 x_3) \\ -\theta_2 x_4 & , & -(\theta_3 x_2 + \theta_2 x_3) & , & -\theta_0 x_4 & , & -(\theta_1 x_2 + \theta_3 x_3) \\ \theta_0 & , & \theta_4 & , & \theta_5 & , & \theta_6 \end{vmatrix} = 0.$$

Eine kleine Reduktion ergibt

$$\begin{aligned} \theta_3 x_2 + \theta_2 x_3 &= (-\gamma_1 x_2 x_3 + \gamma_0' x_2 x_4 - \gamma_1' x_3^2 + \gamma_1'' x_3 x_4) x_4, \\ \theta_3 x_1 + \theta_1 x_3 &= (-\gamma_2 x_1 x_3 + \gamma_0' x_1 x_4 - \gamma_2' x_3^2 + \gamma_2'' x_3 x_4) x_4, \end{aligned}$$

oder, wenn wir

$$\left. \begin{aligned} -\gamma_1 x_2 x_3 + \gamma_0' x_2 x_4 - \gamma_1' x_3^2 + \gamma_1'' x_3 x_4 &= \theta_7, \\ -\gamma_2 x_1 x_3 + \gamma_0' x_1 x_4 - \gamma_2' x_3^2 + \gamma_2'' x_3 x_4 &= \theta_8 \end{aligned} \right\} \quad (125)$$

setzen,

$$\begin{aligned} \theta_3 x_2 + \theta_2 x_3 &= \theta_7 x_4, \\ \theta_3 x_1 + \theta_1 x_3 &= \theta_8 x_4, \end{aligned}$$

während wir oben gefunden haben:

$$\begin{aligned} \theta_1 x_2 + \theta_0 x_3 &= \theta_4 x_4, \\ \theta_2 x_1 + \theta_0 x_3 &= \theta_5 x_4. \end{aligned}$$

Wenn wir diese Ausdrücke in die Determinantengleichung einsetzen, so erscheint diese abermals durch  $x_4^2$  teilbar; nach Teilung durch  $x_4^2$  bekommt man:

$$\Delta'' \equiv \begin{vmatrix} \theta_3 & , & \theta_2 & , & \theta_1 & , & \theta_0 \\ \theta_1 & , & \theta_0 & , & \theta_8 & , & \theta_5 \\ \theta_2 & , & \theta_7 & , & \theta_0 & , & \theta_4 \\ \theta_0 & , & \theta_4 & , & \theta_5 & , & \theta_6 \end{vmatrix} = 0. \quad (126)$$

Die Grössen  $\theta$  sind alle vom zweiten Grade in den Coordinaten, wonach die Gleichung (126) vom *achten* Grade ist.

Wir sehen somit, dass die Regelfläche der Strahlen, welche auf einem willkürlichen, durch  $X_1$  und  $X_2$  gelegten Kegelschnitt  $\gamma_\mu$  ruhen, vom achten Grade ist; es leuchtet ein, dass  $\gamma_\mu$  auf dieser Regelfläche eine *vierfache* Kurve ist.

Der Durchschnitt mit  $\omega_\infty$  wird ermittelt, indem wir in der Gleichung (126)  $x_4 = 0$  setzen; die Grössen  $\theta$  erhalten dann die folgenden Werte (siehe (119), (124) und (125)):

$$\left. \begin{aligned} \theta_3 &= \gamma_0 x_3^2, \\ \theta_2 &= -\gamma_0 x_2 x_3, \\ \theta_1 &= -\gamma_0 x_1 x_3, \\ \theta_0 &= \gamma_0 x_1 x_2, \\ \theta_4 &= \gamma_1 x_1 x_2 + \gamma_1' x_1 x_3, \\ \theta_5 &= \gamma_2 x_1 x_2 + \gamma_2' x_2 x_3, \\ \theta_6 &= \gamma_0' x_1 x_2 + \gamma_1'' x_1 x_3 + \gamma_2'' x_2 x_3 + \gamma_0'' x_3^2, \\ \theta_7 &= -(\gamma_2 x_1 x_3 + \gamma_2' x_3^2), \\ \theta_8 &= -(\gamma_1 x_2 x_3 + \gamma_1' x_3^2). \end{aligned} \right\} \quad (127)$$

Die Gleichung (126) verwandelt sich daher in:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 x_3^2, & -\gamma_0 x_2 x_3, & -\gamma_0 x_1 x_3, & \gamma_0 x_1 x_2 \\ -\gamma_0 x_1 x_3, & \gamma_0 x_1 x_2, & -(\gamma_2 x_1 + \gamma_2' x_3) x_3, & (\gamma_2 x_1 + \gamma_2' x_3) x_2 \\ -\gamma_0 x_2 x_3, & -(\gamma_1 x_2 + \gamma_1' x_3) x_3, & \gamma_0 x_1 x_2, & (\gamma_1 x_2 + \gamma_1' x_3) x_1 \\ \gamma_0 x_1 x_2, & (\gamma_1 x_2 + \gamma_1' x_3) x_1, & (\gamma_2 x_1 + \gamma_2' x_3) x_2, & \gamma_0' x_1 x_2 + \gamma_1'' x_1 x_3 + \gamma_2'' x_2 x_3 + \gamma_0'' x_3^2 \end{aligned} \right\} = 0. \quad (128)$$

Die Grössen  $\gamma$  waren durch die folgenden Ausdrücke definiert:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 &= \alpha_3 \beta_3, \\ \gamma_1 &= \mu \alpha_3 \beta_3, \\ \gamma_2 &= \mu \alpha_3 \beta_3, \\ \gamma_0' &= \mu^2 \alpha_3 \beta_3, \\ \gamma_1' &= (\alpha_2 \beta_3 \mu + \alpha_3 \beta_2), \\ \gamma_2' &= (\alpha_1 \beta_3 \mu + \alpha_3 \beta_1), \\ \gamma_1'' &= \mu (\alpha_2 \beta_3 \mu + \alpha_3 \beta_2), \\ \gamma_2'' &= \mu (\alpha_1 \beta_3 \mu + \alpha_3 \beta_1), \\ \gamma_0'' &= (\alpha_0 \beta_3 \mu^2 + \alpha_3 \beta_0), \end{aligned} \right\} \quad (129)$$

aus welchen diese Beziehungen hervorgehen:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma_2 = \mu \gamma_0, \\ \gamma_0' &= \mu^2 \gamma_0, \\ \gamma_1' &= \mu \gamma_1', \\ \gamma_2' &= \mu \gamma_2'. \end{aligned} \right\} \quad (130)$$

Vermöge (130) schreiben wir (128) in dieser Form:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 x_3^2, & -\gamma_0 x_2 x_3, & -\gamma_0 x_1 x_3, & \gamma_0 x_1 x_2 \\ -\gamma_0 x_1 x_3, & \gamma_0 x_1 x_2, & -(\mu \gamma_0 x_1 + \gamma_2' x_3) x_3, & (\mu \gamma_0 x_1 + \gamma_2' x_3) x_2 \\ -\gamma_0 x_2 x_3, & -(\mu \gamma_0 x_2 + \gamma_1' x_3) x_3, & \gamma_0 x_1 x_2, & (\mu \gamma_0 x_2 + \gamma_1' x_3) x_1 \\ \gamma_0 x_1 x_2, & (\mu \gamma_0 x_2 + \gamma_1' x_3) x_1, & -(\mu \gamma_0 x_1 + \gamma_2' x_3) x_2, & \mu^2 \gamma_0 x_1 x_2 + \mu \gamma_1' x_1 x_3 + \mu \gamma_2' x_2 x_3 + \gamma_0'' x_3^2 \end{aligned} \right\} = 0.$$



Wir multipliciren die zweite und die dritte Horizontalreihe mit  $x_3$  und addiren zu der neuen zweiten Reihe  $x_1$  mal die erste, und zu der neuen dritten Reihe  $x_2$  mal die erste. Wir erhalten dann

$$\left| \begin{array}{ccc} x_3^2, -\gamma_0 x_2 x_3 & , -\gamma_0 x_1 x_3 & , \\ 0, 0 & , -x_3(\gamma_0 x_1^2 + \mu \gamma_0 x_1 x_3 + \gamma_2' x_3^2), & \\ 0, -x_3(\gamma_0 x_2^2 + \mu \gamma_0 x_2 x_3 + \gamma_1' x_3^2), & 0 & , \\ x_1 x_2, (\mu \gamma_0 x_2 + \gamma_1' x_3) x_1 & , (\mu \gamma_0 x_1 + \gamma_2' x_3) x_2 & , \\ & \gamma_0 x_1 x_2 & \\ & x_2(\gamma_0 x_1^2 + \mu \gamma_0 x_1 x_3 + \gamma_2' x_3^2) & \\ & x_1(\gamma_0 x_2^2 + \mu \gamma_0 x_2 x_3 + \gamma_1' x_3^2) & \\ & \mu^2 \gamma_0 x_1 x_2 + \mu \gamma_1' x_1 x_3 + \mu \gamma_2' x_2 x_3 + \gamma_0'' x_3^2 & \end{array} \right| = 0.$$

Jetzt multipliciren wir die letzte Vertikalreihe mit  $x_3^2$  und addiren zu ihr:  $\gamma_0 x_1 x_2$  mal die erste,  $x_1 x_3$  mal die zweite und  $x_2 x_3$  mal die dritte Vertikalreihe; wir bekommen dann

$$\left| \begin{array}{ccc} x_3^2, -\gamma_0 x_2 x_3 & , -\gamma_0 x_1 x_3 & , 0 \\ 0, 0 & , -x_3(\gamma_0 x_1^2 + \mu \gamma_0 x_1 x_3 + \gamma_2' x_3^2), & 0 \\ 0, -x_3(\gamma_0 x_2^2 + \mu \gamma_0 x_2 x_3 + \gamma_1' x_3^2), & 0 & , 0 \\ x_1 x_2, (\mu \gamma_0 x_2 + \gamma_1' x_3) x_1 & , (\mu \gamma_0 x_1 + \gamma_2' x_3) x_2 & , \Pi \end{array} \right| = 0,$$

oder

$$x_3^4 \Pi (\gamma_0 x_1^2 + \mu \gamma_0 x_1 x_3 + \gamma_2' x_3^2) (\gamma_0 x_2^2 + \mu \gamma_0 x_2 x_3 + \gamma_1' x_3^2) = 0, \quad (131)$$

wo zur Abkürzung

$$\Pi = \gamma_0 x_1^2 x_2^2 + \mu \gamma_0 x_1^2 x_2 x_3 + \mu \gamma_0 x_1 x_2^2 x_3 + \gamma_1' x_1^2 x_3^2 + \gamma_2' x_2^2 x_3^2 + \mu^2 \gamma_0 x_1 x_2 x_3^2 + \mu \gamma_1' x_1 x_3^3 + \mu \gamma_2' x_2 x_3^3 + \gamma_0'' x_3^4 = 0 \quad (132)$$

gesetzt ist.

Die Gleichung (128), welche nach Multiplikation mit  $x_3^4$  in die Form (131) gebracht wurde, ist deshalb als die Gesamtheit der folgenden drei Gleichungen zu betrachten:

$$\left. \begin{array}{l} \Pi = 0, \\ \gamma_0 x_1^2 + \mu \gamma_0 x_1 x_3 + \gamma_2' x_3^2 = 0, \\ \gamma_0 x_2^2 + \mu \gamma_0 x_2 x_3 + \gamma_1' x_3^2 = 0. \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (133)$$

Die Gleichung  $\Pi = 0$ , welche den nicht-geraden Bestandteil des Durchschnittes darstellt, würde natürlich auch erhalten sein, wenn in (116)  $p_1$  und  $p_2$  durch  $x_1 : x_3$  und  $x_2 : x_3$  ersetzt wären.

Die zweite der Gleichungen (133) bestimmt zwei Geraden durch  $X_2$ , die dritte zwei Geraden durch  $X_1$ .

Der Schnitt von  $\omega_\infty$  mit der Regelfläche der Congruenzstrahlen welche auf einem durch  $X_1$  und  $X_2$  gelegten, sich in der Ebene  $x_3 = \mu x_4$  befindenden Kegelschnitt  $\gamma_\mu$  ruhen, besteht also aus einer biquadratischen Kurve  $\Pi = 0$ , aus zwei Geraden durch  $X_1$  und aus zwei Geraden durch  $X_2$ .

Auch an dieser Stelle wollen wir die Bedeutung jener Geraden zu erforschen versuchen.

Die Congruenzstrahlen, welche auf der in  $\omega_\infty$  befindlichen Gerade

$$x_1 = p_1 x_3, \quad x_4 = 0$$

ruhen, liegen in der Ebene

$$x_1 = p_1 x_3 + p_1^2 x_4. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (134)$$

Die auf

$$x_1 = q_1 x_3, \quad x_4 = 0$$

ruhenden Strahlen befinden sich in

$$x_1 = q_1 x_3 + q_1^2 x_4. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (135)$$

Die Ebenen (134) und (135) haben dieselbe Schnittlinie wie die Ebenen

$$x_3 = -(p_1 + q_1)x_4. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (136)$$

$$2x_1 = (p_1 + q_1)x_3 + (p_1^2 + q_1^2)x_4. \quad . \quad . \quad (137)$$

Für die zwei Geraden, welche durch

$$\gamma_0 x_1^2 + \mu \gamma_0 x_1 x_3 + \gamma_2' x_3^2 = 0$$

angewiesen sind, gilt

$$\begin{aligned} p_1 + q_1 &= -\mu, \\ p_1 q_1 &= \frac{\gamma_2'}{\gamma_0}. \end{aligned}$$

Die Congruenzstrahlen, welche diese beiden Geraden schneiden, liegen demnach in den Ebenen, welche sich schneiden in der Gerade

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= \mu x_4, \\ 2x_1 + \mu x_3 - \frac{\mu^2 \gamma_0 - 2\gamma_2'}{\gamma_0} x_4 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= \mu x_4, \\ \gamma_0 x_1 + \gamma_2' x_4 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (138)$$

also, wegen (129),

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= \mu x_4, \\ \alpha_3 \beta_3 x_1 + (\alpha_1 \beta_3 \mu + \alpha_3 \beta_1) x_4 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= \mu x_4, \\ \alpha_3 \beta_3 x_1 + \alpha_1 \beta_3 x_3 + \alpha_3 \beta_1 x_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad (139)$$

Die fragliche Schnittlinie ist daher identisch mit der Tangente in  $X_2$  an dem Kegelschnitt  $\gamma_\mu$ , welcher alle Congruenzstrahlen trägt.

Die beiden Geraden durch  $X_1$ , welche dem Schnitte in  $\omega_\infty$  angehören, sind offenbar die Congruenzstrahlen durch den  $X_1$  vorangehenden Punkt von  $\gamma_\mu$ , während die beiden Geraden durch  $X_2$  die Strahlen sind, welche nach dem  $X_2$  unendlich benachbarten Punkte von  $\gamma_\mu$  zielen.

Die beiden Geraden durch  $X_1$  sind ausserdem die Tangenten an der Kurve  $\Pi$  in ihrem Doppelpunkte  $X_1$ ; dasselbe kann von den zwei Geraden durch  $X_2$  behauptet werden.

Der Schnitt in  $\omega_0$  fordert  $x_3 = 0$ ; für die Grössen  $\theta$  finden wir daher die folgenden Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} \theta_3 &= \gamma_0' x_4^2, \\ \theta_2 &= \gamma_2 x_2 x_4 + \gamma_1'' x_4^2, \\ \theta_1 &= \gamma_1 x_1 x_4 + \gamma_2'' x_4^2, \\ \theta_0 &= \gamma_0 x_1 x_2 + \gamma_1' x_1 x_4 + \gamma_2' x_2 x_4 + \gamma_0'' x_4^2, \\ \theta_4 &= \gamma_1 x_1 x_2 + \gamma_2'' x_2 x_4, \\ \theta_5 &= \gamma_2 x_1 x_2 + \gamma_1'' x_1 x_4, \\ \theta_6 &= \gamma_0' x_1 x_2, \\ \theta_7 &= \gamma_0' x_2 x_4, \\ \theta_8 &= \gamma_0' x_1 x_4. \end{aligned} \right\} \quad (127a)$$

Indem wir diese Werte in die Gleichung (126) einsetzen, erhalten wir die Gleichung der gesuchten Kurve. Sie ist vom achten Grade und nicht ausgeartet, weil die Ebene  $\omega_0$  keine singulären Eigenschaften aufweist.

§ 14. *Die Regelfläche der Congruenzstrahlen, welche auf einem durch  $X_1$  und  $X_2$  gelegten, in  $\omega_\infty$  befindlichen Kegelschnitt ruhen.*

Der betreffende Kegelschnitt muss mit  $\gamma_\infty$  bezeichnet werden.

Wir haben ja in dem Obigen nur

$$\mu = \infty$$

zu setzen, wonach der Kegelschnitt  $\gamma_\infty$  durch

$$\left. \begin{aligned} \alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_2 x_1 x_3 + \alpha_1 x_2 x_3 + \alpha_0 x_3^2 = 0, \\ x_4 = 0 \end{aligned} \right\} . \quad (140)$$

angewiesen wird.

Die Grössen  $\gamma$  sind nun definirt durch

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \alpha_3, \\ \gamma_1 &= \mu \alpha_3, \\ \gamma_2 &= \mu \alpha_3, \\ \gamma_0' &= \mu^2 \alpha_3, \\ \gamma_1' &= \mu \alpha_2, \\ \gamma_2' &= \mu \alpha_1, \\ \gamma_1'' &= \mu^2 \alpha_2, \\ \gamma_2'' &= \mu^2 \alpha_1, \\ \gamma_0'' &= \mu^2 \alpha_0, \end{aligned}$$

wo der Faktor  $\beta_3$  gestrichen ist.

Die Ausdrücke  $\theta$  bekommen nun diese Gestalt (siehe (119), (124) und (125)):

$$\begin{aligned} \theta_3 &= \mu^2 \alpha_3 x_4^2, \\ \theta_2 &= \mu^2 \alpha_2 x_4^2, \\ \theta_1 &= \mu^2 \alpha_1 x_4^2, \\ \theta_0 &= \mu^2 \alpha_0 x_4^2, \\ \theta_4 &= \mu^2 (\alpha_1 x_2 + \alpha_0 x_3) x_4, \\ \theta_5 &= \mu^2 (\alpha_2 x_1 + \alpha_0 x_3) x_4, \\ \theta_6 &= \mu^2 (\alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_2 x_1 x_3 + \alpha_1 x_2 x_3 + \alpha_0 x_3^2), \\ \theta_7 &= \mu^2 (\alpha_3 x_2 + \alpha_2 x_3) x_4, \\ \theta_8 &= \mu^2 (\alpha_3 x_1 + \alpha_1 x_3) x_4. \end{aligned}$$

Die Gleichung (126) der Regelfläche nimmt alsdann die folgende Form an:

$$\Delta''' \equiv \begin{vmatrix} \alpha_3 x_4^2, \alpha_2 x_4^2 & , \alpha_1 x_4^2 & , \alpha_0 x_4^2 \\ \alpha_1 x_4^2, \alpha_0 x_4^2 & , (\alpha_3 x_1 + \alpha_1 x_3) x_4, (\alpha_2 x_1 + \alpha_0 x_3) x_4 \\ \alpha_2 x_4^2, (\alpha_3 x_2 + \alpha_2 x_3) x_4, \alpha_0 x_4^2 & , (\alpha_1 x_2 + \alpha_0 x_3) x_4 \\ \alpha_0 x_4^2, (\alpha_1 x_2 + \alpha_0 x_3) x_4, (\alpha_2 x_1 + \alpha_0 x_3) x_4, \alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_2 x_1 x_3 + \alpha_1 x_2 x_3 + \alpha_0 x_3^2 \end{vmatrix} = 0,$$

oder, nach Teilung durch  $x_4^4$ :

$$\equiv \begin{vmatrix} \alpha_3 & , \alpha_2 & , \alpha_1 & , \alpha_0 \\ \alpha_1 x_4 & , \alpha_0 x_4 & , \alpha_3 x_1 + \alpha_1 x_3 & , \alpha_2 x_1 + \alpha_0 x_3 \\ \alpha_2 x_4 & , \alpha_3 x_2 + \alpha_2 x_3 & , \alpha_0 x_4 & , \alpha_1 x_2 + \alpha_0 x_3 \\ \alpha_0 x_4^2, (\alpha_1 x_2 + \alpha_0 x_3) x_4, (\alpha_2 x_1 + \alpha_0 x_3) x_4, \alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_2 x_1 x_3 + \alpha_1 x_2 x_3 + \alpha_0 x_3^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (141)$$

Die Regelfläche der Congruenzstrahlen, welche auf einem durch  $X_1$  und  $X_2$  gelegten und in  $\omega_\infty$  befindlichen Kegelschnitt  $\gamma_\infty$  ruhen, ist demnach vom *vierten* Grade.

Der Schnitt in  $\omega_\infty$  ( $x_4 = 0$ ) wird bestimmt durch

$$\begin{vmatrix} \alpha_3, \alpha_2 & , \alpha_1 & , \alpha_0 \\ 0, 0 & , \alpha_3 x_1 + \alpha_1 x_3, \alpha_2 x_1 + \alpha_0 x_3 \\ 0, \alpha_3 x_2 + \alpha_2 x_3, 0 & , \alpha_1 x_2 + \alpha_0 x_3 \\ 0, 0 & , 0 & , \alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_2 x_1 x_3 + \alpha_1 x_2 x_3 + \alpha_0 x_3^2 \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$(\alpha_3 x_1 + \alpha_1 x_3)(\alpha_3 x_2 + \alpha_2 x_3)(\alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_2 x_1 x_3 + \alpha_1 x_2 x_3 + \alpha_0 x_3^2) = 0.$$

Der Schnitt in  $\omega_\infty$  besteht also aus dem Kegelschnitte  $\gamma_\infty$  und aus seinen beiden Tangenten in  $X_1$  und  $X_2$ ; diese Tangenten schneiden sich in dem Pole  $B$  von  $X_1 X_2$  in Bezug auf  $\gamma_\infty$ . Hier erkennen wir einen eigentümlichen Unterschied mit der vorigen Congruenz, wo  $\gamma_\infty$  durch die Geraden  $X_1 M_1$  und  $X_2 M_2$  (siehe S. 87) zu einer biquadratischen Kurve ergänzt wird. Im Übrigen ist die Ähnlichkeit der Determinante (141) mit der entsprechenden in der Abteilung *A* auffallend.

Die Schnittkurve in  $\omega_0$  ( $x_3 = 0$ ) wird durch

$$\begin{vmatrix} \alpha_3 & , \alpha_2 & , \alpha_1 & , \alpha_0 \\ \alpha_1 x_4 & , \alpha_0 x_4 & , \alpha_3 x_1 & , \alpha_2 x_1 \\ \alpha_2 x_4 & , \alpha_3 x_2 & , \alpha_0 x_4 & , \alpha_1 x_2 \\ \alpha_0 x_4^2, \alpha_1 x_2 x_4, \alpha_2 x_1 x_4, \alpha_3 x_1 x_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (142)$$

bestimmt.

Sie ist die Bildkurve von  $\gamma_\infty$ . In  $X_1$  und  $X_2$  hat sie Rückkehr-

punkte, deren Tangenten  $X_1$  und  $X_2$  mit dem  $B$  zugeordneten Punkte  $B'$  verbinden.

Im Allgemeinen wird ein Schnitt mit einer Ebene durch  $X_1 X_2$  in  $X_1$  und  $X_2$  zwei Rückkehrpunkte besitzen, deren Tangenten sich auf der Geraden  $BB'$  schneiden.

Wir bestimmen nun die Doppelkurve welche sich auf der Regelfläche befindet.

Ein Congruenzstrahl  $p$  ( $p_1, p_2$ ) schneidet  $\mathcal{V}_\infty$ , wenn der Beziehung

$$\alpha_3 p_1 p_2 + \alpha_2 p_1 + \alpha_1 p_2 + \alpha_0 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (143)$$

ein Strahl  $q$  ( $q_1, q_2$ ) trifft  $\mathcal{V}_\infty$ , wenn der Bedingung

$$\alpha_3 q_1 q_2 + \alpha_2 q_1 + \alpha_1 q_2 + \alpha_0 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (144)$$

genügt wird.

Die Strahlen  $p$  und  $q$  schneiden sich, wenn man hat

$$p_1 + q_1 = p_2 + q_2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

während ihr Schnittpunkt durch

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -p_1 q_1 x_4, \\ x_2 &= -p_2 q_2 x_4, \\ x_3 &= -(p_1 + q_1) x_4 = -(p_2 + q_2) x_4 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad (25)$$

$$\quad . \quad . \quad (26)$$

$$\quad . \quad . \quad (24)$$

bestimmt ist.

Es sollen jetzt aus (143), (144), (23), (24), (25) und (26) die Größen  $p_1, p_2, q_1$  und  $q_2$  eliminirt werden.

Die Elimination von  $q_2$  aus (144) und (23) ergibt

$$\alpha_3 p_1 q_1 + \alpha_3 q_1^2 - \alpha_3 p_2 q_1 + \alpha_1 p_1 - \alpha_1 p_2 + (\alpha_1 + \alpha_2) q_1 + \alpha_0 = 0. \quad (145)$$

Durch die Elimination von  $p_2$  aus (145) und (143) erhält man

$$\alpha_3^2 p_1 q_1 (p_1 + q_1) + \alpha_1 \alpha_3 (p_1 + q_1)^2 + 2 \alpha_2 \alpha_3 p_1 q_1 + (\alpha_1^2 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_0 \alpha_3) (p_1 + q_1) + 2 \alpha_0 \alpha_1 = 0. \quad (146)$$

Mit Hülfe von (24), (25) und (26) schreiben wir

$$\begin{aligned} k_2 &\equiv \alpha_3^2 x_1 x_3 + \alpha_1 \alpha_3 x_3^2 - 2 \alpha_2 \alpha_3 x_1 x_4 - (\alpha_1^2 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_0 \alpha_3) x_3 x_4 + \\ &\quad + 2 \alpha_0 \alpha_1 x_4^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (147) \end{aligned}$$

Diese Gleichung stellt einen quadratischen Kegel  $k_2$ , mit  $X_2$  als Spitze, dar.

Hätten wir zuerst  $p_1$  und  $q_1$  eliminirt, so würden wir zu



auf  $\mathcal{V}_\infty$  und den in  $\omega_0$  auf der Gerade  $X_4 B'$  befindlichen Punkt  $D$  enthält.

Es erhellt, dass jeder Schnitt mit einer Ebene durch  $X_1 X_2$  ausser den beiden Rückkehrpunkten  $X_1$  und  $X_2$  noch einen Doppelpunkt aufzuweisen hat.

§ 15. *Die Regelfläche der Strahlen, welche sich stützen auf einem in  $\omega_\infty$  durch  $X_1$  und  $X_2$  gelegten Kegelschnitt, wofür  $X_3$  der Pol von  $X_1 X_2$  ist.*

In dem vorliegenden Falle ist der Pol  $B$  von  $X_1 X_2$  in Bezug auf  $\mathcal{V}_\infty$  mit dem Punkte  $X_3$  identisch.

Es gilt nunmehr

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0;$$

die Gleichung von  $\mathcal{V}_\infty$  ist daher

$$\alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_0 x_3^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (151)$$

Die Gleichung der Regelfläche lautet jetzt (siehe (141)):

$$\begin{vmatrix} \alpha_3 & , & 0 & , & 0 & , & \alpha_0 \\ 0 & , & \alpha_0 x_4 & , & \alpha_3 x_1 & , & \alpha_0 x_3 \\ 0 & , & \alpha_3 x_2 & , & \alpha_0 x_4 & , & \alpha_0 x_3 \\ \alpha_0 x_4^2 & , & \alpha_0 x_3 x_4 & , & \alpha_0 x_3 x_4 & , & \alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_0 x_3^2 \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$\begin{aligned} & \alpha_3^4 x_1^2 x_2^2 + \alpha_0 \alpha_3^2 (\alpha_3 x_3^2 - 2 \alpha_0 x_4^2) x_1 x_2 - \alpha_0^2 \alpha_3^2 (x_1 + x_2) x_3^2 x_4 + \\ & + \alpha_0^3 \alpha_3 x_3^2 x_4^2 + \alpha_0^4 x_4^4 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (152) \end{aligned}$$

Die Schnitte mit  $\omega_\infty$  und  $\omega_0$  werden durch

$$\begin{aligned} x_1 x_2 (\alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_0 x_3^2) &= 0, \\ (\alpha_3^2 x_1 x_2 - \alpha_0^2 x_4^2)^2 &= 0 \end{aligned}$$

dargestellt.

Diese letzte Kurve besteht also aus einem doppelt zu zählenden Kegelschnitt, in Bezug auf welchen  $X_4$  der Pol von  $X_1 X_2$  ist.

Wir bemerken beiläufig, dass ein Kegelschnitt in  $\omega_\infty$  nur dann in einen in  $\omega_0$  liegenden Kegelschnitt abgebildet wird, wenn er durch  $X_1$  und  $X_2$  geht und  $X_3$  der Pol von  $X_1 X_2$  ist.

Die Doppelkurve ist jetzt durch



$$\begin{aligned} x_3 (\alpha_3 x_1 - \alpha_0 x_4) &= 0, \\ x_3 (\alpha_3 x_2 - \alpha_0 x_4) &= 0 \end{aligned}$$

bestimmt.

Der eine ihrer Bestandteile ist die Gerade

$$\begin{aligned} \alpha_3 x_1 - \alpha_0 x_4 &= 0, \\ \alpha_3 x_2 - \alpha_0 x_4 &= 0, \end{aligned}$$

welche in der Ebene  $\varepsilon$  liegt, und den Punkt  $X_3$  trägt.

Der andere Bestandteil der Doppelkurve befindet sich in  $x_3 = 0$ ; er ist offenbar der Kegelschnitt

$$\alpha_3^2 x_1 x_2 - \alpha_0^2 x_4^2 = 0,$$

welchen wir oben als den Schnitt der Regelfläche mit  $\omega_0$  erkannten.

§ 16. *Die Regelfläche der Strahlen, welche auf einem durch  $X_1$ ,  $X_2$  und  $X_3$  gelegten Kegelschnitt ruhen.*

Zum Schluss wollen wir den Fall erledigen, wo  $\gamma_\infty$  durch  $X_3$  geht; man hat dann

$$\alpha_0 = 0$$

zu setzen. Die Gleichung von  $\gamma_\infty$  lautet nun

$$\alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_2 x_1 x_3 + \alpha_1 x_2 x_3 = 0. \quad (154)$$

Die Regelfläche entspricht der Gleichung

$$\left| \begin{array}{ccc} \alpha_3 & , \alpha_2 & , \alpha_1 & , 0 \\ \alpha_1 x_4, 0 & , \alpha_3 x_1 + \alpha_1 x_3, \alpha_2 x_1 & & \\ \alpha_2 x_4, \alpha_3 x_2 + \alpha_2 x_3, 0 & , \alpha_1 x_2 & & \\ 0 & , \alpha_1 x_2 x_4 & , \alpha_2 x_1 x_4 & , \alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_2 x_1 x_3 + \alpha_1 x_2 x_3 \end{array} \right| = 0. \quad (155)$$

Diese Fläche ist immer vom *vierten* Grade, in Gegensatz zu dem entsprechenden Fall in der vorigen Congruenz, wo die Fläche in  $\omega_\infty$  und in einer kubischen Regelfläche ausgeartet war. Dort war ja  $X_3$  ein singulärer Punkt, während  $X_3$  hier keine Singularitäten zeigt.

Der Grad der Regelfläche eines Kegelschnittes in  $\omega_\infty$  wird nur dann herabgedrückt, wenn diese Kurve das Bild einer in  $\omega_0$  befindlichen Gerade ist. Die Gleichung dieses Bildkegelschnittes ist dann  $\beta_1 x_1^2 + \beta_2 x_2^2 + \beta_4 x_3^2 = 0$ . Derselbe gehört also keiner der hier betrachteten Kurven an.

Der Schnitt der Regelfläche (155) mit  $\omega_\infty$  wird durch (siehe S. 153)

$$(\alpha_3 x_1 + \alpha_1 x_3)(\alpha_3 x_2 + \alpha_2 x_3)(\alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_2 x_1 x_3 + \alpha_1 x_2 x_3) = 0$$

dargestellt.

Die Schnittkurve in  $\omega_0$  hat die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \alpha_3 & , & \alpha_2 & , & \alpha_1 & , & 0 \\ \alpha_1 x_4 & , & 0 & , & \alpha_3 x_1 & , & \alpha_2 x_1 \\ \alpha_2 x_4 & , & \alpha_3 x_2 & , & 0 & , & \alpha_1 x_2 \\ 0 & , & \alpha_1 x_2 x_4 & , & \alpha_2 x_1 x_4 & , & \alpha_3 x_1 x_2 \end{vmatrix} = 0, \quad . \quad (142a)$$

und enthält demnach den Punkt  $X_4$  (das Bild von  $X_3$ ).

Die Doppelkurve ist jetzt durch

$$k_2 \equiv \alpha_3^2 x_1 x_3 + \alpha_1 \alpha_3 x_3^2 - 2\alpha_2 \alpha_3 x_1 x_4 - \alpha_1 (\alpha_1 + \alpha_2) x_3 x_4 = 0, \quad . \quad (147a)$$

$$k_1 \equiv \alpha_3^2 x_2 x_3 + \alpha_2 \alpha_3 x_3^2 - 2\alpha_1 \alpha_3 x_2 x_4 - \alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2) x_3 x_4 = 0 \quad . \quad (148a)$$

angewiesen.

Die kubische Raumkurve schneidet jetzt  $\omega_\infty$ , ausser  $X_1$  und  $X_2$ , im Punkte  $B$ , die Ebene  $\omega_0$  aber in  $X_4$ .

Die biquadratische Kurve in  $\omega_0$  hat also in  $X_4$  einen Doppelpunkt.

Wenn der Kegelschnitt  $\gamma_\mu$ , auf dem die Strahlen ruhen, in der Ebene  $\omega_0$  liegt, haben wir nur

$$\mu = 0$$

zu setzen.

Die so erhaltene Regelfläche wird ganz und gar mit der Regelfläche eines willkürlichen, durch  $X_1$  und  $X_2$  gelegten Kegelschnittes übereinstimmen. Die Ebene  $\omega_0$  ist ja *nicht* singulär und unterscheidet sich daher nicht von einer beliebigen durch  $X_1$   $X_2$  gelegten Ebene  $\omega_\mu$ .

§ 17. Wie bei der Congruenz von  $w' = c^2 : w$ , wollen wir hier abschliessen mit einer genaueren Beschreibung der Gestalt der betrachteten Gebilde, ohne jedoch alle Gleichungen auf triorthogonalen Coordinaten zu beziehen.

Wo diese Umformung erwünscht ist, verwenden wir die folgenden Formeln:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{x + iy}{c}, \\ x_2 &= \frac{x - iy}{c}, \\ x_3 &= \frac{h - z}{h}, \\ x_4 &= \frac{z}{h}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (156)$$

Eine kurze Zusammenfassung der oben erhaltenen Resultate möge hier folgen.

a). Der Feldgrad der Congruenz ist *zwei*, ihr Bündelgrad *vier*, ihr Axengrad *zwei*.

Von den vier Strahlen, welche nach einem reellen Punkt  $T$  zielen, sind stets nur *zwei* reell.

Die Coordinaten  $p_1$  und  $p_2$  derjenigen Strahlen, welche sich in einem Punkte  $(x_0, y_0, z_0)$  schneiden, erhält man aus

$$cz_0 p_1^2 - c(h - z_0)p_1 + h(x_0 + iy_0) = 0, \quad . \quad . \quad (157)$$

$$cz_0 p_2^2 - c(h - z_0)p_2 + h(x_0 - iy_0) = 0. \quad . \quad . \quad (158)$$

Die Wurzeln von (158) sind also den Wurzeln von (157) complex conjugirt. Von den vier Combinationen  $(p_1, p_2)$  giebt es daher *zwei*, für welche  $p_1 + p_2$  und  $p_1 p_2$  reell sind.

b). Singuläre Ebenen sind

1° die Ebene  $[w]$  ( $z = 0$ ) mit drei Strahlenbüscheln, mit den Scheiteln in  $X_1, X_2$  und  $E$ , d. h. in den beiden Kreispunkten  $I$  und  $J$  und in dem unendlich fernen Punkte  $X_\infty$  der reellen Axe; diese Strahlenbüschel sind also alle aus parallelen Geraden zusammengesetzt;

2° die Ebene der reellen Axen ( $x_1 = x_2$  oder  $y = 0$ ) mit einem Strahlengebilde zweiter Klasse, welches einen Kegelschnitt  $c$  umhüllt.

Dieser Kegelschnitt wird durch

$$\left. \begin{aligned} x_3^2 + 4x_1x_4 &= 0, \\ x_1 &= x_2, \end{aligned} \right\}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} \frac{(h - z)^2}{h^2} + \frac{4xz}{hc} &= 0, \\ y &= 0, \end{aligned} \right\}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} 4 h x z + c (h - z)^2 &= 0, \\ y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

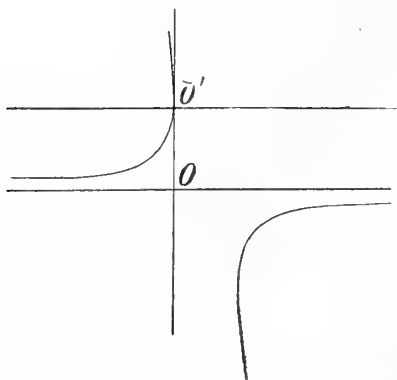


Fig. 10.

dargestellt, ist demnach eine *Hyperbel*, welche  $OO'$  in  $O$  und  $OX$  in  $X_\infty$  berührt, wonach  $OX$  Asymptote ist, indess ihr Mittelpunkt mit

$$x = \frac{c}{2}, y = 0, z = 0,$$

zusammenfällt;

3° jede Ebene, welche einen Congruenzstrahl mit einem der Kreispunkte  $I$  oder  $J$  verbindet; sie trägt

ein Strahlengebilde zweiter Klasse, welches einen Kegelschnitt umhüllt.

c). Singuläre Punkte sind

1° der unendlich ferne Punkt  $X_\infty$  auf der reellen Axe in  $[w]$  mit einem Büschel paralleler Geraden in  $[w]$ ;

2° die beiden Kreispunkte  $I$  und  $J$  der Ebenen  $[w]$  und  $[w']$  mit Strahlenbüscheln in der Ebene  $[w]$ .

d). Alle Congruenzstrahlen berühren zwei imaginäre Kegel (Cylinder), von denen jeder einen der Kreispunkte  $I$  und  $J$  als Spitze hat. Die Berührungspunkte (Brennpunkte) der Congruenzstrahlen sind im Allgemeinen imaginär. Die beiden Cylinder bilden zusammen die Fokalfläche.

Die Fokalcyylinder haben die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \frac{(h-z)^2}{h} + \frac{4(x+iy)z}{c} &= 0, \\ \frac{(h-z)^2}{h} + \frac{4(x-iy)z}{c} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (162)$$

die Fokalfläche ist demnach durch

$$\frac{16(x^2 + y^2)z^2}{c^2} + \frac{8xz(h-z)^2}{ch} + \frac{(h-z)^4}{h^2} = 0 \quad (163)$$

bestimmt.

e). Die Fokalfläche hat eine quadratische Doppelkurve, welche in der Ebene ( $y = 0$ ) der reellen Axen liegt und mit der durch

$$\left. \begin{aligned} 4 h x z + c (h - z)^2 &= 0, \\ y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (159)$$

dargestellten Hyperbel  $e$  identisch ist.

Die beiden Fokalcylinder berühren ausserdem einander und die Ebene  $[w]$  in der unendlich fernen Gerade von  $[w]$ .

Diese bildet mit der Hyperbel  $e$  den reellen Bestandteil der Fokalfläche.

f). Die axiale Regelfläche einer willkürlichen Gerade  $l$ , welche  $[w]$  in  $A$  und  $[w']$  in  $B'$  schneidet, ist eine Fläche *sechsten* Grades, mit der *vierfachen* Gerade  $l$ . Zwei der vier Blätter sind immer imaginär.

Der Schnitt von  $[w]$  mit dieser Regelfläche besteht aus den drei Geraden  $AI$ ,  $AJ$  und  $AX_\infty$  und aus einer circularen kubischen Kurve, welche durch  $X_\infty$ , durch  $A$  und durch die vier Bildpunkte  $B$  der Spur  $B'$  von  $l$  in  $[w']$  geht. Der Punkt  $A$  ist überdies der gemeinschaftliche Tangentialpunkt der Kreispunkte. Die Tangente in  $A$  ist die axiale Projektion aus  $l$  auf  $[w]$  des Bildes  $A'$  von  $A$ .

Der Schnitt in  $[w']$  ist eine Kurve sechsten Grades  $\lambda$ , welche in den beiden Kreispunkten  $I$  und  $J$  Rückkehrpunkte hat, deren Tangenten sich im Bilde  $A'$  von  $A$  schneiden.

Die Kreispunkte sind uniplanare Punkte der Regelfläche. Jeder Schnitt mit einer zu  $[w]$  parallelen Ebene hat ja in  $I$  und  $J$  zwei Rückkehrpunkte. Die Kurve  $\lambda$  berührt noch die unendlich ferne Gerade im Punkte  $X_\infty$  der reellen Axe. Sie hat überdies in  $B'$  einen vierfachen Punkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $l$  auf  $[w']$  der vier nach  $B'$  zielenden Congruenzstrahlen sind.

Die axiale Regelfläche von  $l$  besitzt eine *circulare kubische Doppelkurve*, welche  $l$  in zwei Punkten trifft.

Wenn  $l$  die Gerade  $OO'$  schneidet, so enthält der Schnitt in  $[w]$  den Punkt  $O$  und wird daselbst durch  $OA$  berührt, während die Kurve  $\lambda$  in  $O'$  einen Rückkehrpunkt hat, dessen Tangenten mit  $O'A'$  zusammenfallen.

Die Gerade  $OO'$  gehört der Regelfläche in ihren ganzen Ausdehnung an.

Die Doppelkurve hat keine speziellen Eigenschaften aufzuweisen.

Wenn die Gerade  $l$  ( $l_\mu$ ) den Ebenen  $[w]$  und  $[w']$  parallel ist, so zerfällt die kubische Kurve von  $[w]$  in die unendlich ferne Gerade und in einen Kegelschnitt; dieser trifft die unendlich ferne Gerade in zwei Punkten, welche die Bilder des unendlich fernen Punktes  $L_\mu$  von  $l_\mu$  sind.

Der Schnitt der Regelfläche mit  $[w]$  besteht aus dem erwähnten Kegelschnitte und aus der vierfach zu zählenden unendlich fernen Gerade.

Die Schnittkurve  $\lambda$  ist in die doppelt zu zählende unendlich ferne Gerade und eine biquadratische Kurve zerfallen, welche in

$L_\mu$  einen Doppelpunkt hat, und daselbst mit der unendlich fernen Gerade vier Punkte gemein hat.

Die Doppelkurve ist aus der unendlich fernen Gerade von  $[w]$  und aus einem Kegelschnitt zusammengesetzt. Letzterer schneidet die unendlich ferne Gerade in einem Punkte, dessen Richtung derjenigen von  $l_\mu$  normal ist; er schneidet auch die Gerade  $l_\mu$ .

Wenn  $l_\mu$  mit  $[w]$  parallel ist und ausserdem  $OO'$  schneidet, so enthält der Kegelschnitt in  $[w]$  den Punkt  $O$ ; die Tangente in  $O$  ist mit  $l_\mu$  parallel.

Die Kurve  $\lambda$  ist auch hier in die doppelt zu zählende unendlich ferne Gerade und in eine biquadratische Kurve zerfallen. Letztere hat in  $O'$  einen Rückkehrpunkt, dessen Tangente das Bild der mit  $l_\mu$  parallelen durch  $O$  gehenden Gerade ist.

Die Doppelkurve besteht aus der unendlich fernen Gerade von  $[w]$  und aus einem Kegelschnitt, welcher  $l_\mu$  schneidet und dessen Schnittpunkt mit der unendlich fernen Gerade von  $[w]$  normal zu  $l_\mu$  ist.

g) Die axiale Regelfläche einer Gerade  $l$  in der Ebene der reellen Axen zerfällt in diese, doppelt zu zählende, Ebene und in eine biquadratische Fläche, auf welcher  $l$  Doppelgerade ist.

Die kubische Kurve von  $[w]$  ist in die reelle Axe und in einen Kreis ausgeartet. Dieser Kreis hat seinen Mittelpunkt in der Spur  $A$  von  $l$  in  $[w]$  und wird durch die beiden isotropen Geraden durch  $A$  zu dem biquadratischen Schnitte ergänzt.

Die Schnittkurve in  $[w']$  ist biquadratisch und hat in den Kreispunkten Rückkehrpunkte, deren Tangenten sich im Bilde  $A'$  von  $A$  treffen.

Die Doppelkurve ist ein Kreis, dessen Ebene zu  $[w]$  parallel ist. Dieser Kreis schneidet die Ebene der reellen Axen in dem auf  $l$  befindlichen Punkte  $C_\mu$  und in dem Pole  $L$  von  $l$  in Bezug auf die Fokalhyperbel  $e$ . Die Tangente in  $C_\mu$  ist den imaginären Axen parallel.

h) Die axiale Regelfläche eines Congruenzstrahles  $s$  ist eine quadratische Fläche, deren Schnitt mit  $[w]$  aus denjenigen Geraden besteht, welche bez. durch die Spur  $S$  von  $s$  in  $[w]$  und durch ihr Spiegelbild in Bezug auf die reelle Axe hindurchgehen, und dieser letzteren Axe parallel sind.

Der Schnitt in  $[w']$  ist eine Parabel, deren Axe mit der reellen Axe identisch ist.

i) Die axiale Regelfläche eines in der Ebene  $\varepsilon$  liegenden Congruenzstrahles enthält nur diese, doppelt zu zählende, Ebene.

j) Die axiale Regelfläche einer in  $[w]$  befindlichen Gerade  $m$  ist vom dritten Grade, und trägt  $m$  als einfache Leitlinie.

Der Schnitt mit  $[w]$  ist aus der doppelt zu zählenden unendlich fernen Gerade und aus der Gerade  $m$  zusammengesetzt.

Der Schnitt mit  $[w']$  ist in die unendlich ferne Gerade und in den Bildkegelschnitt  $\mu$  von  $m$  zerfallen. Der Kegelschnitt  $\mu$  ist eine Parabel, deren Axe derjenigen Gerade parallel ist, welche die durch  $O$  gehende, mit  $m$  parallele Gerade abbildet.

Die *Doppelgerade*  $d_m$  ist zur Axe der Parabel  $\mu$  parallel; sie schneidet die Ebene der reellen Axen in einem Punkte  $K$  der Fokalhyperbel  $e$ .

Der unendlich ferne Punkt  $M_3'$  der Parabel  $\mu$  ist der eine *Zwickpunkt*; der andere ist  $K$ .

Die durch  $M_3'$  gehende *Torsallinie* ist mit der unendlich fernen Gerade von  $[w]$ , die in  $K$  ruhende Torsallinie ist mit der Tangente in  $K$  an der Fokalhyperbel  $e$  identisch.

Der erste *Torsalpunkt* ist der unendlich ferne Punkt auf  $m$ . Der zweite ist der Schnittpunkt von  $m$  mit der reellen Axe.

Die zweite Torsallinie kann also auch betrachtet werden als die aus dem Schnittpunkte von  $m$  mit der reellen Axe an  $e$  gelegte Tangente. Der zweite Zwickpunkt ist der Berührungspunkt dieser Tangente.

k) Wenn wir die Gerade  $m$  um einen Punkt  $A$  rotiren lassen, so beschreibt die Doppelgerade  $d_m$  eine *kubische Regelfläche*.

Der Schnitt mit  $[w]$  besteht aus der doppelt zu zählenden unendlich fernen Gerade und aus der durch  $A$  gehenden, zu der reellen Axe parallelen Gerade.

Der Schnitt mit  $[w']$  ist zerfallen in die doppelt zu zählende unendlich ferne Gerade und in die Gerade, welche  $O'$  mit dem Bilde  $A'$  von  $A$  vereinigt.

Die *Doppelgerade*  $\Delta$  ist mit der unendlich fernen Gerade von  $[w]$  identisch. Die Zwickpunkte liegen in den Kreispunkten  $I$  und  $J$ .

Die *einfache Leitlinie* ist der Congruenzstrahl  $a = AA'$ .

Die *Torsalpunkte* sind die Brennpunkte  $A_{f1}$  und  $A_{f2}$  von  $a$ .

Die *Torsallinien* sind die Geraden  $IA_{f1}$  und  $JA_{f2}$ .

Beschreibt der Punkt  $A$  die Ebene  $[w]$ , so fällt die Doppelgerade  $\Delta$  immer mit der unendlich fernen Gerade zusammen; die Zwickpunkte behalten ihren Sitz in den Kreispunkten; die einfache Leitlinie  $a$  erzeugt die Strahlencongruenz.

l) Ein durch  $X_1$  und  $X_2$  gelegter Kegelschnitt  $\mathcal{V}_\mu$  ist offenbar ein zu  $[w]$  paralleler Kreis.

Wir haben also die Regelfläche derjenigen Strahlen zu betrachten welche sich auf einem zu  $[w]$  parallelen Kreise  $\mathcal{V}_\mu$  stützen.

Diese Regelfläche ist vom *achten* Grade und hat in den Kreispunkten vierfache Punkte.

Der Schnitt mit  $[w]$  besteht aus zwei durch  $I$ , zwei durch  $J$  gehenden Geraden, und aus einer biquadratischen Kurve, welche in den Kreispunkten Doppelpunkte hat und daselbst berührt wird durch die Geraden, welche sie zu dem vollständigen Schnitte ergänzen.

*m)* Die Regelfläche eines in  $[w]$  befindlichen Kreises  $\gamma_\infty$  ist vom vierten Grade.

Der Schnitt in  $[w]$  besteht aus dem Kreis  $\gamma_\infty$  und seinen isotropen Tangenten.

Der Schnitt in  $[w']$  ist eine biquadratische Kurve, welche in den Kreispunkten Rückkehrpunkte hat, deren Tangenten sich in dem Punkt  $B'$  schneiden, welcher dem Mittelpunkte  $B$  von  $\gamma_\infty$  zugeordnet ist.

Im Allgemeinen wird ein mit  $[w]$  paralleler Schnitt in den Kreispunkten Rückkehrpunkte besitzen, deren Tangenten sich auf der Gerade  $BB'$  treffen. Auf der Regelfläche befindet sich noch eine circulare kubische Doppelkurve, welche den Mittelpunkt  $B$  von  $\gamma_\infty$  enthält, während ihre Spur im Endlichen in  $[w']$  auf der Gerade  $OB'$  liegt.

Jeder mit  $[w]$  parallele Schnitt hat, ausser zwei Rückkehrpunkten in den Kreispunkten, noch einen gewöhnlichen Doppelpunkt aufzuweisen.

*n)* Wenn der Mittelpunkt  $B$  von  $\gamma_\infty$  sich in  $O$  befindet, so ist der Schnitt in  $[w]$  aus dem Kreise  $\gamma_\infty$  und den beiden isotropen Geraden durch  $O$  zusammengesetzt.

Der Schnitt in  $[w']$  besteht aus einem Doppelkreise, dessen Mittelpunkt in  $O'$  liegt.

Die Doppelkurve ist in den letztgenannten Kreis und in eine der Ebene der reellen Axen angehörnde Gerade zerfallen.

*o)* Wenn der Kreis  $\gamma_\infty$  durch  $O$  geht, so gehört die Gerade  $OO'$  der Regelfläche an. Die in  $[w']$  befindliche Kurve hat ja in  $O'$  einen Doppelpunkt.

Die, hier *nicht* ausgeartete, kubische Doppelkurve, enthält natürlich die Kreispunkte, den Mittelpunkt  $B$  von  $\gamma_\infty$  und den Punkt  $O'$ .

Die Regelfläche der Strahlen, welche auf einem in  $[w']$  befindlichen Kreis ruhen, unterscheidet sich nicht wesentlich von der Regelfläche des Kreises  $\gamma_\mu$ .

Hiermit ist unsere Aufgabe, die Congruenzen von  $w' = c^2 : w$  und  $w' = w^2 : c$  zu studiren, erledigt. Die Untersuchungen sind rein analytisch gehalten, weil sie in dieser Form am besten als Einführung in die späteren Entwicklungen dienen können.

Die obigen Congruenzen lassen sich aber auch sehr bequem rein geometrisch behandeln; die betreffenden Entwicklungen finden sich in meiner Inauguraldissertation. <sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> M. J. VAN UVEN: *Conforme Afbeelding door Stralencongruenties*.



## DRITTER ABSCHNITT.

### *Analyse irrationaler Kurvengleichungen.*

§ 1. Nachdem wir im vorigen Abschnitte die zwei einfachsten abbildungsfähigen Stralencongruenzen erledigt haben, wollen wir uns nun beschäftigen mit den verwickelteren Congruenzen, welche den Funktionen

$$w' = w^N$$

entsprechen, wo  $N$  eine willkürliche rationale Zahl darstellt.

Die hier in Frage kommenden Congruenzen gehören zwei Rubriken an, für welche  $N$  bez. positiv und negativ ist.

Wenn  $N$  positiv ist, so soll die Congruenz *parabolisch*, wenn  $N$  negativ, *hyperbolisch* genannt werden.

Diese Namen sind offenbar den geometrischen Gebilden entnommen, welche den einfachsten Vertretern beider Gruppen,

$$w' = w^2 \text{ und } ww' = 1$$

entsprechen.

Im Allgemeinen wird  $N$  eine gebrochene Zahl sein, z. B.  $\frac{m}{n}$ . Es liegt also auf der Hand die folgenden zwei Typen zu untersuchen

$$\begin{array}{ll} 1^\circ & w' = w^{\frac{m}{n}} c^{1 - \frac{m}{n}}, \\ 2^\circ & w' = w^{-\frac{m}{n}} c^{1 + \frac{m}{n}}, \end{array}$$

wo der Faktor  $c$  der Homogenität wegen eingeführt ist.

§ 2. Ein Congruenzstrahl werde wiederum durch die Gleichungen

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = p_1 x_3 + p_1' x_4, \\ x_2 = p_2 x_3 + p_2' x_4 \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

dargestellt, deren Bedeutung hier nicht erklärt zu werden braucht.

Da die Grössen  $p_1'$  und  $p_2'$  im Folgenden bez. den Ausdrücken  $p_1^{\pm \frac{m}{n}}$  und  $p_2^{\pm \frac{m}{n}}$  gleich sind, so leuchtet ein, dass wir uns zu beschäftigen haben mit Gleichungen von der Form

$$A_1 p_1^{\frac{m}{n}} + A_2 p_2^{\frac{m}{n}} + A_3 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wo  $A_1$ ,  $A_2$  und  $A_3$  ganze Funktionen von  $p_1$  und  $p_2$  darstellen.

Von vornherein ist es klar, dass wir uns vorläufig auf Gleichungen von der Gestalt

$$B_1 q_1^{\frac{1}{n}} + B_2 q_2^{\frac{1}{n}} + B_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

beschränken können, weil die Form (2) hieraus durch die Substitutionen

$$q_1 = p_1^m, \quad q_2 = p_2^m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

erhalten wird.

Setzen wir nunmehr

$$\frac{B_1}{B_3} = C_1^{\frac{1}{n}}, \quad \frac{B_2}{B_3} = C_2^{\frac{1}{n}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

so verwandelt sich die Gleichung (3) in

$$(C_1 q_1)^{\frac{1}{n}} + (C_2 q_2)^{\frac{1}{n}} + 1 = 0,$$

welche, indem wir

$$C_1 q_1 = X_1, \quad C_2 q_2 = X_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

setzen, diese Gestalt annimmt:

$$X_1^{\frac{1}{n}} + X_2^{\frac{1}{n}} + 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Es empfiehlt sich, aus später zu erwähnenden Gründen, *constante* Coefficienten hinzuzufügen, wonach wir schliesslich zu

$$P_1 X_1^{\frac{1}{n}} + P_2 X_2^{\frac{1}{n}} + P_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

gelangen, wo  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  constant sind.

Die durch diese Gleichung vertretenen Kurven heissen Kurven von *Lamé*. Durch Einführung homogener Coordinaten verwandelt sie sich in

$$P_1 x_1^{\frac{1}{n}} + P_2 x_2^{\frac{1}{n}} + P_3 x_3^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Die Kurve ist daher *triangulär-symmetrisch*.

§ 3. Wir fragen zuerst nach dem *Grade* der Gleichung, welche aus

$$P_1 X_1^{\frac{1}{n}} + P_2 X_2^{\frac{1}{n}} + P_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

entsteht, wenn in dieser die gebrochenen Exponenten fortgeschafft werden.

Betrachten wir  $X_1$  und  $X_2$  als nicht-homogene (z. B. rechtwinklige) Coordinaten eines Punktes, dann stellt die Gleichung (8) eine gewisse algebraische Kurve dar, welche den Nullpunkt ( $X_1=0, X_2=0$ ) *nicht* enthält.

Der Grad dieser Kurve stimmt überein mit der Anzahl der Punkte, welche eine durch den Ursprung gehende Gerade

$$X_2 = c X_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

mit ihr gemein hat.

Die Substitution (9) in (8) ergibt

$$P_1 X_1^{\frac{1}{n}} + P_2 c^{\frac{1}{n}} X_1^{\frac{1}{n}} + P_3 = 0,$$

oder

$$X_1 = \left( \frac{-P_3}{P_1 + c^{\frac{1}{n}} P_2} \right)^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Da  $c^{\frac{1}{n}}$  hier  $n$ -deutig ist, so gilt dasselbe von dem Ausdruck für  $X_1$ ; es ist somit klar dass, weil jeder Wert von  $X_1$  vermöge (9) *einen* Wert von  $X_2$  bestimmt, die Gerade  $X_2 = c X_1$  ausserhalb des Anfangspunktes  $n$  Punkte mit der Kurve gemein hat. Weil sie *in* dem Coordinatenanfang *keinen* Punkt mit der genannten Gerade gemeinsam hat, ist die Kurve vom  $n^{\text{ten}}$  Grade.

*Wenn also in der Gleichung*

$$P_1 X_1^{\frac{1}{n}} + P_2 X_2^{\frac{1}{n}} + P_3 = 0$$

*die gebrochenen Exponenten fortgeschafft werden, bekommt man eine Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades in  $X_1$  und  $X_2$ .*

Mit welchen Exponenten treten nun die Coefficienten  $P_1, P_2$  und  $P_3$  in der rationalisirten Gleichung auf?

Zur Erledigung dieser Frage setzen wir zunächst

$$\frac{P_1^n X_1}{P_3^n} = Y_1, \quad \frac{P_2^n X_2}{P_3^n} = Y_2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

wonach die Gleichung (8) sich also gestaltet:

$$Y_1^n + Y_2^n + 1 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Durch Fortschaffung der gebrochenen Exponenten gelangt man zu einer Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades in  $Y_1$  und  $Y_2$ , etwa zu

$$(a_1 Y_1^n + a_1' Y_1^{n-1} Y_2 + a_1'' Y_1^{n-2} Y_2^2 + \dots + a_2 Y_2^n) + \\ + (b_1 Y_1^{n-1} + b_1' Y_1^{n-2} Y_2 + b_1'' Y_1^{n-3} Y_2^2 + \dots + b_2 Y_2^{n-1}) + \dots \\ \dots + (k_1 Y_1 + k_2 Y_2) + a_3 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

in welcher alle Coefficienten constant sind.

Die Substitutionen (11) ergeben nun, nach Beseitigung der Nenner:

$$(a_1 P_1^{n^2} X_1^n + a_1' P_1^{n(n-1)} P_2^n X_1^{n-1} X_2 + \dots + a_2 P_2^{n^2} X_2^n) + \\ + (b_1 P_1^{n(n-1)} P_3^n X_1^{n-1} + b_1' P_1^{n(n-2)} P_2^n P_3^n X_1^{n-2} X_2 + \dots + \\ + b_2 P_2^{n(n-1)} P_3^n X_2^{n-1}) + \dots + \\ + (k_1 P_1^n P_3^{n(n-1)} X_1 + k_2 P_2^n P_3^{n(n-1)} X_2) + a_3 P_3^{n^2} = 0. \quad (14)$$

*Hieraus geht hervor, dass die Coefficienten  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  in der Endgleichung homogen in der  $n^{\text{2ten}}$  Potenz auftreten.*

Setzen wir in (12)

$$Y_1 = \frac{y_1}{y_3}, \quad Y_2 = \frac{y_2}{y_3}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

so folgt

$$y_1^{\frac{1}{n}} + y_2^{\frac{1}{n}} + y_3^{\frac{1}{n}} = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

diese Gleichung bekommt nach Rationalisirung diese Gestalt:

$$(a_1 y_1^n + a_1' y_1^{n-1} y_2 + a_1'' y_1^{n-2} y_2^2 + \dots + a_2 y_2^n) + \\ + (b_1 y_1^{n-1} + b_1' y_1^{n-2} y_2 + b_1'' y_1^{n-3} y_2^2 + \dots + b_2 y_2^{n-1}) y_3 + \\ + \dots + (k_1 y_1 + k_2 y_2) y_3^{n-1} + a_3 y_3^n = 0. \quad . \quad . \quad (17)$$

Weil in (16) die Coordinaten  $y_1, y_2, y_3$  involutorisch erscheinen, so wird auch die rationalisirte Gleichung (17) eine symmetrische Funktion dieser Coordinaten aufweisen. Man hat also

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 = a_3 = a, \\ a_1' &= a_2' = b_1 = b_2 = k_1 = k_2 = a', \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Man hat daher

$$\begin{aligned} &(aP_1^{n^2}X_1^n + a'P_1^{n(n-1)}P_2^nX_1^{n-1}X_2 + \dots + aP_2^{n^2}X_2^n) + \\ &+ (a'P_1^{n(n-1)}P_3^nX_1^{n-1} + a''P_1^{n(n-2)}P_2^nP_3^nX_1^{n-2}X_2 + \dots + \\ &+ a'P_2^{n(n-1)}P_3^nX_2^{n-1}) + \dots + \\ &+ a'P_1^nP_3^{n(n-1)}X_1 + a'P_2^nP_3^{n(n-1)}X_2 + aP_3^{n^2} = 0, \quad (18) \end{aligned}$$

oder wenn wir

$$X_1 = \frac{x_1}{x_3}, \quad X_2 = \frac{x_2}{x_3}$$

setzen,

$$\begin{aligned} &(aP_1^{n^2}x_1^n + a'P_1^{n(n-1)}P_2^n x_1^{n-1}x_2 + \dots + aP_2^{n^2}x_2^n) + \\ &+ (a'P_1^{n(n-1)}P_3^n x_1^{n-1}x_3 + a''P_1^{n(n-2)}P_2^nP_3^n x_1^{n-2}x_2x_3 + \\ &+ \dots + a'P_2^{n(n-1)}P_3^n x_2^{n-1}x_3) + \dots + \\ &+ a'P_1^nP_3^{n(n-1)}x_1x_3^{n-1} + a'P_2^nP_3^{n(n-1)}x_2x_3^{n-1} + aP_3^{n^2}x_3^n = 0. \quad (19) \end{aligned}$$

Diese ist also die Gleichung, welche man erhält, wenn in

$$P_1 x_1^{\frac{1}{n}} + P_2 x_2^{\frac{1}{n}} + P_3 x_3^{\frac{1}{n}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

die gebrochenen Exponenten fortgeschafft werden.

Von vornherein ist es einleuchtend, dass die Endform (19), zu welcher man durch Rationalisirung von (20) gelangt, von der Bedeutung der  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  unabhängig sein muss. Diese Form wird ja vollständig bestimmt durch die Art und Weise, auf welche die Coordinaten  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  verbunden sind.

Wenn wir voraussetzen, dass  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  homogene Polynomia  $r^{\text{ten}}$  Grades in  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  sind, so ist es klar, dass jedes Glied von (19) vom Grade

$$rn^2 + n$$

in den Coordinaten  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  sein wird.

Handelt es sich um die Gleichung

$$P_1 x_1^{\frac{m}{n}} + P_2 x_2^{\frac{m}{n}} + P_3 x_3^{\frac{m}{n}} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

wo  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  homogene Polynomia  $r^{\text{ten}}$  Grades in  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  sind, so wird der Grad der rationalisirten Gleichung

$$rn^2 + mn.$$

Die obigen Betrachtungen lassen sich demnach in der folgenden Behauptung zusammenfassen:

*Die Gleichung*

$$P_1 x_1^{\frac{m}{n}} + P_2 x_2^{\frac{m}{n}} + P_3 x_3^{\frac{m}{n}} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

in welcher  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  homogene Polynomia  $r^{\text{ten}}$  Grades in  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  sind, wird sich, nach Beseitigung der gebrochenen Exponenten, in eine Gleichung folgender Gestalt verwandeln:

$$\begin{aligned} a(P_1^{n^2} x_1^{mn} + P_2^{n^2} x_2^{mn} + P_3^{n^2} x_3^{mn}) + a'(P_1^{n(n-1)} P_2 x_1^{m(n-1)} x_2^m + \\ + P_1^n P_2^{n(n-1)} x_1^m x_2^{m(n-1)} + P_1^{n(n-1)} P_3^n x_1^{m(n-1)} x_3^m + \\ + P_2^{n(n-1)} P_3^n x_2^{m(n-1)} x_3^m + P_1^n P_3^{n(n-1)} x_1^m x_3^{m(n-1)} + \\ + P_2^n P_3^{n(n-1)} x_2^m x_3^{m(n-1)}) + \dots = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22) \end{aligned}$$

*Diese Gleichung ist vom Grade*

$$rn^2 + mn.$$

§ 4. Wir wollen nunmehr aus der Gleichung

$$P_1 x_1^{\frac{m}{n}} + P_2 x_2^{\frac{m}{n}} + P_3 x_3^{\frac{m}{n}} = 0$$

einige Eigenschaften der durch sie dargestellten Kurve herleiten.

Gelegentlich werden wir eine Coordinate gleich Null zu setzen haben; alsdann erfahren die Faktoren  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$ , welche von allen drei Veränderlichen abhängen, gewisse Vereinfachungen.

Mit

$$(P_k)_l$$

bezeichnen wir den Ausdruck, der sich ergibt, wenn man  $x_l = 0$  in  $P_k$  substituirt; wir haben somit

$$(P_k)_{x_l=0} \equiv (P_k)_l \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Es mögen zuerst die Schnittpunkten der Kurve mit der Gerade  $x_3 = 0$  bestimmt werden. Sie sind offenbar durch

$$(P_1)_3 x_1^{\frac{m}{n}} + (P_2)_3 x_2^{\frac{m}{n}} = 0,$$

oder

$$(P_1)_3 x_1^m - (-1)^n (P_2)_3 x_2^m = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

gegeben.

Diese Gleichung würden wir aber nicht erhalten, wenn wir  $x_3 = 0$  setzen in der rationalen Gleichung, welche vom Grade  $mn$  in den Coordinaten (explicit) und vom Grade  $n^2$  in den Faktoren  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  ist.

Weil die Schnittpunkte der Kurve mit der Geraden  $x_3 = 0$  einmal keine anderen sein können als diejenigen, welche durch die Gleichung (24) bestimmt werden, und der Grad dieser Gleichung  $n$  mal zu niedrig ist, so muss die Substitution  $x_3 = 0$  in der Endgleichung diese Gestalt haben:

$$\{(P_1)_3^n x_1^m - (-1)^n (P_2)_3^n x_2^m\}^n = 0. \quad . \quad . \quad (25)$$

Während also die Gleichung (24) so viel Schnittpunkte mit  $x_3 = 0$  bestimmt als ihr Grad angiebt, so zeigt die Gleichung (25) dass jeder Schnittpunkt  $n$ -fach zu zählen ist.

*Wollen wir somit die Punkte auffinden, welche die Kurve mit der Geraden  $x_3 = 0$  gemeinsam hat, so haben wir in der gegebenen Gleichung  $x_3 = 0$  zu setzen, die resultirende Gleichung rational zu machen und nachher jeden der durch letztere bestimmten Punkte  $n$ -fach zu zählen.*

Die Glieder, welche man erübrigt, wenn man in der rationalisirten Gleichung  $x_3 = 0$  setzt, sind gerade die Glieder höchsten Grades in  $x_1$  und  $x_2$ . Die obige Überlegung ermöglicht uns diese Glieder zu bestimmen.

Ihre Gesammtheit ist nl. mit der linken Seite der Gleichung (25) identisch.

Die rationalisirte Gleichung hat somit die Form

$$\{(P_1)_3^n x_1^m - (-1)^n (P_2)_3^n x_2^m\}^n + \Psi(P_1, P_2, P_3, x_1, x_2, x_3) = 0. \quad (26)$$

So weit  $x_1$  und  $x_2$  explicit in  $\Psi$  auftreten, erscheinen sie höchstens im Grade  $m(n-1)$ .

Falls  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  lineare Polynomia in  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  sind, etwa

$$\begin{aligned} P_1 &\equiv p_{11} x_1 + p_{12} x_2 + p_{13} x_3, \\ P_2 &\equiv p_{21} x_1 + p_{22} x_2 + p_{23} x_3, \\ P_3 &\equiv p_{31} x_1 + p_{32} x_2 + p_{33} x_3, \end{aligned}$$

so gilt

$$\begin{aligned} (P_1)_3 &\equiv p_{11} x_1 + p_{12} x_2, \\ (P_2)_3 &\equiv p_{21} x_1 + p_{22} x_2, \\ (P_3)_3 &\equiv p_{31} x_1 + p_{32} x_2. \end{aligned}$$

Die rationale Gleichung (21) ist sodann vom Grade

$$n^2 + mn,$$

während die Gleichung (24) vom Grade

$$m + n$$

ist.

In diesem Falle hat die Kurve mit der Gerade  $x_3 = 0$   $m + n$  verschiedene Punkte gemein, von denen jeder  $n$ -fach zu zählen ist.

Wir setzen nun voraus, dass  $X_3$  ( $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ) ein  $k$ -facher Punkt ist, wonach die Substitution

$$x_2 = \lambda x_1$$

$k$  Faktoren  $x_1$  absondert. Die höchste Potenz, unter der  $x_3$  erscheint, ist demnach in der rationalen Gleichung um  $k$  niedriger als der totale Grad.

Es muss also auch in der Gleichung (22) der Grad in  $x_3$  niedriger als der totale sein. Wenn der Grad in  $x_3$  demjenigen in  $x_1$  gleich wäre, so würde er auch, wie oben gezeigt worden ist, nach der Rationalisirung diesem gleich sein. Umgekehrt: ist in

$$P_1 x_1^{\frac{m}{n}} + P_2 x_2^{\frac{m}{n}} + P_3 x_3^{\frac{m}{n}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

der Grad in  $x_3$  niedriger als derjenige der ganzen Gleichung, so weist dieses auf einen vielfachen Punkt in  $X_3$  hin.

Zum Beispiel wählen wir

$$\begin{aligned} (a_1' x_1 + a_1'' x_2 + a_1''' x_3) x_1^{\frac{m}{n}} + (a_2' x_1 + a_2'' x_2 + a_2''' x_3) x_2^{\frac{m}{n}} + \\ + (a_3' x_1 + a_3'' x_2) x_3^{\frac{m}{n}} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (27) \end{aligned}$$

Der Grad dieser Gleichung ist  $1 + \frac{m}{n}$ .

In der Annahme

$$m > n$$

ist der höchste Grad in  $x_3$  nur  $\frac{m}{n}$ .

In diesem Falle ist  $X_3$  also ein vielfacher Punkt.

Die Tangenten in  $X_3$  ergeben sich, indem man diejenigen Werte für  $\lambda$  bestimmt, für welche durch die Substitution  $x_2 = \lambda x_1$  einen oder mehrere Faktoren  $x_1$  abgetrennt werden.

Die Gesamtheit dieser Tangenten wird offenbar ermittelt, indem man den Faktor der höchsten Potenz von  $x_1$  gleich Null setzt.



In dem obigen Beispiel ergibt dieses Verfahren

$$a_3' x_1 + a_3'' x_2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

Sämmtliche Tangenten in  $X_3$  sind somit in der durch die Gleichung (28) bestimmten Gerade vereinigt.

Es bleibt noch die Frage zu beantworten: welche ist die Ordnung des singulären Punktes  $X_3$ ?

Die rationale Gleichung enthält als Glied höchsten Grades in  $x_3$

$$P_3^{n^2} x_3^{mn}.$$

Der Faktor der höchsten Potenz von  $x_3$  ist deshalb  $P_3^{n^2}$  oder  $(a_3' x_1 + a_3'' x_2)^{n^2}$ .

Wir schliessen hieraus, dass der Punkt  $X_3$  ein  $n^2$ -facher ist und dass sämmtliche  $n^2$  Tangenten mit der Gerade

$$a_3' x_1 + a_3'' x_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

zusammenfallen.

Wir können die Gültigkeit dieser Überlegungen noch erweitern bis zu dem Falle, wo  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  lineare Funktionen der Coordinaten  $y_1$ ,  $y_2$  und  $y_3$  sind.

Die allgemeinste Form der gegebenen Gleichung, für welche die obige Betrachtung zulässig ist, lautet deshalb

$$\begin{aligned} & P_1(\underbrace{x_1, x_2, x_3}_r) \cdot (b_1' x_1 + b_1'' x_2 + b_1''' x_3)^{\frac{m}{n}} + \\ & + P_2(\underbrace{x_1, x_2, x_3}_r) \cdot (b_2' x_1 + b_2'' x_2 + b_2''' x_3)^{\frac{m}{n}} + \\ & + P_3(\underbrace{x_1, x_2, x_3}_r) \cdot (b_3' x_1 + b_3'' x_2 + b_3''' x_3)^{\frac{m}{n}} = 0 \quad . \quad . \quad (29) \end{aligned}$$

Als Beispiel wählen wir

$$x_2(x_1 + b_1 x_3)^{\frac{m}{n}} - x_1(x_2 + b_2 x_3)^{\frac{m}{n}} + (a_2 x_1 - a_1 x_2) x_3^{\frac{m}{n}} = 0. \quad (30)$$

Machen wir diese Gleichung rational, so wird sie vom Grade

$$mn + n^2.$$

Man erhält offenbar die höchste Potenz von  $x_3$ , indem man in den Binomen  $x_1 + b_1 x_3$  und  $x_2 + b_2 x_3$  nur die Glieder mit  $x_3$  beibehält. Die höchste Potenz erkennt man somit in

$$x_2 (b_1 x_3)^{\frac{m}{n}} - x_1 (b_2 x_3)^{\frac{m}{n}} + (a_2 x_1 - a_1 x_2) x_3^{\frac{m}{n}}.$$

Der Faktor von  $x_3^{\frac{m}{n}}$  ist daher

$$b_1^{\frac{m}{n}} x_2 - b_2^{\frac{m}{n}} x_1 + a_2 x_1 - a_1 x_2.$$

Der Punkt  $X_3$  ist auch hier singulär von der Ordnung  $n^2$ . Die höchste Potenz von  $x_3$  ist ja nach dem Rationalisiren  $x_3^{mn}$ ; ihr Exponent ist mithin um  $n^2$  niedriger als der totale Grad.

Die Tangenten in  $X_3$  bestimmt man jetzt aus

$$b_1^{\frac{m}{n}} x_2 - b_2^{\frac{m}{n}} x_1 + a_2 x_1 - a_1 x_2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

oder

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{b_1^{\frac{m}{n}} - a_1}{b_2^{\frac{m}{n}} - a_2}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Es sind hier sowohl der Zähler als der Nenner  $n$ -deutig. Der Bruch kann also  $n^2$  verschiedene Werte erhalten.

Wenn entweder der Zähler oder der Nenner, oder beide (wie in diesem Bruche) unveränderliche Glieder enthalten, sind von den  $n^2$  möglichen Werten keine zwei einander gleich.

Da die rechte Seite von (32)  $n^2$ -deutig ist, so stellt diese Gleichung  $n^2$  verschiedene Tangenten durch  $X_3$  dar.

Wir folgern somit, dass der  $n^2$ -fache Punkt  $X_3$   $n^2$  verschiedene Tangenten besitzt.

Wollen wir untersuchen, ob ein gegebener Punkt ein gewöhnlicher oder ein vielfacher Punkt der Kurve ist, so ändern wir zuerst das Coordinatendreieck in der Weise ab, dass der fragliche Punkt zu einer Ecke wird; sodann untersuchen wir ob der höchste Grad, unter welchem die entsprechende Coordinate auftritt, dem totalen Grade der Gleichung gleich ist, oder hinter ihm zurückbleibt. Im letzteren Falle liegt der Punkt auf der Kurve.

Es ist nicht immer leicht herauszufinden, ob der Grad in  $x_3$  niedriger ist als der totale.

In dem herangezogenen Beispiel zeigte  $X_3$  sich schon in der irrationalen Gleichung als ein Punkt der Kurve. In anderen Fällen dagegen sind wir häufig gezwungen die gebrochenen Exponenten wenigstens teilweise zu beseitigen, damit der Grad in  $x_3$  als niedriger als der totale erscheine.

Diesen letzten Fall werden wir ebenfalls durch ein Beispiel erläutern. Wir wählen wieder die Gleichung:

$$x_2(x_1 + b_1 x_3)^{\frac{m}{n}} - x_1(x_2 + b_2 x_3)^{\frac{m}{n}} + (a_2 x_1 - a_1 x_2) x_3^{\frac{m}{n}} = 0. \quad (30)$$

Die Schnittpunkte mit der Gerade  $x_3 = 0$  bestimmen wir aus

$$x_2 x_1^{\frac{m}{n}} - x_1 x_2^{\frac{m}{n}} = 0,$$

oder

$$x_2^n x_1^m - x_1^n x_2^m = 0.$$

Da der totale Grad nicht  $m + n$ , sondern  $n(m + n)$  ist, so sind die Schnittpunkte tatsächlich durch

$$(x_2^n x_1^m - x_1^n x_2^m)^n = 0,$$

oder

$$x_1^{n^2} x_2^{n^2} (x_1^{m-n} - x_2^{m-n})^n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

angewiesen.

Die Gerade  $x_3 = 0$  schneidet daher die Kurve  $n^2$  mal in  $X_1$ ,  $n^2$  mal in  $X_2$  und  $n$  mal in den  $m-n$  Punkten, welche durch

$$x_1^{m-n} - x_2^{m-n} = 0$$

gegeben sind.

Es ist einer dieser Punkte durch

$$x_1 - x_2 = 0$$

bestimmt.

Wir wollen nunmehr die Ordnung der Singularität dieses Punktes erörtern.

Zuerst verlegen wir eine Ecke des Coordinatendreiecks in diesen Punkt, und zwar mittels der Formel

$$x_2 = x_1 + x_2'; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

wir finden somit

$$\begin{aligned} & (x_1 + x_2')(x_1 + b_1 x_3)^{\frac{m}{n}} - x_1(x_1 + x_2' + b_2 x_3)^{\frac{m}{n}} + \\ & + (a_2 - a_1)x_1 - a_1 x_2' x_3^{\frac{m}{n}} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (33) \end{aligned}$$

Der gegebene Punkt ist jetzt durch

$$x'_2 = 0,$$

$$x_3 = 0$$

bestimmt.

Indem wir die höchste Potenz von  $x_1$  herausfinden wollen, haben wir darauf Acht zu geben, dass einige Glieder sich beim Rationalisiren aufheben.

Wir schreiben zuerst die Gleichung (33) wie folgt

$$x_1(x_1 + x'_2 + b_2x_3)^{\frac{m}{n}} = (x_1 + x'_2)(x_1 + b_1x_3)^{\frac{m}{n}} + \{(a_2 - a_1)x_1 - a_1x'_2\}x_3^{\frac{m}{n}},$$

und potenziren die beiden Glieder mit  $n$ ; wir finden dann

$$\begin{aligned} x_1^n(x_1 + x'_2 + b_2x_3)^m &= (x_1 + x'_2)^n(x_1 + b_1x_3)^m + \\ &+ n(x_1 + x'_2)^{n-1}(x_1 + b_1x_3)^{\frac{m}{n}(n-1)}\{(a_2 - a_1)x_1 - a_1x'_2\}x_3^{\frac{m}{n}} + \dots + \\ &+ \{(a_2 - a_1)x_1 - a_1x'_2\}^n x_3^m, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} x_1^n\{x_1^m + mx_1^{m-1}(x'_2 + b_2x_3) + \dots\} &= \{x_1^n + nx_1^{n-1}x'_2 + \dots\}\{x_1^m + mb_1x_1^{m-1}x_3 + \dots\} + \\ &+ n\{x_1^{n-1} + (n-1)x_1^{n-2}x'_2 + \dots + x_2'^{n-1}\}\{x_1^{\frac{m}{n}-1} + \dots\}\{(a_2 - a_1)x_1 - a_1x'_2\}x_3^{\frac{m}{n}} + \\ &+ \dots + \{(a_2 - a_1)x_1 - a_1x'_2\}^n x_3^m, \end{aligned}$$

oder endlich

$$\begin{aligned} x_1^{m+n} + mx_1^{m+n-1}(x'_2 + b_2x_3) + \dots &= x_1^{m+n} + (nx'_2 + mb_1x_3)x_1^{m+n-1} + \\ &+ n(a_2 - a_1)x_1^{m+n-\frac{m}{n}} + R, \end{aligned} \quad (34)$$

wo  $R$  nur diejenigen Potenzen von  $x_1$  enthält, welche niedriger sind als  $m + n - 1$  und  $m + n - \frac{m}{n}$ .

Da wir  $m > n$ , also  $\frac{m}{n} > 1$  vorausgesetzt haben, und die beiden Glieder mit  $x_1^{m+n}$  sich aufheben, haben wir nur die Glieder mit  $x_1^{m+n-1}$  zu betrachten.

In der auf Null reducirten Gleichung (34) ist der Faktor von  $x_1^{m+n-1}$

$$m(x'_2 + b_2x_3) - (nx'_2 + mb_1x_3).$$

Indem wir diesen Ausdruck gleich Null setzen, bekommen wir in der also entstandenen Gleichung

$$m(x'_2 + b_2x_3) - (nx'_2 + mb_1x_3) = 0 \quad (35)$$

die Darstellung der Tangente im gegebenen Punkte.

Der totale Grad der Gleichung (34) ist  $m + n$ , der Grad der rationalen Gleichung dagegen  $n(m + n)$ . Wir schliessen hieraus, dass die Tangenten durch

$$\{m(x_2' + b_2 x_3) - (nx_2' + mb_1 x_3)\}^n = 0$$

bestimmt werden, und erkennen, dass der gegebene Punkt ein  $n$ -facher ist, und dass sämtliche  $n$  Tangenten in der durch (35) dargestellten Gerade vereinigt sind.

Die Gleichung (35) lässt sich auch in dieser Weise schreiben:

$$\frac{x_2'}{x_3} = - \frac{m(b_2 - b_1)}{m - n},$$

oder

$$x_1 - x_2 = \frac{m(b_2 - b_1)}{m - n} x_3.$$

Aus diesem Beispiel geht hervor, dass man bei der Umformung darauf zu achten hat, dass der Coefficient der höchsten Potenz der betreffenden Coordinate explicit erscheint.

§ 5. Wir wollen diesen Abschnitt beendigen mit einer kurzen Wiederholung des allgemeinsten, in ihm gewonnenen Resultates.

Es sei gegeben die Gleichung

$$\begin{aligned} &P_1(x_1, x_2, x_3) \cdot (b_1' x_1 + b_1'' x_2 + b_1''' x_3)^{\frac{m}{n}} + \\ &+ P_2(x_1, x_2, x_3) \cdot (b_2' x_1 + b_2'' x_2 + b_2''' x_3)^{\frac{m}{n}} + \\ &+ P_3(x_1, x_2, x_3) \cdot (b_3' x_1 + b_3'' x_2 + b_3''' x_3)^{\frac{m}{n}} = 0, \end{aligned}$$

wo  $P_1$ ,  $P_2$  und  $P_3$  homogene Polynomia  $r^{\text{ten}}$  Grades in den Coordinaten  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  sind.

Durch Rationalisirung bekommt diese Gleichung den Grad

$$mn + rn^2.$$

Man findet die Schnittpunkte der durch sie dargestellten Kurve mit der Gerade  $X_1 X_2$ , indem man  $x_3 = 0$  setzt, die erhaltene Gleichung rational macht, sie auf Null reducirt und nachher die linke Seite mit einer solchen Zahl potenzirt, dass der totale Grad zu  $mn + rn^2$  wird.

Wollen wir die Schnittpunkte mit einer willkürlichen Gerade bestimmen, so ändern wir das Coordinatendreieck in der Weise

ab, dass die gegebene Gerade mit einer Seite zusammenfällt; sodann wenden wir obiges Verfahren an.

Um zu entscheiden ob die Ecke  $X_3$  des Coordinatendreiecks ein gewöhnlicher oder singulärer Punkt der Kurve sei, untersuchen wir, ob die höchste Potenz, unter welcher  $x_3$  vorkommt dem totalen Grade der Gleichung entspricht oder niedriger ist.

Im ersteren Falle befindet  $X_3$  sich *nicht* auf der Kurve, im letzteren *wohl*. Es ist hierbei häufig notwendig wenigstens einen Teil der gebrochenen Exponenten wegzuschaffen, damit wir derjenigen Glieder los werden, welche beim Rationalisiren sich aufheben. Hat man entweder in der gegebenen Gleichung, oder in einer von ihr abgeleiteten, festgestellt, dass der Grad in  $x_3$  um  $k$  niedriger ist als der totale, und ist der totale Grad  $(mn + rn^2) : N$ , so schliesst man, dass  $X_3$  ein  $kN$ -facher Punkt ist. Der Faktor  $\Phi(x_1, x_2)$  der höchsten Potenz von  $x_3$  (offenbar ein Polynomium  $k^{\text{ten}}$  Grades in  $x_1$  und  $x_2$ ), bestimmt die  $k$  verschiedenen Tangenten in  $X_3$ , von denen jede  $N$ -fach zu zählen ist, wonach sie tatsächlich durch

$$\Phi^N(x_1, x_2) = 0$$

dargestellt werden; d. h.  $X_3$  ist ein  $kN$ -facher Punkt mit  $k$   $N$ -fachen Tangenten, deren Gesamtheit durch

$$\Phi(x_1, x_2) = 0$$

dargestellt wird.

Handelt es sich um einen willkürlichen gegebenen Punkt, so wird das Coordinatendreieck in der Weise transformirt, dass der gegebene Punkt zu einer ihrer Ecken wird, wonach die obigen Regeln angewandt werden.

Den im Vorigen dargelegten Operationen liegt der Gedanke zu Grunde, dass eine Form extremen (höchsten oder niedrigsten) Grades nach Beseitigung der gebrochenen Exponenten von extremem Grade bleibt. Dieses Prinzip ergiebt sich am einfachsten aus der geometrischen Deutung der Gleichung; diese ist ja unabhängig von etwaigen algebraischen Umformungen.

## VIERTER ABSCHNITT.

*Die Congruenzen von  $w'^n = c^{n-m} w^m$  und  $w'^n w^m = c^{m+n}$ .*

---

§ 1. Es sollen jetzt die Congruenzen untersucht werden, welche den Verwandtschaften

$$w' = w^{+\frac{m}{n}} c^{1-\frac{m}{n}} \quad \text{und} \quad w' = w^{-\frac{m}{n}} c^{1+\frac{m}{n}}$$

entsprechen.

Die Congruenz, welche der Funktion

$$w' = w^{+\frac{m}{n}} c^{1-\frac{m}{n}}$$

angehört, ist die typische *parabolische* Congruenz, während die Congruenz, welche die Funktion

$$w' = w^{-\frac{m}{n}} c^{1+\frac{m}{n}}$$

abbildet als Muster einer *hyperbolischen* Congruenz betrachtet werden kann.

Das hierzu erforderliche analytische Verfahren erleidet eine bedeutende Vereinfachung, wenn wir uns der irrationalen statt der rationalen Gleichungen bedienen können; mit Rücksicht darauf haben wir im vorigen Abschnitte eine Methode vorausgeschickt, welche uns ermöglicht aus ternären Gleichungen mit gebrochenen Exponenten die Eigenschaften der durch sie dargestellten Kurven zu erkennen.

Jedes Glied der Untersuchung soll gleichzeitig für die beiden Congruenzen ausgeführt werden damit die Übereinstimmung und der Unterschied zwischen ihnen um so deutlicher hervortreten.

§ 2a. *Einführung in die parabolische Congruenz.*

Die parabolische Congruenz vertritt die Funktion

$$w' = w + \frac{m}{n} c^{1-\frac{m}{n}}$$

oder

$$w'^n = c^{n-m} w^m. \quad (1a)$$

Wir setzen voraus

$$m > n. \quad (2)$$

Es sei  $w = u + iv$ ,  $w' = u' + iv'$ . Ein Congruenzstrahl wird nun definirt als die Verbindungslinie des Punktes ( $x = u$ ,  $y = v$ ,  $z = 0$ ) der Ebene  $[w]$  mit dem Punkte ( $x = u'$ ,  $y = v'$ ,  $z = h$ ) der Ebene  $[w']$ .

Wir ziehen sofort das homogene Coordinatensystem heran, und setzen demnach

$$\left. \begin{aligned} x + iy &= cx_1, \\ x - iy &= cx_2, \\ h - z &= hx_3, \\ z &= hx_4. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Es seien ( $x'_1, x'_2, x'_4, x'_3 = 0$ ) die Coordinaten desjenigen Punktes, der vermöge der Funktion (1a) dem Punkte ( $x_1, x_2, x_3, x_4 = 0$ ) zugeordnet ist. Hieraus ergeben sich die folgenden Beziehungen

$$\frac{x'_1{}^n}{x_1^m} = \frac{x'_2{}^n}{x_2^m} = \frac{x'_4{}^n}{x_3^m}. \quad (4a)$$

Setzen wir noch für einen Punkt der Ebene  $[w]$  oder  $\omega_\infty$

$$\frac{x_1}{x_3} = p_1, \quad \frac{x_2}{x_3} = p_2, \quad (5)$$

so ist es klar, dass ein Strahl der parabolischen Congruenz durch die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= p_1 x_3 + p_1^{\frac{m}{n}} x_4, \\ x_2 &= p_2 x_3 + p_2^{\frac{m}{n}} x_4 \end{aligned} \right\} \quad (6a)$$

bestimmt wird.

Durch Wegschaffung der gebrochenen Exponenten gelangt man zu

$$\left. \begin{aligned} (x_1 - p_1 x_3)^n &= p_1^m x_4^n, \\ (x_2 - p_2 x_3)^n &= p_2^m x_4^n. \end{aligned} \right\} \quad (7a)$$



§ 2b. *Einführung in die hyperbolische Congruenz.*

Die hyperbolische Congruenz vertritt die Funktion

$$w' = w^{-\frac{m}{n}} c^{\frac{1}{n} + \frac{m}{n}}$$

oder

$$w'^n w^m = c^{m+n}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1b)$$

Die Verwandtschaftsgleichungen zwischen den Coordinaten  $(x_1, x_2, x_3, x_4 = 0)$  (siehe (3)) eines in  $\omega_\infty$  liegenden Punktes und den Coordinaten  $(x_1', x_2', x_4', x_3 = 0)$  des in  $\omega_0$  befindlichen Bildpunktes, lauten jetzt:

$$x_1'^n x_1^m = x_2'^n x_2^m = x_4'^n x_3^m. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4b)$$

Der Congruenzstrahl wird nunmehr durch

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= p_1 x_3 + p_1^{-\frac{m}{n}} x_4, \\ x_2 &= p_2 x_3 + p_2^{-\frac{m}{n}} x_4 \end{aligned} \right\} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6b)$$

dargestellt. Diese Gleichungen gestalten sich nach Beseitigung der gebrochenen Exponenten folgendermassen:

$$\left. \begin{aligned} (x_1 - p_1 x_3)^n p_1^m &= x_4^m, \\ (x_2 - p_2 x_3)^n p_2^m &= x_4^m. \end{aligned} \right\} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7b)$$

§ 3a. *Der Bündelgrad und der Feldgrad der parabolischen Congruenz.*

Aus (7a) geht hervor, dass ein einziges Wertesystem  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$   $m$  Werte für  $p_1$  und  $m$  Werte für  $p_2$  bestimmt, also  $m^2$  Combinationen  $(p_1, p_2)$  anweist. Hieraus folgt, dass sich auf einem willkürlichen Punkt im Raume  $m^2$  Congruenzstrahlen stützen, oder m. a. W.:

*der Bündelgrad der parabolischen Congruenz ist  $m^2$ .*

Der in  $\omega_0$  befindlichen, durch

$$\beta_1 x_1' + \beta_2 x_2' + \beta_4 x_4' = 0$$

dargestellten Gerade  $b'$  entspricht in  $\omega_\infty$  eine Kurve  $\beta$ , deren Gleichung lautet:

$$\beta_1 x_1^{\frac{m}{n}} + \beta_2 x_2^{\frac{m}{n}} + \beta_4 x_3^{\frac{m}{n}} = 0.$$

Diese Kurve ist, wie im III. Abschnitte dargelegt ward, vom Grade  $mn$ .

Eine durch  $b'$  gelegte Ebene schneidet  $\omega_\infty$  in der Grade  $a$ , welche die Kurve  $\beta$  in  $mn$  Punkten  $P$  trifft, deren Bilder  $P'$  auf  $b'$  liegen. In dieser Ebene befinden sich also  $mn$  Congruenzstrahlen  $PP'$ , oder

*der Feldgrad der parabolischen Congruenz ist  $mn$ .*

§ 3b. *Der Bündelgrad und der Feldgrad der hyperbolischen Congruenz.*

Vermöge (7b) bestimmt ein Punkt  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$   $m + n$  Werte für  $p_1$  und  $m + n$  Werte für  $p_2$ , also  $(m + n)^2$  Combinationen  $(p_1, p_2)$ . Hieraus ergibt sich, dass ein willkürlicher Punkt des Raumes  $(m + n)^2$  Congruenzstrahlen trägt, wonach wir behaupten können:

*der Bündelgrad der hyperbolischen Congruenz ist  $(m + n)^2$ .*

Wir denken uns wieder eine Ebene, welche  $\omega_0$  in der durch

$$\beta_1 x_1' + \beta_2 x_2' + \beta_3 x_3' = 0$$

dargestellten Gerade  $b'$  schneidet. Dieser Gerade entspricht in  $\omega_\infty$  eine Kurve  $\beta$ , welche die Gleichung

$$\beta_1 x_1^{-\frac{m}{n}} + \beta_2 x_2^{-\frac{m}{n}} + \beta_3 x_3^{-\frac{m}{n}} = 0$$

oder

$$\beta_1 x_1^{\frac{m}{n}} x_3^{\frac{m}{n}} + \beta_2 x_2^{\frac{m}{n}} x_3^{\frac{m}{n}} + \beta_3 x_1^{\frac{m}{n}} x_2^{\frac{m}{n}} = 0$$

hat. Machen wir diese Gleichung rational, so wird sie vom Grade  $2mn$ . Die Bildkurve  $\beta$  von  $b'$  ist daher vom Grade  $2mn$ . Die genannte Ebene schneidet  $\omega_\infty$  in der Gerade  $a$ , welche die Kurve  $\beta$  in  $2mn$  Punkten  $P$  trifft, deren Bilder  $P'$  sich auf  $b'$  befinden. Die Ebene enthält also  $2mn$  Congruenzstrahlen  $PP'$ , oder

*der Feldgrad der hyperbolischen Congruenz ist  $2mn$ .*

§ 4a. *Die Fokalfläche der parabolischen Congruenz.*

Die Ebene

$$x_2 = p_2 x_3 + p_2^{\frac{m}{n}} x_4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6a).$$

welche den Congruenzstrahl  $p$  enthält, geht durch  $X_1$ . Wenn  $p_2$  seine  $\infty^1$  vielen Werte durchläuft, umhüllt die Ebene  $(p, X_1)$  einen Kegel mit  $X_1$  als Spitze.

Die Gleichung dieses Kegels erhalten wir, indem wir die Diskriminante der rationalisirten Gleichung (6a) verschwinden lassen. Wir finden alsdann

$$(-1)^n (m - n)^{m-n} n^n x_3^m = m^m x_2^{m-n} x_4^n. \quad . \quad . \quad (8a)$$

Der durch die Ebene  $(p, X_1)$  umhüllte Kegel ist also vom Grade  $m$ ; wir wollen ihn mit  $F_1$  bezeichnen.

Der Congruenzstrahl  $p$  ist offenbar eine Tangente des Kegels  $F_1$ .

In analoger Weise zeigt es sich, dass jeder Congruenzstrahl auch einen Kegel  $F_2$  berührt, dessen Spitze in  $X_2$  liegt, und dessen Gleichung lautet:

$$(-1)^n (m - n)^{m-n} n^n x_3^m = m^m x_1^{m-n} x_4^n. \quad . \quad . \quad (9a)$$

Der Congruenzstrahl  $p$  kann also als eine gemeinschaftliche Tangente der beiden Kegel  $F_1$  und  $F_2$  betrachtet werden.

Ein Punkt  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  bestimmt (siehe 6a))  $m$  Werte für  $p_2$ , trägt demnach  $m$  Berührungsebenen von  $F_1$ . Die beiden Kegel sind deshalb von der Klasse  $m$ .

Von den  $m$  Berührungsebenen, welche man aus einem auf  $F_1$  liegenden Punkte an  $F_1$  legen kann, sind zwei zusammengefallen, und zwar in die Berührungsebene jenes Punktes. Derselbe Punkt trägt  $m$  Berührungsebenen an  $F_2$ . Von den  $m^2$  gemeinschaftlichen Tangenten sind also  $2m$  paarweise zusammengefallen. Wir haben aus diesem Grunde den Kegel  $F_1$  als einen Bestandteil der Fokalfläche zu betrachten. Es erhellt sofort, dass der zweite Kegel,  $F_2$ , der andere Bestandteil der Fokalfläche ist.

Die beiden Kegel  $F_1$  und  $F_2$  bilden daher zusammen die Fokalfläche der Congruenz; also:

*die Fokalfläche der parabolischen Congruenz besteht aus zwei Kegeln  $F_1$  und  $F_2$ , bez. mit  $X_1$  und  $X_2$  als Spitzen, von denen sowohl der Grad wie die Klasse  $m$  ist. Die Congruenzstrahlen sind die gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Fokalkegel  $F_1$  und  $F_2$ .*

Die Kegel

$$F_1 \dots Ax_3^m + Bx_2^{m-n} x_4^n = 0$$

und

$$F_2 \dots Ax_3^m + Bx_1^{m-n} x_4^n = 0$$

berühren sich und die Ebene  $\omega_\infty$  in der Gerade  $X_1 X_2$ .

Die Ebene  $\omega_\infty$  ( $x_4 = 0$ ) hat  $m$  mal die Gerade  $X_1 X_2$  mit den beiden Kegeln gemein. Die Gerade  $X_1 X_2$  ist eine  $n$ -fache Kante der beiden Kegel, während sämtliche durch  $X_1 X_2$  hindurchgehenden Blätter durch die Ebene  $\omega_\infty$  berührt werden.

Die beiden Kegel haben, wie hieraus hervorgeht,  $mn$  mal die Gerade  $X_1 X_2$  gemein.

Weil ihr Gesamtschnitt vom Grade  $m^2$  ist, so wird der Restschnitt vom Grade  $m(m-n)$  sein.

Jede der  $m-n$  durch

$$x_1^{m-n} = x_2^{m-n}$$

bestimmten Ebenen hat mit den beiden Kegeln dieselbe Kurve  $m^{\text{ten}}$  Grades gemein. Der Restschnitt ist deshalb aus  $m-n$  Plankurven  $m^{\text{ten}}$  Grades zusammengesetzt, deren Ebenen durch

$$x_2 = \tau x_1$$

angewiesen sind, wenn

$$\tau^{m-n} = 1.$$

Es ist klar, dass jede der  $m-n$  Plankurven auch von der  $m^{\text{ten}}$  Klasse ist.

Der Berührungspunkt  $P_{\rho_1}$  des Strahles  $\rho$  mit dem Kegel  $F_1$  (erster Brennpunkt von  $\rho$ ) ist gegeben durch

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= p_1 x_3 + p_1^{\frac{m}{n}} x_4, \\ x_2 &= p_2 x_3 + p_2^{\frac{m}{n}} x_4, \\ (m-n)^{m-n} n^n x_3^m - (-1)^n m^m x_2^{m-n} x_4^n &= 0, \end{aligned} \right\}$$

also durch

$$\frac{x_1}{p_1 \left( m p_2^{\frac{m-n}{n}} - n p_1^{\frac{m-n}{n}} \right)} = \frac{x_2}{(m-n) p_2^{\frac{m}{n}}} = \frac{x_3}{m p_2^{\frac{m-n}{n}}} = \frac{x_4}{-n}. \quad (10a)$$

Der zweite Brennpunkt  $P_{\rho_2}$  von  $\rho$  ist bestimmt durch

$$\frac{x_1}{(m-n) p_1^{\frac{m}{n}}} = \frac{x_2}{p_2 \left( m p_1^{\frac{m-n}{n}} - n p_2^{\frac{m-n}{n}} \right)} = \frac{x_3}{m p_1^{\frac{m-n}{n}}} = \frac{x_4}{-n}. \quad (11a)$$

#### § 4b. Die Fokalfäche der **hyperbolischen** Congruenz.

Ein Congruenzstrahl  $\rho$  ( $p_1, p_2$ ) wird mit  $X_1$  verbunden durch die Ebene

$$x_2 = p_2 x_3 + p_2^{\frac{m}{n}} x_4. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6b)$$

Diese Ebene umhüllt bei veränderlichem  $p_2$  einen Kegel  $F_1$ , mit

$X_1$  als Spitze, dessen Gleichung sich ergibt, indem die Diskriminante von (6b) gleich Null gesetzt wird. Sie lautet somit:

$$n^n m^m x_2^{m+n} - (m+n)^{m+n} x_3^m x_4^n = 0. \quad . \quad . \quad (8b)$$

Der durch die Ebene  $(p, X_1)$  umhüllte Kegel  $F_1$  ist daher vom Grade  $m+n$ .

Der Strahl  $p$  ist offenbar eine Tangente an diesem Kegel  $F_1$ , und gleichfalls an einem zweiten Kegel  $F_2$ , welcher durch

$$n^n m^m x_1^{m+n} - (m+n)^{m+n} x_3^m x_4^n = 0 \quad . \quad . \quad (9b)$$

dargestellt wird, seine Spitze in  $X_2$  hat, und auch vom Grade  $m+n$  ist.

Wie in § 4a, lässt sich auch hier beweisen, dass die beiden Kegel  $F_1$  und  $F_2$  von der Klasse  $m+n$  sind und zusammen die Fokalfläche der Congruenz bilden; wir behaupten daher:

*die Fokalfläche der hyperbolischen Congruenz besteht aus zwei Kegeln  $F_1$  und  $F_2$ , bez. mit  $X_1$  und  $X_2$  als Spitzen, von denen sowohl der Grad wie die Klasse  $m+n$  ist. Die Strahlencongruenz ist die Gesamtheit der gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Fokalkegel  $F_1$  und  $F_2$ .*

Die beiden Kegel  $F_1$  und  $F_2$  schneiden sich in einem Gebilde vom Grade  $(m+n)^2$ .

Jede der  $m+n$  durch

$$x_1^{m+n} = x_2^{m+n}$$

angewiesenen Ebenen schneidet die beiden Kegel in derselben Kurve vom Grade  $m+n$ . Der Schnitt der beiden Kegel zerfällt demnach in  $m+n$  Plankurven vom Grade  $m+n$  und von der Klasse  $m+n$ ; diese befinden sich in den Ebenen

$$x_2 = \tau x_1$$

wenn

$$\tau^{m+n} = 1.$$

Die Gerade  $X_3 X_4$  trifft jeden Kegel  $m$  mal in  $X_4$  und  $n$  mal in  $X_3$ , während  $\omega_0$  in  $X_4$  mit den beiden Kegeln  $m+n$ , und  $\omega_\infty$  in  $X_3$  mit ihnen  $m+n$  Punkte gemein hat.

Es ist also  $X_4$  ein  $m$ -facher Punkt, dessen Berührungsebenen in  $\omega_0$  vereinigt sind, und  $X_3$  ein  $n$ -facher Punkt, dessen sämtliche Berührungsebenen mit  $\omega_\infty$  zusammengefallen sind.

Der Brennpunkt  $P_{f1}$  (Berührungspunkt mit  $F_1$ ) ist bestimmt durch

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= p_1 x_3 + p_1^{-\frac{m}{n}} x_4, \\ x_2 &= p_2 x_3 + p_2^{-\frac{m}{n}} x_4, \\ n^n m^m x_2^{m+n} - (m+n)^{m+n} x_3^m x_4^n &= 0, \end{aligned} \right\}$$

oder durch

$$\frac{x_1}{mp_1^{\frac{m+n}{n}} + np_2^{\frac{m+n}{n}}} = \frac{x_2}{(m+n)p_1^{\frac{m}{n}} p_2} = \frac{x_3}{mp_1^{\frac{m}{n}}} = \frac{x_4}{np_1^{\frac{m}{n}} p_2^{\frac{m+n}{n}}}, \quad (10b)$$

Der zweite Brennpunkt,  $P_{f_2}$ , wird dargestellt durch

$$\frac{x_1}{(m+n)p_1 p_2^{\frac{m}{n}}} = \frac{x_2}{mp_2^{\frac{m}{n}} + np_1^{\frac{m}{n}}} = \frac{x_3}{mp_2^{\frac{m}{n}}} = \frac{x_4}{np_2^{\frac{m}{n}} p_1^{\frac{m+n}{n}}}. \quad (11b)$$

§ 5a. Die singulären Elemente der **parabolischen** Congruenz.

Singulär ist

1°. jede Ebene, welche einen Congruenzstrahl  $p$  mit einem der Punkte  $X_1$  oder  $X_2$  verbindet, und somit durch eine der Gleichungen (6a) dargestellt wird;

eine solche Ebene, z. B.  $(p, X_1)$  schneidet den Fokalkegel  $F_2$  in einer Kurve die sowohl vom Grade  $m$  wie von der Klasse  $m$  ist; sämtliche Tangenten dieser Kurve sind Congruenzstrahlen, da die Ebene  $(p, X_1)$  den Fokalkegel  $F_1$  berührt; die Ebene  $(p, X_1)$  enthält also ein Strahlengebilde von der Klasse  $m$ ;

2°. jede der Ebenen  $\varepsilon_{\tau_{m-n}}$ , welche durch

$$x_1^{m-n} = x_2^{m-n}$$

bestimmt sind; in jeder dieser Ebenen liegt ja eine Kurve vom  $m^{\text{ten}}$  Grade und von der  $m^{\text{ten}}$  Klasse, welche auf den beiden Fokalkegeln liegt und deren Tangenten deshalb Congruenzstrahlen sind; es enthält daher jede Ebene  $\varepsilon_{\tau_{m-n}}$  ( $\tau_{m-n}^{m-n} = 1$ ) ein Strahlengebilde von der Klasse  $m$ ;

3°. die Ebene  $\omega_\infty$ ; wir werden zeigen, dass sich in dieser Ebene befinden zwei Strahlenbüschel bez. mit  $X_1$  und  $X_2$  als Scheitel und  $m-n$  Strahlenbüschel deren Spitzen mit den auf  $X_1 X_2$  liegenden, durch  $x_1^{m-n} = x_2^{m-n}$  bestimmten Punkten  $E_{\tau_{m-n}}$  zusammenfallen.

Singuläre Punkte sind

1°. die Punkte  $X_1$  und  $X_2$ , jeder mit einem Strahlenbüschel in  $\omega_\infty$ ;

2°. die Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$ , jeder mit einem Strahlenbüschel in  $\omega_\infty$ .

Diese Aussagen wollen wir nunmehr beweisen. Wie im II. Abschnitt, betrachten wir die Congruenzstrahlen, welche nach einem in  $\omega_\infty$  liegenden Punkt zielen. Zuerst wollen wir einen Congruenzstrahl  $p$  durch die Coordinaten  $p_1'$  und  $p_2'$  seiner Spur  $P'$  in  $\omega_\infty$  bestimmen. In diesem Falle hat der Strahl diese Gleichungen:

$$\begin{cases} x_1 = p_1' \frac{n}{m} x_3 + p_1' x_4, \\ x_2 = p_2' \frac{n}{m} x_3 + p_2' x_4, \end{cases} \quad (12a)$$

oder

$$\begin{cases} (x_1 - p_1' x_4)^m = p_1'^n x_3^m, \\ (x_2 - p_2' x_4)^m = p_2'^n x_3^m. \end{cases}$$

Setzen wir noch

$$p_1' = \frac{y_1'}{y_4}, \quad p_2' = \frac{y_2'}{y_4},$$

so finden wir

$$\begin{cases} (x_1 y_4' - x_4 y_1')^m = x_3^m y_1'^n y_4'^{m-n}, \\ (x_2 y_4' - x_4 y_2')^m = x_3^m y_2'^n y_4'^{m-n}. \end{cases} \quad (13a)$$

Beindet sich der Punkt  $P$  ( $x_1, x_2, x_3, x_4$ ) in  $\omega_\infty$ , so haben wir  $x_4 = 0$  zu setzen, wonach wir erhalten:

$$\begin{cases} x_1^m y_4'^m = x_3^m y_1'^n y_4'^{m-n}, \\ x_2^m y_4'^m = x_3^m y_2'^n y_4'^{m-n}, \end{cases}$$

oder

$$\begin{cases} y_4'^{m-n} (x_1^m y_4'^n - x_3^m y_1'^n) = 0, \\ y_4'^{m-n} (x_2^m y_4'^n - x_3^m y_2'^n) = 0. \end{cases}$$

Die Spuren  $P'$  sind also bestimmt durch

$$\begin{cases} x_1^m y_4'^n - x_3^m y_1'^n = 0, \\ x_2^m y_4'^n - x_3^m y_2'^n = 0, \end{cases}$$

oder

$$\begin{cases} \frac{y_1'}{y_4'} = \left( \frac{v_1'}{v_3'} \right)^{\frac{m}{n}}, \\ \frac{y_2'}{y_4'} = \left( \frac{v_2'}{v_3'} \right)^{\frac{m}{n}}, \end{cases}$$

die  $n^2$  durch diese Gleichungen angewiesenen Punkte  $P'$  sind offenbar die  $n^2$  in  $\omega_0$  liegenden Bilder  $P'$  des in  $\omega_\infty$  liegenden Punktes  $P$ ; es zeigt sich, dass von den  $m^2$  Strahlen, welche nach einem Punkte  $P$  in  $\omega_\infty$  zielen,  $n^2$  den Punkt  $P$  mit seinen  $n^2$  in  $\omega_0$  befindlichen Bildern  $P'$  verbinden;

$$2^\circ. \quad \left. \begin{aligned} y_4'^{m-n} &= 0, \\ x_2^m y_4'^n - x_3^m y_2'^n &= 0, \end{aligned} \right\}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} y_4'^{m-n} &= 0, \\ y_2'^n &= 0; \end{aligned} \right\}$$

diese Gleichungen bestimmen  $n(m-n)$  mal den Punkt  $X_1$ ; wir folgern hieraus, dass von den  $m^2$  durch  $P$  gehenden Strahlen,  $n(m-n)$  mit der Gerade  $PX_1$  zusammenfallen;

$$3^\circ. \quad \left. \begin{aligned} x_1^m y_4'^n - x_3^m y_1'^n &= 0, \\ y_4'^{m-n} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} y_1'^n &= 0, \\ y_4'^{m-n} &= 0; \end{aligned} \right\}$$

$n(m-n)$  Strahlen verbinden also den Punkt  $P$  mit  $X_2$ ;

$$4^\circ. \quad \left. \begin{aligned} y_1'^{m-n} &= 0, \\ y_4'^{m-n} &= 0; \end{aligned} \right\}$$

die  $(m-n)^2$  übrigen Durchstosspunkte liegen alle auf der Gerade  $X_1X_2$ , sind jedoch vorläufig noch nicht völlig bestimmt.

Die Lage dieser letzten Punkte ergibt sich, wenn wir zuerst den Punkt  $P$  in der Nähe von  $\omega_\infty$  annehmen — sodass  $x_4$  zwar nicht null, aber doch klein ist — und nachher den Abstand zu  $\omega_\infty$  verschwinden lassen.

Wenn  $x_4$  klein ist, wird auch  $y_4'$  einen geringen Wert haben.

Wir entwickeln daher  $y_4' : y_1'$  nach Potenzen von  $(x_4 : x_1)^{\frac{1}{m-n}}$  und  $y_4' : y_2'$  nach Potenzen von  $(x_4 : x_2)^{\frac{1}{m-n}}$ .

Zu diesem Zweck setzen wir



$$\frac{y_4}{y_1} = y, \quad \frac{x_4}{x_1} = x,$$

$$\frac{1}{m-n} = \rho,$$

und

$$y = \alpha + \beta x^\rho + \gamma x^{2\rho} + \dots + \lambda x + \dots + \sigma x^{m\rho} + \dots$$

Die erste der Gleichungen (13a) lautet alsdann:

$$(y-x)^n = y^{m-n} \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^m,$$

oder, nach Elimination von  $y$ ,

$$\begin{aligned} & [\alpha + \beta x^\rho + \gamma x^{2\rho} + \dots + (\lambda-1)x + \dots + \sigma x^{m\rho} + \dots]^m = \\ & = [\alpha + \beta x^\rho + \gamma x^{2\rho} + \dots + \lambda x + \dots + \sigma x^{m\rho} + \dots]^{m-n} \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^m. \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen der Coefficienten gleicher Potenzen von  $x$  finden wir

$$\alpha^m = \alpha^{m-n} \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^n,$$

$$m\alpha^{m-1}\beta = (m-n)\alpha^{m-n-1}\beta \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^m,$$

.....

.....

$$P_1\alpha = \beta^{m-n} + P_1'\alpha,$$

.....

.....

$$(\lambda-1)^m + P_{m-n}\alpha + Q_{m-n}\beta + \dots = \sigma^{m-n} \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^m + P'_{m-n}\alpha + Q'_{m-n}\beta + \dots$$

Diesen Bedingungen wird genügt durch

$$1^\circ. \quad \alpha^n = \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^m,$$

oder

$$\alpha = \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^{\frac{m}{n}};$$

wir erhalten dann

$$y = \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^{\frac{m}{n}} + \beta x^\rho + \gamma x^{2\rho} + \dots,$$

also für verschwindendes  $x$

$$y = \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^{\frac{m}{n}},$$

oder

$$\frac{y_4'}{y_1'} = \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^{\frac{m}{n}};$$

dieser Ausdruck ist  $n$ -deutig;

$$2^\circ. \quad \alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0, \dots \lambda = 0, \dots (-1)^m = \sigma^{m-n} \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^m, \dots$$

oder

$$\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0, \dots \lambda = 0, \dots \sigma = \left(-\frac{x_1}{x_3}\right)^{\frac{m}{m-n}},$$

wonach

$$y = \left(-\frac{x_1}{x_3}\right)^{\frac{m}{m-n}} x^{\frac{m}{m-n}} = \left(-\frac{x_1}{x_3}\right)^{\frac{m}{m-n}} \left(\frac{x_4}{x_1}\right)^{\frac{m}{m-n}} = \left(-\frac{x_4}{x_3}\right)^{\frac{m}{m-n}},$$

oder

$$\frac{y_4'}{y_1'} = \left(-\frac{x_4}{x_3}\right)^{\frac{m}{m-n}};$$

es sei  $T$  eine der  $(m-n)^{\text{ten}}$  Wurzeln von  $\left(-\frac{x_4}{x_3}\right)^m$  und  $\tau_{m-n}$  eine der  $(m-n)^{\text{ten}}$  Wurzeln von  $+1$ ; wir haben alsdann

$$\frac{y_4'}{y_1'} = \tau_{m-n}^m T;$$

weil  $m$  und  $m-n$  keinen gemeinschaftlichen Teiler haben, so ist  $\tau_{m-n}^m$  eine *primitive* Wurzel; wir können sie ebenfalls  $\tau_{m-n}$  nennen; der Ausdruck für  $y_4'$ :  $y_1'$  wird sodann

$$\frac{y_4'}{y_1'} = \tau_{m-n} T;$$

dieser Ausdruck ist  $(m-n)$ -deutig.

In analoger Weise finden wir für das Verhältniss  $y'_4 : y'_2$  zwei Ausdrücke, nl.:

$$\begin{aligned} 1^\circ. \quad & \frac{y'_4}{y'_2} = \left( \frac{x_3}{x_2} \right)^{\frac{m}{n}} \quad (n\text{-deutig}), \\ 2^\circ. \quad & \frac{y'_4}{y'_2} = \tau_{m-n} T \quad ((m-n)\text{-deutig}). \end{aligned}$$

Man erhält die  $m^2$  Durchstosspunkte, indem man die  $m$  Ausdrücke für  $y'_4 : y'_1$  mit den  $m$  Ausdrücken für  $y'_4 : y'_2$  combinirt.

Die Spuren sind demnach an der Grenze ( $x_4 = 0$ ) bestimmt durch

$$1^\circ. \quad \left. \begin{aligned} \frac{y'_4}{y'_1} &= \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^{\frac{m}{n}}, \\ \frac{y'_4}{y'_2} &= \left( \frac{x_3}{x_2} \right)^{\frac{m}{n}}, \end{aligned} \right\} \text{ d. h. die } n^2 \text{ Punkte } P', \dots \quad (14a)$$

$$2^\circ. \quad \left. \begin{aligned} \frac{y'_4}{y'_1} &= \tau_{m-n} T = 0, \\ \frac{y'_4}{y'_2} &= \left( \frac{x_3}{x_2} \right)^{\frac{m}{n}}, \end{aligned} \right\} \text{ d. h. } n(m-n) \text{ mal } X_1, \dots \quad (15a)$$

$$3^\circ. \quad \left. \begin{aligned} \frac{y'_4}{y'_1} &= \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^{\frac{m}{n}}, \\ \frac{y'_4}{y'_2} &= \tau_{m-n} T = 0, \end{aligned} \right\} \text{ d. h. } n(m-n) \text{ mal } X_2, \dots \quad (16a)$$

$$4^\circ. \quad \left. \begin{aligned} \frac{y'_4}{y'_1} &= \tau_{m-n} T, \\ \frac{y'_4}{y'_2} &= \tau_{m-n} T, \end{aligned} \right\} \text{ d. h. } (m-n) \text{ mal jeder} \\ \text{der Punkte } E_{\tau_{m-n}}. \quad (17a)$$

Die  $(m-n)^2$  auf  $X_1 X_2$  liegenden, bisher noch nicht bestimmten Punkte sind also in Gruppen von  $(m-n)$  in die  $m-n$  Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$  zusammengefallen, welche gegeben sind durch

$$\left. \begin{aligned} x_1^{m-n} &= x_2^{m-n}, \\ x_3 &= x_4 = 0. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18a)$$

Von den  $m^2$  sich in  $P$  treffenden Strahlen verbinden daher  $n^2$  Geraden  $P$  mit seinen  $n^2$  Bildern  $P'$ ;  $n(m-n)$  vereinigen  $P$  mit

$X_1$ ,  $n(m-n)$   $P$  mit  $X_2$ . Die übrigen  $(m-n)^2$  Strahlen verbinden  $P$  mit den  $m-n$  Punkten  $E_{\tau_{m-n}}$  und jeder von ihnen muss  $(m-n)$ -fach gezählt werden.

Die Ebene  $\omega_\infty$  enthält demnach einen  $n(m-n)$ -fachen Strahlenbüschel mit  $X_1$  und einen  $n(m-n)$ -fachen Strahlenbüschel mit  $X_2$  als Scheitel, während sie ausserdem noch  $m-n$  Strahlenbüschel enthält, von denen jeder einen der Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$  als Scheitel hat und  $(m-n)$ -fach zu zählen ist

Die obigen Betrachtungen zusammenfassend, können wir folgendes behaupten:

*Die parabolische Congruenz hat als singuläre Ebenen:*

1°. jede Ebene  $(p, X_1)$  und  $(p, X_2)$  mit einem Strahlengebilde von der Klasse  $m$ ;

2°. jede der Ebenen  $E_{\tau_{m-n}}$  mit einem Strahlengebilde von der Klasse  $m$ ;

3°. die Ebene  $\omega_\infty$  mit  $n(m-n)$ -fachen Strahlenbüscheln in  $X_1$  und  $X_2$  und  $(m-n)$ -fachen Strahlenbüscheln in jedem der  $m-n$  Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$ .

*Ihre singulären Punkte sind*

1°.  $X_1$  und  $X_2$  mit  $n(m-n)$ -fachen Strahlenbüscheln in  $\omega_\infty$ ;

2°. die  $m-n$  Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$  mit  $(m-n)$ -fachen Strahlenbüscheln in  $\omega_\infty$ .

§ 5b. Die singulären Elementen der hyperbolischen Congruenz.

Singulär ist:

1°. jede Ebene, welche einen Congruenzstrahl  $p$  mit einem der Punkte  $X_1$  oder  $X_2$  verbindet, daher durch eine der Gleichungen (6b) dargestellt wird, eine solche Ebene, z.B.  $(p, X_1)$ , schneidet den Fokalkegel  $F_2$  in einer Kurve, deren Grad und Klasse beide  $m+n$  sind; weil die Ebene  $(p, X_1)$  den Fokalkegel  $F_1$  berührt, sind alle Tangenten jener Kurve als Congruenzstrahlen zu betrachten; die Ebene  $(p, X_1)$  enthält somit ein Strahlengebilde von der Klasse  $m+n$ ;

2°. jede der Ebenen  $\varepsilon_{\tau_{m+n}}$ , welche durch

$$x_1^{m+n} = x_2^{m+n}$$

bestimmt sind; in jeder dieser Ebenen liegt ja eine Kurve, deren Grad und Klasse beide  $m+n$  sind; diese Kurve befindet sich auf den beiden Fokalkegeln, wonach ihre Tangenten als Congruenzstrahlen zu betrachten sind; es enthält demnach jede der Ebenen  $\varepsilon_{\tau_{m+n}}$  ( $\tau_{m+n}^{m+n} = 1$ ) ein Strahlengebilde von der Klasse  $m+n$ ;

3°. die Ebenen  $\omega_\infty$  und  $\omega_0$ . Wie in § 5a wollen wir auch hier die Natur der Singularität nachher erörtern.

Wir werden alsdann finden, dass  $\omega_x$  drei Strahlenbüschel enthält, deren Scheitel in  $X_1$ ,  $X_2$  und  $X_3$  liegen, während  $\omega_0$  drei Strahlenbüschel mit  $X_1$ ,  $X_2$  und  $X_4$  als Scheitel trägt.

Singuläre Punkte sind

1°. die Punkte  $X_1$  und  $X_2$ , jede mit einem Strahlenbüschel in  $\omega_x$  und einem in  $\omega_0$ ;

2°. die Punkte  $X_3$  und  $X_4$ , bez. mit einem Strahlenbüschel in  $\omega_x$  und  $\omega_0$ .

Bei der Untersuchung der Singularität der Abbildungsebenen  $\omega_x$  und  $\omega_0$  wollen wir den Congruenzstrahl  $p$  auch hier durch die Coordinaten  $p_1'$  und  $p_2'$  seiner Spur  $P'$  in  $\omega_0$  bestimmen.

Der Strahl  $p$  hat sodann die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= p_1'^{-\frac{n}{m}} x_3 + p_1' x_4, \\ x_2 &= p_2'^{-\frac{n}{m}} x_3 + p_2' x_4, \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (12b)$$

oder

$$\left. \begin{aligned} (x_1 - p_1' x_4)^m p_1'^n &= x_3^m, \\ (x_2 - p_2' x_4)^m p_2'^n &= x_3^m. \end{aligned} \right\}$$

Setzen wir

$$p_1' = \frac{y_1'}{y_4'}, \quad p_2' = \frac{y_2'}{y_4'}$$

so folgt

$$\left. \begin{aligned} (x_1 y_4' - x_4 y_1')^m y_1'^n &= x_3^m y_4'^{m+n}, \\ (x_2 y_4' - x_4 y_2')^m y_2'^n &= x_3^m y_4'^{m+n}. \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad (13b)$$

Wenn der Punkt  $P$  ( $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_4$ ) in  $\omega_x$  liegt, wonach  $x_4 = 0$  ist, so erhalten wir die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} x_1^m y_4'^m y_1'^n &= x_3^m y_4'^{m+n}, \\ x_2^m y_4'^m y_2'^n &= x_3^m y_4'^{m+n}. \end{aligned} \right\}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} y_4'^m (x_1^m y_1'^n - x_3^m y_4'^n) &= 0, \\ y_4'^m (x_2^m y_2'^n - x_3^m y_4'^n) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Die Spuren  $P'$  sind also bestimmt durch

$$\left. \begin{aligned} x_1^m y_1'^n - x_3^m y_4'^n &= 0, \\ x_2^m y_2'^n - x_3^m y_4'^n &= 0, \end{aligned} \right\}$$

oder

$$\frac{y_1'}{y_4'} = \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{-\frac{m}{n}},$$

$$\frac{y_2'}{y_4'} = \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^{-\frac{m}{n}};$$

die  $n^2$  durch diese Gleichungen bestimmten Punkte  $P'$  sind offenbar die  $n^2$  in  $\omega_0$  liegenden Bilder  $P'$  des in  $\omega_x$  befindlichen Punktes  $P$ ; wir schliessen also, dass von den  $(m+n)^2$  Strahlen, welche sich in einem in  $\omega_x$  befindlichen Punkt  $P$  treffen,  $n^2$  den Punkt  $P$  mit seinen  $n^2$  in  $\omega_0$  liegenden Bildern  $P'$  verbinden;

2°.

$$\left. \begin{aligned} y_4'^m &= 0, \\ x_2^m y_2'^n - x_3^m y_4'^n &= 0, \end{aligned} \right\}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} y_4'^m &= 0, \\ y_2'^n &= 0; \end{aligned} \right\}$$

diese Gleichungen liefern  $mn$  mal den Punkt  $X_1$ , weshalb von den  $(m+n)^2$  durch  $P$  gehenden Strahlen  $mn$  in der Gerade  $PX_1$  vereinigt sind;

3°.

$$\left. \begin{aligned} x_1^m y_1'^n - x_3^m y_4'^n &= 0, \\ y_4'^m &= 0, \end{aligned} \right\}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} y_1'^n &= 0, \\ y_4'^m &= 0; \end{aligned} \right\}$$

Wir ersehen, dass  $mn$  Strahlen  $P$  mit  $X_2$  verbinden;

4°.

$$\left. \begin{aligned} y_4'^m &= 0, \\ y_1'^n &= 0; \end{aligned} \right\}$$

die übrigen  $m^2$  Spuren befinden sich alle auf der Gerade  $X_1X_2$ , sind jedoch noch nicht genauer bestimmt.

In der Absicht die Lage dieser letzten Punkte vollständig zu erörtern, legen wir (wie in § 5a) den Punkt  $P$  in die Nähe von  $\omega_x$ , wodurch  $x_4$  zwar nicht *null*, sondern *klein* ist. Es ist demzufolge auch  $y_4'$  klein, weshalb wir das Verhältniss  $y_4' : y_1'$  nach Potenzen von  $(x_4 : x_1)^{\frac{1}{m+n}}$  und  $y_4' : y_2'$  nach Potenzen von  $(x_4 : x_2)^{\frac{1}{m+n}}$  entwickeln werden.

Wir setzen also

$$\frac{y'_4}{y'_1} = y, \quad \frac{x_4}{x_1} = x,$$

$$\frac{1}{m+n} = \rho,$$

$$y = \alpha + \beta x^\rho + \gamma x^{2\rho} + \dots + \lambda x^{m\rho} + \dots + \sigma x + \dots$$

Die erste der Gleichungen (13b) erhält somit diese Gestalt:

$$(y - x)^m = y^{m+n} \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^m,$$

oder, nach Elimination von  $y$ ,

$$\begin{aligned} [\alpha + \beta x^\rho + \gamma x^{2\rho} + \dots + \lambda x^{m\rho} + \dots + (\sigma - 1)x + \dots]^m = \\ = [\alpha + \beta x^\rho + \gamma x^{2\rho} + \dots + \lambda x^{m\rho} + \dots + \sigma x + \dots]^{m+n} \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^m. \end{aligned}$$

Indem wir die Coefficienten der gleichen Potenzen von  $x$  einander gleich setzen, finden wir

$$\alpha^m = \alpha^{m+n} \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^m,$$

$$m\alpha^{m-1}\beta = (m+n)\alpha^{m+n-1}\beta \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^m,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\beta^m + P_1\alpha = P'_1\alpha,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$(\sigma-1)^m + P_{m+n}\alpha + Q_{m+n}\beta + \dots = \lambda^{m+n} \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^m + P'_{m+n}\alpha + Q'_{m+n}\beta + \dots$$

Diesen Bedingungen wird genügt durch

$$1^\circ. \quad 1 = \alpha^n \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^m,$$

oder

$$\alpha = \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^{-\frac{m}{n}},$$

wonach

$$y = \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^{-\frac{m}{n}} + \beta x^\rho + \gamma x^{2\rho} + \dots,$$

also für verschwindendes  $x$

$$y = \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^{-\frac{m}{n}},$$

oder

$$\frac{y_4'}{y_1'} = \left(\frac{x_3}{x_1}\right)^{-\frac{m}{n}};$$

dieser Ausdruck ist  $n$ -deutig;

$$2^\circ. \quad \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \dots \quad \lambda = 0, \dots \quad (\sigma - 1)^m = 0,$$

oder  $m$  mal:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \dots \quad \gamma = 0, \dots \quad \lambda = 0, \dots \quad \sigma = 1,$$

wonach

$$y = x,$$

oder

$$\frac{y_4'}{y_1'} = \frac{x_4}{x_1};$$

dieser eindeutige Ausdruck ist  $m$ -fach zu zählen.

In analoger Weise finden wir für das Verhältniss  $y_4' : y_2'$  zwei Ausdrücke, n.l.

$$1^\circ. \quad \frac{y_4'}{y_2'} = \left(\frac{x_3}{x_2}\right)^{-\frac{m}{n}} (n\text{-deutig}),$$

$$2^\circ. \quad \frac{y_4'}{y_2'} = \frac{x_4}{x_2} (m\text{-fach zu zählen}).$$

Die  $(m + n)^2$  Spuren werden ermittelt, indem wir die  $m + n$  Ausdrücke für  $y_4' : y_1'$  mit den  $m + n$  Ausdrücken für  $y_4' : y_2'$  combiniren.

Die Durchstosspunkte sind also an der Grenze ( $x_4 = 0$ ) bestimmt durch



$$1^\circ. \quad \left. \begin{aligned} \frac{y_4'}{y_1'} &= \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^{-\frac{m}{n}}, \\ \frac{y_4'}{y_2'} &= \left( \frac{x_3}{x_2} \right)^{-\frac{m}{n}}, \end{aligned} \right\} \text{d. h. die } n^2 \text{ Punkte } P', \dots \quad (14b)$$

$$2^\circ. \quad \left. \begin{aligned} \frac{y_4'}{y_1'} &= \frac{x_4}{x_1} = 0 \text{ (} m\text{-fach)}, \\ \frac{y_4'}{y_2'} &= \left( \frac{x_3}{x_2} \right)^{-\frac{m}{n}}, \end{aligned} \right\} \text{d. h. } mn \text{ mal } X_1, \dots \quad (15b)$$

$$3^\circ. \quad \left. \begin{aligned} \frac{y_4'}{y_1'} &= \left( \frac{x_3}{x_1} \right)^{-\frac{m}{n}}, \\ \frac{y_4'}{y_2'} &= \frac{x_4}{x_2} = 0 \text{ (} m\text{-fach)}, \end{aligned} \right\} \text{d. h. } mn \text{ mal } X_2, \dots \quad (16b)$$

$$4^\circ. \quad \begin{aligned} \frac{y_4'}{y_1'} &= \frac{x_4}{x_1} \quad (m\text{-fach}), \\ \frac{y_4'}{y_2'} &= \frac{x_4}{x_2} \quad (m\text{-fach}), \end{aligned}$$

oder

$$\frac{y_1'}{y_2'} = \frac{x_1}{x_2} \quad (m^2\text{-fach}). \quad \dots \quad (17b)$$

Die  $m^2$  auf  $X_1 X_2$  liegenden Punkte, welche bisher noch unbestimmt waren, sind offenbar alle zusammengefallen in den Punkt, wo die Gerade  $X_3 P$  die Gerade  $X_1 X_2$  trifft; sie sind also als die Spuren von  $m^2$  Strahlen zu betrachten, welche alle in der Gerade  $X_3 P$  vereinigt sind.

Von den  $(m+n)^2$  nach  $P$  zielenden Strahlen verbinden also  $n^2$  den Punkt  $P$  mit seinen  $n^2$  Bildern  $P'$ ,  $mn$   $P$  mit  $X_1$ ,  $mn$   $P$  mit  $X_2$ , während  $m^2$  Strahlen  $P$  mit  $X_3$  verbinden.

Analog können wir nachweisen, dass von den  $(m+n)^2$  Strahlen, welche sich in einem in  $\omega_0$  liegenden Punkt  $Q'$  treffen,  $m^2$  den Punkt  $Q'$  mit seinen  $m^2$  Bildern in  $\omega_\infty$ ,  $mn$   $Q'$  mit  $X_1$ ,  $mn$   $Q'$  mit  $X_2$  und  $n^2$   $Q'$  mit  $X_3$  verbinden.

Die Ebene  $\omega_\infty$  enthält, so schliessen wir, einen  $mn$ -fachen Strahlenbüschel mit  $X_1$ , einen  $mn$ -fachen Strahlenbüschel mit  $X_2$  und einen  $m^2$ -fachen Strahlenbüschel mit  $X_3$  als Scheitel.

Die Ebene  $\omega_0$  dagegen trägt einen  $mn$ -fachen Strahlenbüschel mit  $X_1$ , einen  $mn$ -fachen Strahlenbüschel mit  $X_2$  und einen  $n^2$ -fachen Strahlenbüschel mit  $X_4$  als Scheitel.

Das Obige kurz zusammenfassend, kommen wir also zu dem folgenden Resultat:

*Die hyperbolische Congruenz hat als Singuläre Ebenen:*

1°. jede Ebene  $(p, X_1)$  und  $(p, X_2)$  mit einem Strahlengebilde von der Klasse  $m + n$ ;

2°. jede der Ebenen  $\varepsilon_{\tau_{m+n}}$  mit einem Strahlengebilde von der Klasse  $m + n$ ;

3°. die Ebene  $\omega_\infty$  mit  $mn$ -fachen Strahlenbüscheln in  $X_1$  und  $X_2$  und mit einem  $m^2$ -fachen Strahlenbüschel in  $X_3$ ;

4°. die Ebene  $\omega_0$  mit  $mn$ -fachen Strahlenbüscheln in  $X_1$  und  $X_2$  und mit einem  $n^2$ -fachen Strahlenbüschel in  $X_4$ .

*Ihre singulären Punkte sind*

1°.  $X_1$  und  $X_2$ , jede mit  $mn$ -fachen Strahlenbüscheln in  $\omega_\infty$  und  $\omega_0$ ;

2°.  $X_3$  mit einem  $m^2$ -fachen Strahlenbüschel in  $\omega_\infty$ ;

3°.  $X_4$  mit einem  $n^2$ -fachen Strahlenbüschel in  $\omega_0$ .

§ 6a. Die axiale Regelfläche einer durchaus willkürlichen Gerade in der **parabolischen Congruenz**.

Wir wollen die *Axe* der Regelfläche mit  $l$ , ihre Spur in  $\omega_\infty$  mit  $A$ , ihre Spur in  $\omega_0$  mit  $B'$  bezeichnen.

Jeder Punkt von  $l$  trägt  $m^2$  Congruenzstrahlen; die Gerade  $l$  ist demnach eine  $m^2$ -fache Gerade auf ihrer axialen Regelfläche.

Jede durch  $l$  gelegte Ebene enthält noch  $mn$  Strahlen; sie hat also mit der axialen Regelfläche diese  $mn$  Geraden und ausserdem noch die  $m^2$ -fache Gerade  $l$  gemein; der Gesamtschnitt ist deshalb vom Grade  $m^2 + mn = m(m + n)$ , wonach wir zu diesem Schlusse gelangen:

*Der Grad der axialen Regelfläche einer willkürlichen Gerade in der parabolischen Congruenz ist  $m(m + n)$ .*

Die Punkte  $A$  und  $B'$  werden bez. durch

$$A \dots \frac{x_1}{x_3} = a_1, \frac{x_2}{x_3} = a_2, x_4 = 0,$$

$$B' \dots \frac{x_1}{x_4} = b'_1, \frac{x_2}{x_4} = b'_2, x_3 = 0$$

bestimmt.

Die Gerade  $l$  bekommt alsdann die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 x_3 + b_1' x_4, \\ x_2 &= a_2 x_3 + b_2' x_4. \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Ein durch

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= p_1 x_3 + p_1^{\frac{m}{n}} x_4, \\ x_2 &= p_2 x_3 + p_2^{\frac{m}{n}} x_4 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6a)$$

gegebener Congruenzstrahl  $p$  schneidet  $l$ , falls er in der Ebene

$$\lambda_1 (x_1 - a_1 x_3 - b_1' x_4) + \lambda_2 (x_2 - a_2 x_3 - b_2' x_4) = 0 \quad (19)$$

liegt. Es sollen also  $p_1$  und  $p_2$  den folgenden Bedingungen Genüge leisten:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 (p_1 - a_1) + \lambda_2 (p_2 - a_2) &= 0, \\ \lambda_1 (p_1^{\frac{m}{n}} - b_1') + \lambda_2 (p_2^{\frac{m}{n}} - b_2') &= 0, \end{aligned} \right\}$$

aus denen, durch Elimination von  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , die Beziehung

$$\frac{p_1^{\frac{m}{n}} - b_1'}{p_1 - a_1} = \frac{p_2^{\frac{m}{n}} - b_2'}{p_2 - a_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20a)$$

hervorgeht.

Die Gleichung der axialen Regelfläche ergibt sich, indem man  $p_1$  und  $p_2$  aus den beiden Gleichungen (6a) und aus der Gleichung (20a) eliminirt.

Die Gleichung (20a) stellt, wenn  $p_1$  und  $p_2$  bez. durch  $x_1 : x_3$  und  $x_2 : x_3$  ersetzt sind, auch den geometrischen Ort derjenigen Punkte in  $\omega_\infty$  dar, durch welche Strahlen gehen, die  $l$  schneiden. Dieser Ort bildet demnach einen Bestandteil des Schnittes von  $\omega_\infty$  mit der axialen Regelfläche.

Für (20a) lässt sich auch schreiben:

$$(p_2 - a_2) p_1^{\frac{m}{n}} - (p_1 - a_1) p_2^{\frac{m}{n}} + b_2' p_1 - b_1' p_2 - (a_1 b_2' - a_2 b_1') = 0. \quad (21a)$$

Wir ändern das Coordinatendreieck zuerst in der Weise ab, dass die Ecke  $X_3$  nach  $A$  ( $x_1 = a_1 x_3$ ,  $x_2 = a_2 x_3$ ) verlegt wird. Solches geschieht mittels der folgenden Transformationsformeln:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \xi_1 + a_1 \xi_3, \\ x_2 &= \xi_2 + a_2 \xi_3, \\ x_3 &= \xi_3. \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$



Die höchste hierin vorkommende Potenz von  $\xi_1$  ist  $\xi_1^{\frac{m}{n}}$  (weil  $m > n$ ). Der Coefficient von  $\xi_1^{\frac{m}{n}}$  ist  $\xi_2$ . Es enthält also in der rationalen Gleichung der Coefficient der höchsten ( $m$ ten) Potenz von  $\xi_1$  den Faktor  $\xi_2^{n^2}$ . Wir schliessen daher, dass die Tangenten in  $X_1$  durch

$$\xi_2^{n^2} = 0$$

angewiesen sind, und kommen also zu der Einsicht, dass  $X_1$  ein  $n^2$ -facher Punkt ist, dessen sämtliche Tangenten in die Gerade  $AX_1$  zusammengefallen sind.

In derselben Weise lässt sich zeigen, dass  $X_2$  ein  $n^2$ -facher Punkt ist, dessen Tangenten alle in  $AX_2$  vereinigt sind.

Die Schnittpunkte mit  $X_1 X_2$  ( $\xi_3 = 0$ ) ergeben sich (siehe III. Abschnitt) aus

$$\xi_2 \xi_2^{\frac{m}{n}} - \xi_1 \xi_2^{\frac{m}{n}} = 0,$$

oder

$$\xi_2^n \xi_1^m - \xi_1^n \xi_2^m = 0,$$

oder

$$\xi_1^n \xi_2^n (\xi_1^{m-n} - \xi_2^{m-n}) = 0,$$

also in der rationalen Gleichung aus

$$\xi_1^{n^2} \xi_2^{n^2} (\xi_1^{m-n} - \xi_2^{m-n})^n = 0.$$

Hieraus folgern wir, dass die Kurve die Gerade  $X_1 X_2$  schneidet:  $n^2$  mal in dem ( $n^2$ -fachen) Punkte  $X_1$ ,  $n^2$  mal in dem ( $n^2$ -fachen) Punkte  $X_2$  und  $n$  mal in jedem der  $m - n$  Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$ .

Bevor wir die Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$  untersuchen, wollen wir uns zuerst mit dem Punkte  $A$  ( $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_2 = 0$ ) beschäftigen. Die höchste Potenz von  $\xi_3$  in (26a) ist  $\xi_3^{\frac{m}{n}}$ . Der Coefficient von  $\xi_3^{\frac{m}{n}}$  ist

$$a_1^{\frac{m}{n}} \xi_2 - a_2^{\frac{m}{n}} \xi_1 + b_2' \xi_1 - b_1' \xi_2.$$

Die Tangenten in  $A$  werden also durch

$$a_1^{\frac{m}{n}} \xi_2 - a_2^{\frac{m}{n}} \xi_1 + b_2' \xi_1 - b_1' \xi_2 = 0,$$

oder durch

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{a_1^{\frac{m}{n}} - b_1'}{a_2^{\frac{m}{n}} - b_2'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27a)$$

bestimmt.

Wenn wir das Coordinatentetraeder  $X_1 X_2 X_3 X_4$  durch das Tetraeder  $X_1 X_2 AB'$  ersetzen, und zwar mittels der Formeln

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \xi_1 + a_1 \xi_3 + b_1' \xi_4, \\ x_2 &= \xi_2 + a_2 \xi_3 + b_2' \xi_4, \\ x_3 &= \xi_3, \\ x_4 &= \xi_4, \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

so wird die Gerade  $l$  durch

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= 0, \\ \xi_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

dargestellt.

Die Gleichung (27a) liefert sodann die Ebenen, welche  $l$  mit den in  $A$  an der Kurve in  $\omega_\infty$  gelegten Tangenten verbinden; die nämliche Gleichung (27a) weist auch die Spuren dieser Ebenen in  $\omega_0$  an. Wir beachten nun, dass diese Spuren durch die Punkte gehen, welche gegeben sind durch

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= (a_1^{\frac{m}{n}} - b_1') \xi_4, \\ \xi_2 &= (a_2^{\frac{m}{n}} - b_2') \xi_4, \end{aligned} \right\}$$

oder, wenn wir zu dem ursprünglichen Coordinatensysteme zurückkehren, durch

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1^{\frac{m}{n}} x_4, \\ x_2 &= a_2^{\frac{m}{n}} x_4, \end{aligned} \right\}$$

oder

$$\frac{x_1}{x_4} = a_1^{\frac{m}{n}}, \quad \frac{x_2}{x_4} = a_2^{\frac{m}{n}}.$$

Es erhellt aus dieser Form, dass diese Punkte mit den  $n^2$  in  $\omega_0$  liegenden Bildern  $A'$  des in  $\omega_\infty$  liegenden Punktes  $A$  identisch sind.

Die durch (27a) dargestellten Ebenen vereinigen daher  $l$  mit den  $n^2$  Punkten  $A'$ , wonach wir die in  $A$  an die Kurve in  $\omega_\infty$  gelegten

Tangenten als die *axialen Projektionen* aus  $l$  auf  $\omega_x$  der  $n^2$  Bilder  $A'$  von  $A$  betrachten können.

Das hiermit gewonnene Resultat lautet deshalb:

*Der Punkt  $A$  ist ein  $n^2$ -facher Punkt der Kurve in  $\omega_x$ . Seine Tangenten sind die axialen Projektionen aus  $l$  auf  $\omega_x$  der  $n^2$  in  $\omega_0$  liegenden Bilder  $A'$  von  $A$ .*

Dieses Resultat würde sich in geometrischer Weise ergeben haben durch die Überlegung, dass die Berührungsebenen an den Blättern der Fläche, welche sich in  $l$  durchsetzen, durch diejenige Congruenzstrahlen bestimmt werden, welche nach dem Berührungspunkte zielen.

Wir wenden uns jetzt den Punkten  $E_{\tau_{m-n}}$  zu. Weil diese Punkte alle dieselben Eigenschaften haben, so genügt es einen von ihnen zu untersuchen; dieser Punkt werde mit  $E_\tau$  bezeichnet, und habe die Coordinaten  $x_2 = \tau x_1$ ,  $x_3 = 0$  oder  $\xi_2 = \tau \xi_1$ ,  $\xi_3 = 0$ .

Zuerst verlegen wir die Ecke  $X_1$  in  $E_\tau$  mittels der Formel

$$\xi_2 = \tau \xi_1 + \xi'_2.$$

Die Gleichung (26a) verwandelt sich somit in

$$\begin{aligned} (\tau \xi_1 + \xi'_2)(\xi_1 + a_1 \xi_3)^{\frac{m}{n}} - \xi_1 (\tau \xi_1 + \xi'_2 + a_2 \xi_3)^{\frac{m}{n}} + \\ + (b'_2 \xi_1 - b'_1 \tau \xi_1 - b'_1 \xi'_2) \xi_3^{\frac{m}{n}} = 0. \quad . \quad . \quad (29a) \end{aligned}$$

Der Punkt  $E_\tau$  ist jetzt durch

$$\xi'_2 = 0, \xi_3 = 0,$$

gegeben; wir haben demnach die höchste Potenz von  $\xi_1$ , d. h.

$\xi_1^{\frac{m}{n}+1}$  zu betrachten. Der Faktor von  $\xi_1^{\frac{m}{n}+1}$  ist  $\tau - \tau^{\frac{m}{n}} = \tau(1 - \tau^{\frac{m-n}{n}}) = 0$ , und verschwindet also, wenn  $\tau^{\frac{m-n}{n}} = 1$ . Wir müssen daher die Gleichung rational machen, oder wenigstens einige der gebrochenen Exponenten vertreiben. Wir schreiben sie dazu folgendermassen:

$$\xi_1(\tau \xi_1 + \xi'_2 + a_2 \xi_3)^{\frac{m}{n}} = (\tau \xi_1 + \xi'_2)(\xi_1 + a_1 \xi_3)^{\frac{m}{n}} + (b'_2 - b'_1 \tau) \xi_1 - b'_1 \xi'_2 \xi_3^{\frac{m}{n}}$$

und potenziren nun mit  $n$ . Es folgt dann

$$\begin{aligned} \xi_1^n (\tau \xi_1 + \xi'_2 + a_2 \xi_3)^m &= (\tau \xi_1 + \xi'_2)^n (\xi_1 + a_1 \xi_3)^m + \\ &+ n(\tau \xi_1 + \xi'_2)^{n-1} (\xi_1 + a_1 \xi_3)^{\frac{m(n-1)}{n}} (b'_2 - b'_1 \tau) \xi_1 - b'_1 \xi'_2 \xi_3^{\frac{m}{n}} + \\ &+ \dots + (b'_2 - b'_1 \tau) \xi_1 - b'_1 \xi'_2 \xi_3^m, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} & \xi_1^n \{ \tau^m \xi_1^m + m \tau^{m-1} \xi_1^{m-1} (\xi_2' + a_2 \xi_3) + \dots \} = \\ & = \{ \tau^n \xi_1^n + n \tau^{n-1} \xi_1^{n-1} \xi_2' + \dots \} \{ \xi_1^m + m \xi_1^{m-1} a_1 \xi_3 + \dots \} + \\ & + n \{ \tau^{n-1} \xi_1^{n-1} + (n-1) \tau^{n-2} \xi_1^{n-2} \xi_2' + \dots \} \{ \xi_1^{m-\frac{m}{n}} + \dots \} \times \\ & \times \{ (b_2' - b_1' \tau) \xi_1 - b_1' \xi_2' \} \xi_3^{\frac{m}{n}} + \dots \quad (30a) \end{aligned}$$

Die höchste Potenz von  $\xi_1$  ist nun scheinbar  $\xi_1^{m+n}$ . Wenn aber die Gleichung auf Null reducirt wird, ist der Coefficient von  $\xi_1^{m+n}$

$$\tau^m - \tau^n = \tau^n (\tau^{m-n} - 1) = 0.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass die höchste Potenz von  $\xi_1$  tatsächlich nicht  $\xi_1^{m+n}$  sondern  $\xi_1^{m+n-1}$  ist (es ist ja  $m + n - 1 > m + n - \frac{m}{n}$ ,

weil  $\frac{m}{n} > 1$ ).

Der Faktor von  $\xi_1^{m+n-1}$  in der auf Null reducirten Gleichung ist jetzt

$$\begin{aligned} & m \tau^{m-1} (\xi_2' + a_2 \xi_3) - m \tau^n a_1 \xi_3 - n \tau^{n-1} \xi_2' = \\ & = \tau^{n-1} \{ m \tau^{m-n} (\xi_2' + a_2 \xi_3) - m \tau a_1 \xi_3 - n \xi_2' \} = \\ & = \tau^{n-1} \{ m (\xi_2' + a_2 \xi_3) - m \tau a_1 \xi_3 - n \xi_2' \}. \end{aligned}$$

Die Tangenten in  $E_\tau$  sind demnach bestimmt durch

$$m (\xi_2' + a_2 \xi_3) - m \tau a_1 \xi_3 - n \xi_2' = 0,$$

oder

$$\xi_2' = \frac{m (\tau a_1 - a_2)}{m - n} \xi_3,$$

also im ursprünglichen Coordinatensystem durch

$$\xi_2 - \tau \xi_1 = \frac{m (\tau a_1 - a_2)}{m - n} \xi_3,$$

oder

$$(m - n) (\tau \xi_1 - \xi_2) + m (\tau a_1 - a_2) \xi_3 = 0. \quad (31a)$$

Hätten wir die Gleichung gänzlich rational gemacht, so würde der Grad  $n(m + n)$  geworden sein und nicht  $m + n$ , wie die Gleichung (30a) zeigt, aus welcher wir die Tangente (31a) bestimmt haben. Die vollständig rational gemachte Gleichung würde deshalb für die Tangenten in  $E_\tau$



$$[(m-n)(\tau\xi_1 - \xi_2) + m(\tau a_1 - a_2)\xi_3]^n = 0$$

geliefert haben. Wir schliessen demnach, dass der Punkt  $E_\tau$  ein  $n$ -facher Punkt ist, dessen sämtliche Tangenten zusammengefallen sind in die Gerade, welche durch die Gleichung (31a) dargestellt wird.

Diese Gerade enthält offenbar den Punkt  $T$ , wofür

$$\begin{aligned} (m-n)\xi_1 + ma_1\xi_3 &= 0, \\ (m-n)\xi_2 + ma_2\xi_3 &= 0, \end{aligned}$$

oder

$$\frac{\xi_1}{ma_1} = \frac{\xi_2}{ma_2} = \frac{\xi_3}{-(m-n)}. \quad (32a)$$

Dieser Punkt  $T$  erscheint unabhängig von  $\tau$ ; er liegt daher auf der Tangente jedes Punktes  $E_\tau$ . Ausserdem befindet er sich auf der Gerade

$$\frac{\xi_1}{a_1} = \frac{\xi_2}{a_2},$$

d. h. der Gerade  $X_3 A$ .

Wir können somit den Punkt  $T$  bestimmen als den Schnittpunkt der Gerade  $X_3 A$  mit der Tangente in einem der Punkte  $E_\tau$ , z. B. im Punkte  $E_1$ , der durch  $\tau = \tau_{m-n} = 1$ , also durch  $x_1 = x_2$  angewiesen ist.

Die Tangente in  $E_1$  hat die Gleichung

$$(m-n)(\xi_1 - \xi_2) + m(a_1 - a_2)\xi_3 = 0. \quad (33a)$$

Indem wir die letzten Resultaten zusammenfassen, können wir den folgenden Satz aussprechen:

*Die  $m-n$  Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$  sind alle  $n$ -fache Punkte, von denen jeder  $n$  zusammenfallende Tangenten besitzt. Diese Tangenten verbinden die Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$  mit dem Punkte  $T$ , welcher sich im Schnittpunkte von  $X_3 A$  mit der Tangente (33a) in  $E_1$  ( $x_1 = x_2$ ) befindet.*

Zum Überflusse bemerken wir noch, dass der Punkt  $X_3$  nicht auf der Kurve liegt (siehe (21a)).

Wir wollen jetzt den Schnitt der axialen Regelfläche mit  $\omega_0$  betrachten.

Indem wir die Spur  $P'$  eines Congruenzstrahles  $p$  in  $\omega_0$  durch

$$p_1' = \frac{x_1}{x_4}, \quad p_2' = \frac{x_2}{x_4}$$

anweisen, so wird der Congruenzstrahl durch

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= p_1'^{\frac{n}{m}} x_3 + p_1' x_4, \\ x_2 &= p_1'^{\frac{n}{m}} x_3 + p_2' x_4, \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34a)$$

bestimmt. Dieser Strahl wird sich in der durch  $l$  gelegten Ebene (19a) befinden, wenn den Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 (p_1'^{\frac{n}{m}} - a_1) + \lambda_2 (p_2'^{\frac{n}{m}} - a_2) &= 0, \\ \lambda_1 (p_1' - b_1') + \lambda_2 (p_2' - b_2') &= 0, \end{aligned} \right\}$$

also (nach Elimination von  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ ) der Bedingung

$$\frac{p_1'^{\frac{n}{m}} - a_1}{p_1' - b_1'} = \frac{p_2'^{\frac{n}{m}} - a_2}{p_2' - b_2'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35a)$$

genügt wird.

Wenn man nun  $p_1'$  durch  $x_1 : x_4$  und  $p_2'$  durch  $x_2 : x_4$  ersetzt, so bekommt man die Gleichung des Ortes der Spuren der Congruenzstrahlen, welche  $l$  schneiden. Dieser Ort ist somit ein Bestandteil des Schnittes von  $\omega_0$  mit der axialen Regelfläche.

Wir verlegen jetzt die Ecke  $X_4$  des Coordinatendreiecks in die Spur  $B$  von  $l$  ( $x_1 = b_1' x_4$ ,  $x_2 = b_2' x_4$ ), benutzen also die Transformation

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \xi_1 + b_1' \xi_4, \\ x_2 &= \xi_2 + b_2' \xi_4, \\ x_4 &= \xi_4. \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Überdies setzen wir

$$\frac{\xi_1}{\xi_4} = \pi_1', \quad \frac{\xi_2}{\xi_4} = \pi_2', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

woraus sich ergibt

$$\left. \begin{aligned} p_1' &= \pi_1' + b_1', \\ p_2' &= \pi_2' + b_2'. \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Indem wir diese Ausdrücke in (35a) substituieren, finden wir

$$\frac{(\pi_1' + b_1')^{\frac{n}{m}} - a_1}{\pi_1'} = \frac{(\pi_2' + b_2')^{\frac{n}{m}} - a_2}{\pi_2'},$$

oder

$$\pi_2'(\pi_1' + b_1')^{\frac{n}{m}} - \pi_1'(\pi_2' + b_2')^{\frac{n}{m}} + a_2 \pi_1' - a_1 \pi_2' = 0. \quad (39a)$$

Wir ersetzen nun  $\pi_1'$  und  $\pi_2'$  durch ihre Werte (37) und gelangen sodann zu

$$\xi_2(\xi_1 + b_1' \xi_4)^{\frac{n}{m}} - \xi_1(\xi_2 + b_2' \xi_4)^{\frac{n}{m}} + (a_2 \xi_1 - a_1 \xi_2) \xi_4^{\frac{n}{m}} = 0. \quad (40a)$$

Diese Gleichung bekommt nach vollständiger Rationalisirung den Grad  $m(m+n)$ , wonach der oben erwähnte Ort vom Grade  $m(m+n)$  ist, also von demselben Grade wie die axiale Regelfläche. Hieraus geht hervor, dass der Schnitt der axialen Regelfläche mit  $\omega_0$  nur aus der genannten, durch (40a) dargestellten Kurve besteht.

Die höchste Potenz von  $\xi_1$  ist  $\xi_1^4$ ; indem man ihren Faktor gleich Null setzt, erhält man

$$(\xi_2 + b_2' \xi_4)^{\frac{n}{m}} - a_2 \xi_4^{\frac{n}{m}} = 0,$$

oder

$$(\xi_2 + b_2' \xi_4)^n = a_2^m \xi_4^n.$$

Die völlig ausgearbeitete Gleichung würde also für die Tangenten in  $X_1$

$$\{(\xi_2 + b_2' \xi_4)^n - a_2^m \xi_4^n\}^m = 0$$

gegeben haben. Wir ersehen, dass  $X_1$  hier ein  $mn$ -facher Punkt ist, von dessen Tangenten je  $m$  in einer der  $n$  Geraden zusammengefallen sind, welche dargestellt werden durch

$$(\xi_2 + b_2' \xi_4)^n - a_2^m \xi_4^n = 0,$$

oder

$$\xi_2 + b_2' \xi_4 = a_2^{\frac{m}{n}} \xi_4,$$

also im alten Coordinatensysteme durch

$$x_2 = a_2^{\frac{m}{n}} x_4. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41a)$$

Es sind diese Tangenten offenbar die  $n$  Geraden, welche  $X_1$  mit den  $n^2$  Bildern  $A'$  von  $A$  verbinden.

Die obigen Betrachtungen gestatten uns Folgendes zu behaupten:

*Der Schnitt der axialen Regelfläche mit  $\omega_0$  hat in  $X_1$  einen  $mn$ -fachen Punkt, in dem je  $m$  Tangenten zusammengefallen sind mit*

einer der  $n$  Geraden, welche  $X_1$  mit den  $n^2$  Bildern  $A'$  der Spur  $A$  von  $l$  in  $\omega_\infty$  verbinden.

Dasselbe gilt in Bezug auf  $X_2$ .

Die höchste Potenz von  $\xi_4$  ist  $\xi_4^{\frac{n}{m}}$ . Indem wir ihren Coefficient verschwinden lassen, finden wir für die Tangente in  $B'$ :

$$b_1^{\frac{n}{m}} \xi_1 - b_2^{\frac{n}{m}} \xi_2 + a_2 \xi_1 - a_1 \xi_2 = 0,$$

oder

$$\frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{b_1^{\frac{n}{m}} - a_1}{b_2^{\frac{n}{m}} - a_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42a)$$

In Bezug auf das Coordinatentetraeder  $X_1 X_2 AB'$  wird  $l$  durch  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_2 = 0$  angewiesen und stellt (42a) die Ebene dar, welche die Tangente in  $B'$  mit  $l$  verbindet, und auch die Gerade, in welcher diese Ebene die Abbildungsebene  $\omega_\infty$  schneidet.

Diese letzte Gerade geht offenbar durch den Punkt

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 + a_1 \xi_3 &= b_1^{\frac{n}{m}} \xi_3, \\ \xi_2 + a_2 \xi_3 &= b_2^{\frac{n}{m}} \xi_3, \end{aligned} \right\}$$

welcher in den ursprünglichen Coordinaten durch

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= b_1^{\frac{n}{m}} x_3, \\ x_2 &= b_2^{\frac{n}{m}} x_3 \end{aligned} \right\}$$

dargestellt wird.

Es vertreten diese beiden  $m$ -deutigen Gleichungen zusammen die  $m^2$  Punkte  $B$ , in welche der in  $\omega_0$  liegende Punkt  $B'$  auf  $\omega_\infty$  abgebildet wird. Wir gelangen somit zu der Einsicht, dass der Punkt  $B'$  der Schnittkurve mit  $\omega_\infty$  ein  $m^2$ -facher Punkt ist, dessen Tangenten die axiale Projektionen aus  $l$  auf  $\omega_0$  der  $m^2$  Bilder  $B$  sind, welche in  $\omega_\infty$  dem Punkte  $B'$  entsprechen.

Die Gerade  $X_1 X_2$  schneidet die Kurve in den Punkten, welche bestimmt sind durch

$$\xi_2 \xi_1^{\frac{m}{n}} - \xi_1 \xi_2^{\frac{m}{n}} = 0,$$

oder

$$\xi_1^n \xi_2^n (\xi_1^{m-n} - \xi_2^{m-n}) = 0,$$

also in der rationalen Gleichung durch

$$\xi_1^{mn} \xi_2^{mn} (\xi_1^{m-n} - \xi_2^{m-n})^m = 0.$$

Die in  $\omega_0$  befindliche Kurve schneidet daher  $X_1 X_2$   $mn$  mal im  $(mn$ -fachen) Punkte  $X_1$ ,  $mn$  mal im  $(mn$ -fachen) Punkte  $X_2$  und  $m$  mal in jedem der Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$ .

Die Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$  werden auch hier untersucht, indem man  $X_1$  in einen dieser Punkte, nl.  $E_{\tau}$  (bestimmt durch  $\xi_2 = \tau \xi_1$ ) verlegt, und zwar mittels der Formel

$$\xi_2 = \tau \xi_1 + \xi_2'.$$

Die Gleichung (40a) bekommt alsdann diese Gestalt:

$$\begin{aligned} (\tau \xi_1 + \xi_2') (\xi_1 + b_1' \xi_1)^{\frac{n}{m}} - \xi_1 (\tau \xi_1 + \xi_2' + b_2' \xi_1)^{\frac{n}{m}} + \\ + \{ (a_2 - \tau a_1) \xi_1 - a_1 \xi_2' \} \xi_1^{\frac{n}{m}} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (43a) \end{aligned}$$

Der Punkt  $E_{\tau}$  ist jetzt durch

$$\xi_2' = 0, \xi_4 = 0$$

bestimmt. Wir haben demnach die höchste Potenz von  $\xi_1$ , d. h.  $\xi_1^{1+\frac{n}{m}}$  zu betrachten. Ihr Coefficient ist  $\tau - \tau^{\frac{n}{m}} = \tau^{\frac{n}{m}} (\tau^{\frac{m-n}{m}} - 1)$ , kann, vermöge  $\tau^{m-n} = 1$ , also Null sein. Wir sind daher genötigt die Gleichung (34a) umzuformen, und schreiben

$$\xi_1 (\tau \xi_1 + \xi_2' + b_2' \xi_1)^{\frac{n}{m}} = (\tau \xi_1 + \xi_2') (\xi_1 + b_1' \xi_1)^{\frac{n}{m}} + \{ (a_2 - a_1 \tau) \xi_1 - a_1 \xi_2' \} \xi_1^{\frac{n}{m}}.$$

Wir potenzieren beide Seiten mit  $m$  und erhalten

$$\begin{aligned} \xi_1^m (\tau \xi_1 + \xi_2' + b_2' \xi_1)^n = (\tau \xi_1 + \xi_2')^m (\xi_1 + b_1' \xi_1)^n + \\ + m (\tau \xi_1 + \xi_2')^{m-1} (\xi_1 + b_1' \xi_1)^{\frac{n(m-1)}{m}} \{ (a_2 - a_1 \tau) \xi_1 - a_1 \xi_2' \} \xi_1^{\frac{n}{m}} + \\ + \dots + \{ (a_2 - a_1 \tau) \xi_1 - a_1 \xi_2' \}^m \xi_1^n, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \xi_1^m \{ \tau^n \xi_1^n + n \tau^{n-1} \xi_1^{n-1} (\xi_2' + b_2' \xi_1) + \dots \} = \\ = \{ \tau^m \xi_1^m + m \tau^{m-1} \xi_2' + \dots \} \{ \xi_1^n + n \xi_1^{n-1} b_1' \xi_1 + \dots \} + \\ + m \{ \tau^{m-1} \xi_1^{m-1} + (m-1) \tau^{m-2} \xi_1^{m-2} \xi_2' + \dots \} \times \\ \times \{ \xi_1^{\frac{n}{m}} + \dots \} \{ (a_2 - a_1 \tau) \xi_1 - a_1 \xi_2' \} \xi_1^{\frac{n}{m}} + \dots \quad . \quad . \quad . \quad (44a) \end{aligned}$$

Der Coefficient der höchsten Potenz von  $\xi_1$  ( $\xi_1^{m+n}$ ) ist, wenn die Gleichung auf Null reducirt wird,

$$\tau^n - \tau^m = \tau^n (1 - \tau^{m-n}) = 0.$$

Tatsächlich ist also die höchste Potenz nicht  $\xi_1^{m+n}$  sondern  $\xi_1^{m+n-\frac{n}{m}}$  (es ist ja  $m + n - \frac{n}{m} > m + n - 1$ , da  $\frac{n}{m} < 1$ ).

Der Coefficient von  $\xi_1^{m+n-\frac{n}{m}}$  ist

$$\xi_4^{\frac{n}{m}},$$

es werden also in der rationalen Gleichung die Tangenten in  $E_\tau$  durch

$$\xi_4^n = 0$$

angewiesen.

Es erhellt, dass  $E_\tau$  ein  $n$ -facher Punkt ist. Da  $X_1 X_2$  in  $E_\tau$   $m$  Punkte mit der Kurve gemein hat, so ist es klar, dass die  $n$  Tangenten in  $E_\tau$  alle in  $X_1 X_2$  vereinigt sind und in  $E_\tau$   $m$  Punkte mit der Kurve gemein haben.

Wir gelangen also zu diesem Satz:

*Die Kurve, in welcher die axiale Regelfläche die Ebene  $\omega_0$  schneidet, hat in jedem der Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$  einen  $n$ -fachen Punkt, dessen sämtliche Tangenten in  $X_1 X_2$  vereinigt sind. Die Tangente  $X_1 X_2$  hat in jedem der Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$   $m$  Punkte mit der Kurve gemein.*

Auch hier bemerken wir beiläufig, dass der Punkt  $X_4$  sich nicht auf der Kurve befindet.

Wir wollen jetzt die Punkte  $X_1$  und  $X_2$  als Punkte der Fläche etwas näher betrachten.

Die in der Nähe von  $X_1$  auf der Regelfläche liegenden Punkte gehören den Congruenzstrahlen an, welche  $\omega_0$  in der Nähe von  $X_1$  schneiden. Diese Congruenzstrahlen stützen sich deshalb auf  $l$  in der Nähe ihrer Spur  $A$  in  $\omega_x$ .

Die nach einem Punkte  $X$  ( $x_1, x_2, x_3, x_4$ ) zielenden Congruenzstrahlen werden durch die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= p_1^{\frac{n}{m}} x_3 + p_1' x_4, \\ x_2 &= p_2^{\frac{n}{m}} x_3 + p_2' x_4 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (34a)$$

bestimmt.

Die erste dieser Gleichungen liefert  $m$  Werte für  $p_1$ , d.h.  $m$

Geraden in  $\omega_0$  durch  $X_2$ , auf welchen die Spuren  $P'$  der Strahlen  $p$  liegen müssen; jeder Wert von  $p_1'$  bestimmt daher eine Ebene durch  $X$  und  $X_2$ , in welcher ein durch  $X$  gehender Strahl  $p$  liegen muss.

Die  $m$  Werte  $p_2'$ , welche aus der zweiten Gleichung (34a) folgen, bestimmen ebenfalls  $m$  Ebenen durch  $X$  und  $X_1$ , welche einen solchen Strahl  $p$  tragen.

Wenn  $X$  in  $\omega_\infty$  liegt, hat man  $x_4 = 0$ , wonach die erste Gleichung (34a) oder

$$(x_1 - p_1' x_4)^m - p_1'^n x_3^m = 0$$

sich verwandelt in

$$x_3^m p_1'^n - x_1^m = 0.$$

Es sind also  $m - n$  Werte von  $p_1'$  unendlich gross geworden; von den  $m$  durch  $X_1 X_2$  gelegten Ebenen sind daher  $m - n$  mit  $\omega_\infty$  zusammengefallen. Die übrigen  $n$  Ebenen verbinden  $X_2$  mit den  $n^2$  nach  $X$  in  $\omega_\infty$  zielenden Congruenzstrahlen.

Wenn  $X$  mit  $A$  identisch ist, so sind diese  $n$  Ebenen durch

$$(x_1 - a_1 x_3)^n - a_1^m x_4^n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (45a)$$

bestimmt.

Nehmen wir nun  $X$  in der Nähe von  $A$  an, so werden die  $n$  Ebenen nur wenig von der  $n$  Ebenen (45a) verschieden sein, während die übrigen  $m - n$  Ebenen beinahe mit  $\omega_\infty$  coincidiren.

Die Congruenzstrahlen, welche nahe bei  $X_2$  ausmünden und demnach die Berührungsebenen in  $X_2$  an der Regelfläche bestimmen, befinden sich also an der Grenze ( $X \equiv A$ ) in den Ebenen (45a).

Wir ziehen hieraus den Schluss, dass die Berührungsebenen in  $X_2$  an der Regelfläche durch (45a) dargestellt werden; analog lässt sich zeigen, dass den Berührungsebenen in  $X_2$  die Gleichungen

$$(x_2 - a_2 x_3)^n - a_2^m x_4^n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (46a)$$

zukommen.

In dem Schnitte der Regelfläche mit  $\omega_0$  sind  $X_1$  und  $X_2$  beide  $mn$ -fache Punkte. Da die Ebene  $\omega_0$  nicht singulär ist, so wird der Schnitt  $\omega_0$  nicht wesentlich von dem Schnitt in irgend einer anderen durch  $X_1 X_2$  gelegten Ebene ( $x_3 = \mu x_4$ ) verschieden sein. Jeder Schnitt mit einer Ebene  $x_3 = \mu x_4$  hat also in  $X_1$  und  $X_2$   $mn$ -fache Punkte, weshalb  $X_1$  und  $X_2$  auch  $mn$ -fache Punkte der Regelfläche sind. Der Tangentenkegel von  $X_1$ , welcher vom Grade

$mn$  sein muss, ist in  $mn$  Ebenen ausgeartet, von denen je  $m$  mit einer der  $n$  Ebenen (46a) coincidiren. Der Tangentenkegel von  $X_2$ , vom Grade  $mn$ , besteht aus  $mn$  Ebenen, von denen je  $m$  mit einer der Ebenen (45a) zusammenfallen.

Wir sind also zu den folgenden Satz gelangt:

*In der parabolischen Congruenz sind auf der axialen Regelfläche einer willkürlichen Gerade  $X_1$  und  $X_2$  beide  $mn$ -fache Punkte. Die Tangenten in  $X_1$  befinden sich in  $mn$  Ebenen, von denen je  $m$  in einer der  $n$  Ebenen (46a) vereinigt sind, während die Tangenten in  $X_2$  in  $mn$  Ebenen liegen, von denen je  $m$  in einer der  $n$  Ebenen (45a) vereinigt sind.*

Die Ebenen (46a) schneiden  $\omega_0$  in den Geraden

$$x_2^n - a_2^m x_4^n = 0,$$

in denen wir die Tangenten in  $X_1$  an der Durchschnittskurve erkennen.

Dieselben Ebenen durchdringen dagegen  $\omega_0$  in den Geraden

$$(x_2 - a_2 x_3)^n = 0.$$

Diese Geraden sind alle in  $AX_1$  vereinigt, welche Gerade die einzige Tangente in  $X_1$  an der Durchschnittsfigur war.

Die Kurve in  $\omega_\infty$  hatte in  $X_1$  einen  $n^2$ -fachen Punkt. Ausserdem enthielt der Gesamtschnitt noch  $n(m - n)$  mal die Gerade  $AX_1$ , sodass  $X_1$  in Bezug auf den Gesamtschnitt als ein  $n^2 + n(m - n) = mn$ -facher Punkt zu betrachten ist.

Es gelten diese letzten Ergebnisse natürlich auch c.p. für  $X_2$ .

Wir werden nun die Punkte  $E_{\tau^{m-n}}$  betrachten.

Diese Untersuchung soll nur mit einem dieser Punkte, n.l. mit dem Punkte  $E_\tau$ , vorgenommen werden.

Da die Congruenzstrahlen, welche in  $E_\tau$  ausmünden, dem Punkte  $A$  entspringen, so haben wir aufzufinden, wo die Congruenzstrahlen, welche einem nahe an  $A$  liegenden Punkte  $Y$  entstammen, eine durch  $X_1 X_2$  gelegte Ebene  $x_3 = \mu x_4$  treffen.

Es seien  $X(x_1, x_2, x_3, x_4)$  und  $Y(y_1, y_2, y_3, y_4)$  zwei Punkte des Congruenzstrahles  $p$ ; so bestehen die folgenden Gleichungen:

$$x_1 - p_1 x_3 = p_1^{\frac{m}{n}} x_4, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47a)$$

$$x_2 - p_2 x_3 = p_2^{\frac{m}{n}} x_4, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48a)$$

$$y_1 - p_1 y_3 = p_1^{\frac{m}{n}} y_4, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49a)$$



$$y_2 - p_2 y_3 = p_2^{\frac{m}{n}} y_4. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50a)$$

Aus (47a) und (49a) finden wir

$$\frac{x_1 - p_1 x_3}{x_4} = \frac{y_1 - p_1 y_3}{y_4},$$

wonach

$$p_1 = \frac{x_1 y_4 - x_4 y_1}{x_3 y_4 - x_4 y_3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51a)$$

und

$$\frac{x_1 - p_1 x_3}{x_4} = \frac{x_3 y_1 - x_1 y_3}{x_3 y_4 - x_4 y_3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52a)$$

Aus (47a), (51a) und (52a) folgt sodann

$$\frac{x_3 y_1 - x_1 y_3}{x_3 y_4 - x_4 y_3} = \left( \frac{x_1 y_4 - x_4 y_1}{x_3 y_4 - x_4 y_3} \right)^{\frac{m}{n}},$$

oder

$$(x_4 y_1 - x_1 y_4)^m = (x_1 y_3 - x_3 y_1)^n (x_4 y_3 - x_3 y_4)^{m-n}. \quad (53a)$$

In gleicher Weise lässt sich aus (48a) und (50a) herleiten:

$$(x_4 y_2 - x_2 y_4)^m = (x_2 y_3 - x_3 y_2)^n (x_4 y_3 - x_3 y_4)^{m-n}. \quad (54a)$$

Wenn wir  $Y$  festhalten und  $X$  beweglich denken, stellt die Gleichung (53a)  $m$  Ebenen dar, welche alle durch  $Y$  und  $X_2$  gehen, während (54a)  $m$  durch  $Y$  und  $X_1$  gelegte Ebenen anweist. Die beiden Gleichungen bestimmen zusammen die  $m^2$  nach  $Y$  zielenden Congruenzstrahlen.

Es wird nun der Schnittpunkt  $Y$  dieser Strahlen in einen Punkt gelegt, welcher sich auf  $l$  nahe an  $A$  befindet, und somit angewiesen ist durch

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_1 y_3 + b_1' y_4, \\ y_2 &= a_2 y_3 + b_2' y_4, \\ y_4 &= \rho y_3, \end{aligned} \right\}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= (a_1 + b_1' \rho) y_3, \\ y_2 &= (a_2 + b_2' \rho) y_3, \\ y_4 &= \rho y_3, \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55a)$$

wo  $\rho$  eine kleine Grösse darstellt.

Um den Zustand im Punkte  $E_\tau$  ( $x_2 = \tau x_1, x_3 = x_4 = 0$ ) zu studiren, verlegen wir die Coordinatenecke  $X_1$  nach  $E_\tau$ , und zwar mittels der Formel

$$x_2 = \tau x_1 + x_2'.$$

Die Gleichungen der in  $Y$  zusammentreffenden Strahlen gestalten sich alsdann folgendermassen:

$$(x_4 y_1 - x_1 y_4)^m = (x_1 y_3 - x_3 y_1)^n (x_4 y_3 - x_3 y_4)^{m-n}, \quad (53a)$$

$$\begin{aligned} & \{x_4(\tau y_1 + y_2') - (\tau x_1 + x_2')y_4\}^m = \\ & = \{(\tau x_1 + x_2')y_3 - x_3(\tau y_1 + y_2')\}^n (x_4 y_3 - x_3 y_4)^{m-n}; \end{aligned} \quad (56a)$$

der Punkt  $Y$  ist indess durch

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= (a_1 + b_1' \rho) y_3, \\ \tau y_1 + y_2' &= (a_2 + b_2' \rho) y_3, \\ y_4 &= \rho y_3 \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (57a)$$

gegeben.

Die Substitution (57a) liefert in den Gleichungen (53a) und (56a)

$$\{(a_1 + b_1' \rho) x_4 - \rho x_1\}^m = \{x_1 - (a_1 + b_1' \rho) x_3\}^n (x_4 - \rho x_3)^{m-n}, \quad (58a)$$

$$\{(a_2 + b_2' \rho) x_4 - \rho(\tau x_1 + x_2')\}^m = \{\tau x_1 + x_2' - (a_2 + b_2' \rho) x_3\}^n (x_4 - \rho x_3)^{m-n}. \quad (59a)$$

Diese Gleichungen stellen daher zusammen die Strahlen dar, welche nach dem nahe bei  $A$  auf  $l$  liegenden Punkte  $Y$  zielen.

Ihre Spuren in  $x_3 = \mu x_4$  werden durch die Gleichungen

$$\{(a_1 + b_1' \rho) x_4 - \rho x_1\}^m = \{x_1 - \mu(a_1 + b_1' \rho) x_4\}^n (1 - \rho \mu)^{m-n} x_4^{m-n}, \quad (60a)$$

$$\begin{aligned} & \{(a_2 + b_2' \rho) x_4 - \rho(\tau x_1 + x_2')\}^m = \\ & = \{\tau x_1 + x_2' - \mu(a_2 + b_2' \rho) x_4\}^n (1 - \rho \mu)^{m-n} x_4^{m-n}. \end{aligned} \quad (61a)$$

geliefert.

Diese Spuren befinden sich in der Nähe von  $E_\tau$ , d. h. vom Punkte

$$x_2' = 0, \quad x_4 = 0,$$

wonach ihre Coordinaten  $x_2'$  und  $x_4$  kleine Werte aufweisen werden. Wir setzen darum

$$\left. \begin{aligned} x_4 &= z, \\ x_2' &= \lambda z, \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62a)$$

wo  $z$  eine kleine Grösse darstellt, und erhalten somit:

$$\{(a_1 + b_1' \rho)z - \rho x_1\}^m = \{x_1 - \mu(a_1 + b_1' \rho)z\}^n (1 - \rho\mu)^{m-n} z^{m-n},$$

$$\{(a_2 + b_2' \rho)z - \rho(\tau x_1 + \lambda z)\}^m = \{\tau x_1 + \lambda z - \mu(a_2 + b_2' \rho)z\}^n (1 - \rho\mu)^{m-n} z^{m-n},$$

oder

$$\{-\rho x_1 + (a_1 + b_1' \rho)z\}^m = \{x_1 - \mu(a_1 + b_1' \rho)z\}^n (1 - \rho\mu)^{m-n} z^{m-n},$$

$$\{-\rho \tau x_1 + (a_2 + b_2' \rho - \lambda \rho)z\}^m = \{\tau x_1 - (\mu a_2 + \mu b_2' \rho - \lambda)z\}^n (1 - \rho\mu)^{m-n} z^{m-n}.$$

Indem wir diese Formen nach Potenzen von  $z$  entwickeln und Potenzen mit Exponenten grösser als 1 vernachlässigen, finden wir

$$\begin{aligned} & (-\rho)^m x_1^m + m(-\rho)^{m-1}(a_1 + b_1' \rho)x_1^{m-1}z = \\ & = \{x_1^n - n\mu(a_1 + b_1' \rho)x_1^{n-1}z\}(1 - \rho\mu)^{m-n} z^{m-n}, \\ & (-\rho\tau)^m x_1^m + m(-\rho\tau)^{m-1}(a_2 + b_2' \rho - \lambda\rho)x_1^{m-1}z = \\ & = \{\tau^n x_1^n - n\tau^{n-1}(\mu a_2 + \mu b_2' \rho - \lambda)x_1^{n-1}z\}(1 - \rho\mu)^{m-n} z^{m-n}. \end{aligned}$$

Durch Teilung entsteht hieraus

$$\frac{-\rho x_1 + m(a_1 + b_1' \rho)z}{-\rho\tau^{m-n+1}x_1 + m\tau^{m-n}(a_2 + b_2' \rho - \lambda\rho)z} = \frac{x_1 - n\mu(a_1 + b_1' \rho)z}{\tau x_1 - n(\mu a_2 + \mu b_2' \rho - \lambda)z},$$

also, wenn wir wieder  $z^2$  vernachlässigen und die Relation  $\tau^{m-n} = 1$  beachten,

$$\begin{aligned} & -\rho\tau x_1^2 + m(a_1 + b_1' \rho)\tau x_1 z + n\rho(\mu a_2 + \mu b_2' \rho - \lambda)x_1 z = \\ & = -\rho\tau x_1^2 + m(a_2 + b_2' \rho - \lambda\rho)x_1 z + n\rho\mu(a_1 + b_1' \rho)\tau x_1 z, \end{aligned}$$

oder

$$m(a_1 + b_1' \rho)\tau + n\rho\mu(a_2 + b_2' \rho) - n\rho\lambda = m(a_2 + b_2' \rho) - m\lambda\rho + n\rho\mu(a_1 + b_1' \rho)\tau,$$

also

$$\lambda = \frac{\{a_2 - \tau a_1 + \rho(b_2' - \tau b_1')\}(m - \mu\rho n)}{(m - n)\rho}. \quad (63a)$$

Es empfiehlt sich uns klar zu machen, wie weit wir der Lösung des vorliegenden Problems näher gerückt sind.

Wir hatten als Sammelpunkt der Strahlen den Punkt  $Y$  gewählt, welcher sich auf  $l$  in der Nähe von  $A$  befindet.

In Bezug auf das Coordinatentetraeder  $E_\tau X_2 X_3 X_4$  werden die dem Punkte  $Y$  entstammenden Strahlen durch (58a) und (59a), ihre Spuren in  $x_3 = \mu x_4$  durch (60a) und (61a) dargestellt.

Weil diese Spuren nahe an  $E_\tau$  liegen müssen, setzten wir  $x_4 = z$  und  $x_2' = \lambda z$  an, wo  $z$  eine kleine Grösse und  $\lambda$  die Richtungsconstante der Gerade bezeichnet, welche  $E_\tau$  mit einer

der betrachteten Spuren vereinigt. Diese Verbindungslinie geht offenbar, wenn  $Y$  mit  $A$  coincidirt, die Spur also in  $E_\tau$  fällt, in die *Tangente* in  $E_\tau$  über.

Diese Richtungsconstante  $\lambda$  haben wir mittels der Gleichung (63a) bestimmt.

Weil der in (63a) für  $\lambda$  gegebene Ausdruck eindeutig ist, fallen sämtliche in der Nähe von  $E_\tau$  liegenden Spuren längs *derselben* Gerade mit  $E_\tau$  zusammen, m. a. W.: der Punkt  $E_\tau$  besitzt nur eine einzige Tangente.

Die Richtungsconstante der Tangente stellt sich heraus, indem man in (63a)  $\rho = 0$  setzt. Wir finden alsdann

$$\lambda = \infty,$$

wofern  $\mu$  endlich ist.

Ist  $\mu$  dagegen unendlich gross, so ist  $\mu\rho n$ , so lange  $\rho$  endlich ist, gross in Bezug auf  $m$ ; der Ausdruck (63a) nimmt für  $\mu = \infty$ ,  $\rho = 0$  diese Form an:

$$\lambda = - \frac{(a_2 - \tau a_1)n}{m - n} \mu.$$

In allen Ebenen  $x_3 = \mu x_4$ , für welche  $\mu$  endlich ist, d. h. in allen durch  $X_1 X_2$  gelegten Ebenen, *ausgenommen*  $\omega_\infty$ , wird die einzige Tangente in  $E_\tau$  durch  $\lambda = \infty$ , also vermöge (62a) durch  $x_4 = 0$  bestimmt; sie fällt demnach mit der Gerade  $X_1 X_2$  zusammen.

In der Ebene  $\omega_\infty$  aber liegt die Sache anders; in ihr wird die Tangente von  $E_\tau$  durch

$$\lambda = - \frac{(a_2 - \tau a_1)n}{m - n} \mu,$$

also durch

$$x_2' = - \frac{(a_2 - \tau a_1)n}{m - n} \mu x_4 = - \frac{(a_2 - \tau a_1)n}{m - n} x_3,$$

oder

$$x_2 - \tau x_1 + \frac{(a_2 - \tau a_1)n}{m - n} x_3 = 0 \quad . \quad . \quad (64a)$$

angewiesen.

Durch die Transformation

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \xi_1 + a_1 \xi_3, \\ x_2 &= \xi_2 + a_2 \xi_3, \\ x_3 &= \xi_3 \end{aligned} \right\}$$

verwandelt sich diese Gleichung in

$$(m + n)(\xi_2 - \tau \xi_1) + m(a_2 - \tau a_1) \xi_3 = 0.$$

Es ist diese Gleichung mit der Gleichung (31a) identisch, welche ja auch die Tangente in  $E_\tau$  an der in  $\omega_\infty$  befindlichen Kurve darstellt.

Die Gesamtheit der Tangenten in  $E_\tau$  an den Schnittkurven aller Ebenen  $x_3 = \mu x_4$  findet man, indem man in (63a)  $\mu$  durch  $x_3 : x_4$  und  $\lambda$  durch  $(x_2 - \tau x_1) : x_4$  ersetzt. Man erhält sodann

$$x_2 - \tau x_1 = -\frac{a_2 - \tau a_1}{m - n} \left( \frac{m x_4}{\rho} + n x_3 \right)_\rho = 0,$$

oder

$$x_4 = 0.$$

Es befinden sich daher alle in  $E_\tau$  an der axialen Regelfläche gelegten Tangenten in der Ebene  $\omega_\infty$ , welche hier so zu sagen sich in der Gerade (64a) durchdringt.

Im Schnitte mit  $\omega_0$  war  $E_\tau$  ein  $n$ -facher Punkt. Es ist also  $E_\tau$  auch ein  $n$ -facher Punkt in jedem Schnitt mit einer durch  $X_1 X_2$  gelegten Ebene, daher auch ein  $n$ -facher Punkt auf der Regelfläche.

Unser Schluss lautet demnach:

*In der parabolischen Congruenz sind auf der axialen Regelfläche einer willkürlichen Gerade die Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$  alle  $n$ -fache Punkte. Die Tangenten befinden sich in  $n$  Ebenen, welche alle in  $\omega_\infty$  zusammengefallen sind. Die Tangenten an der Schnittkurve mit  $\omega_\infty$  sind dagegen die Geraden, welche die Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$  mit dem Schnittpunkte von  $X_3 A$  und der Gerade (33a) verbinden (siehe S. 205).*

Auf der Regelfläche liegt noch eine Doppelkurve. Jede durch  $l$  gelegte Ebene trägt ja  $mn$  Strahlen, die sich in  $\frac{mn(mn-1)}{2}$  Punkten schneiden. Diese Schnittpunkte gehören zwei nicht-unendlich-benachbarten Erzeugenden der Regelfläche an, sind daher Doppelpunkte.

Es leuchtet ein, dass die Doppelkurve mit einer durch  $l$  gelegten Ebene  $\frac{mn(mn-1)}{2}$  Schnittpunkte liefert, welche ausserhalb  $l$  liegen.

Der Grad der Doppelkurve ist bekannt, so bald man die Anzahl der Schnittpunkte von  $l$  mit der Doppelkurve kennt.

Im Folgenden wollen wir ein Verfahren darlegen, durch welches die Anzahl der Schnittpunkte bestimmt werden kann. Dieses Verfahren ist, falls  $m$  und  $n$  kleine Zahlen sind, gewiss nicht das kürzeste; wenn aber  $m$  und  $n$  gross sind, so sichert die hierunter beschriebene Methode am meisten ein brauchbares Resultat.

Es sei  $C(y_1, y_2, y_3, y_4)$  ein Punkt der Geraden  $l$ . Nach  $C$  zielen  $m^2$  Congruenzstrahlen  $p$ , welche als die Schnittlinien von  $m$  Ebenen durch  $CX_1$  mit  $m$  Ebenen durch  $CX_2$  bestimmt sind. Die  $m$  durch  $CX_1$  gelegten Ebenen schneiden  $\omega_\infty$  in  $m$  Geraden durch  $X_1$ , welche durch

$$\frac{x_2}{x_3} = p_2$$

gegeben sind, wenn  $p_2$  der Gleichung

$$(y_2 - p_2 y_3)^n - p_2^m y_4^n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (65a)$$

genügt.

Wir denken uns den Punkt  $C$  in der Ebene  $x_3 = \mu x_4$ , wonach

$$y_3 = \mu y_4.$$

Zuerst ersetzen wir das Coordinatentetraeder  $X_1 X_2 X_3 X_4$  durch das Tetraeder  $X_1 X_2 AB'$  mittels der Formeln

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \eta_1 + a_1 \eta_3 + b_1' \eta_4, \\ y_2 &= \eta_2 + a_2 \eta_3 + b_2' \eta_4, \\ y_3 &= \eta_3, \\ y_4 &= \eta_4, \\ p_1 &= \pi_1 + a_1, \\ p_2 &= \pi_2 + a_2. \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66)$$

Bedenken wir noch, dass  $C$  sich auf  $l$  ( $\eta_1 = \eta_2 = 0$ ) und in der Ebene  $\eta_3 = \mu \eta_4$  befindet, so ist es klar, dass (65a) ersetzt wird durch

$$(b_2' - \mu \pi_2)^n - (\pi_2 + a_2)^m = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (67a)$$

Diese Gleichung hat  $m$  Wurzeln, welche wir mit

$$(\pi_2)_1, (\pi_2)_2 \quad . \quad . \quad . \quad (\pi_2)_p, (\pi_2)_q, (\pi_2)_r, (\pi_2)_s \quad . \quad . \quad . \quad (\pi_2)_m$$

bezeichnen werden.

Die  $m$  durch  $CX_2$  gelegten Ebenen schneiden  $\omega_\infty$  in  $m$  Geraden durch  $X_2$ , welche durch

$$\frac{x_1}{x_3} = p_1$$

gegeben sind, wenn  $p_1$  der Gleichung

$$(y_1 - p_1 y_3)^n - p_1^m y_4^n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (68a)$$

genügt. Durch die Transformation (66) geht diese Gleichung in die folgende über:

$$(b_1' - \mu \pi_1)^n - (\pi_1 + a_1)^m = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (69a)$$

Ihre  $m$  Wurzeln werden durch

$$(\pi_1)_1, (\pi_1)_2, \dots, (\pi_1)_p, (\pi_1)_q, (\pi_1)_r, (\pi_1)_s \dots (\pi_1)_m$$

angedeutet.

Die Spur  $P_{pq}$  eines durch  $C$  gelegten Strahles  $p_{pq}$  ist nun durch die Coordinaten

$$P_{pq} \cdot \left. \begin{array}{l} \pi_1 = (\pi_1)_p, \\ \pi_2 = (\pi_2)_q \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

angewiesen. Ebenso ist die Spur  $P_{rs}$  eines zweiten durch  $C$  gehenden Strahles  $p_{rs}$  durch

$$P_{rs} \cdot \left. \begin{array}{l} \pi_1 = (\pi_1)_r, \\ \pi_2 = (\pi_2)_s \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

bestimmt.

Wenn  $C$  ein Punkt der Doppelkurve sein soll, so muss  $C$  zwei Strahlen  $p_{pq}$  und  $p_{rs}$  tragen, welche mit  $l$  in einer Ebene liegen. Ihre Spuren  $P_{pq}$  und  $P_{rs}$  in  $\omega_\infty$  müssen dann aber mit der Spur  $A$  von  $l$  in einer Gerade liegen. Die Spur  $A$  ist durch

$$A \cdot \left. \begin{array}{l} \pi_1 = 0, \\ \pi_2 = 0 \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

gegeben, wonach die genannte Bedingung sich folgendermassen gestaltet:

$$\frac{(\pi_1)_p}{(\pi_2)_q} = \frac{(\pi_1)_r}{(\pi_2)_s},$$

oder

$$(\pi_1)_p \cdot (\pi_2)_s - (\pi_1)_r \cdot (\pi_2)_q = 0. \quad (73)$$

In dieser Gleichung können die Indices  $p$  und  $s$  einander gleich sein, ebenso die  $q$  und  $r$ .

Ausserdem kann  $p = q$ , oder  $p = r$ , oder  $q = s$ , oder  $r = s$  sein.

Die Fälle  $p = r$  und  $q = s$  müssen hier abgesondert werden. Denn  $p = r$  bedeutet, dass die beiden Strahlen  $p_{pq}$  und  $p_{rs}$  in derselben durch  $CX_2$  gelegten Ebene liegen. Die Bedingung (73) fordert alsdann  $(\pi_2)_s = (\pi_2)_q$ , weshalb die Strahlen gleichfalls in der selben durch  $CX_1$  gelegten Ebene liegen. In diesem Falle sind die beiden Strahlen also identisch und hiervon ist nicht die Rede. Ebenso würde  $q = s$  die beiden Strahlen zur Coincidenz bringen.

Weil die Wurzeln von (67a) im Allgemeinen von denjenigen von (69a) verschieden sein, so haben die Beziehungen  $p = s$ , oder  $q = r$ , oder  $p = q$ , oder  $r = s$  keinen Einfluss auf die folgenden Betrachtungen.

Wenn wir alle Combinationen (73) ins Auge fassen, so lässt sich die Bedingung, dass  $C$  ein Punkt der Doppelkurve sei, ausdrücken, indem das Produkt aller Formen  $(\pi_1)_p (\pi_2)_s - (\pi_1)_r (\pi_2)_q$  gleich Null gesetzt wird. Dieses Produkt ist eine symmetrische Funktion der Wurzeln von (67a) und (67b), daher auch eine Funktion der Coefficienten dieser Gleichungen, welche ausser  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1'$  und  $b_2'$  den Parameter  $\mu$  enthalten, der die durch  $X_1$ ,  $X_2$  und  $C$  gelegte Ebene bestimmt.

Die Gleichung

$$\Pi \{(\pi_1)_p (\pi_2)_s - (\pi_1)_r (\pi_2)_q\} = 0$$

kann also umgestaltet werden in eine Gleichung

$$M(\mu) = 0,$$

welche die Werte des Parameters  $\mu$  für die Ebenen  $x_3 = \mu x_4$  liefert, welche auf  $l$  einen Punkt der Doppelkurve einschneiden.

Weil die Umformung einer symmetrischen Funktion der Wurzeln zweier Gleichungen in eine Funktion der Coefficienten nur bei kleinen Werten von  $m$  und  $n$  zu leidlichen Rechnungen Veranlassung giebt, wobei das Gelingen der Operationen überdies fast ganz und gar von einem Kniffe abhängt, so werden wir hierunter eine Methode geben, welche zwar etwas umständlicher ist, dafür aber weniger Kunstgriffe fordert.



Wir werden die Gleichung (69a) in  $\pi_1$  mit

$$f_1(\pi_1) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

und die Gleichung (67a) in  $\pi_2$  mit

$$f_2(\pi_2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

bezeichnen. Beide Gleichungen sind von  $m^{\text{ten}}$  Grade.

Ersetzen wir in (75)  $\pi_2$  durch  $x : \pi_2'$ , so erhalten wir

$$f_2\left(\frac{x}{\pi_2'}\right) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

Ihre Wurzeln sind alsdann durch

$$\frac{x}{\pi_2'} = (\pi_2)_{p,q,\dots},$$

also durch

$$\pi_2' = \frac{x}{(\pi_2)_{p,q,\dots}}$$

bestimmt.

Wenn (74) und (76) eine gemeinschaftliche Wurzel haben, so wird der Bedingung

$$(\pi_1)_p = \frac{x'}{(\pi_2)_s}$$

oder

$$x = (\pi_1)_p \cdot (\pi_2)_s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

genügt.

Die Eliminate von (74) und (76) ist ein Ausdruck, in welchem nur die Coefficienten von (74) und (76) auftreten; sie ist also eine Funktion nur von  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1'$ ,  $b_2'$ ,  $\mu$  und  $x$ .

Indem wir die Eliminate verschwinden lassen und  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1'$ ,  $b_2'$ ,  $\mu$  als Constanten betrachten, bekommen wir eine Gleichung in  $x$ , welche wir durch

$$\Phi(x) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

darstellen werden.

Jede Wurzel dieser Gleichung ist das Produkt (77) einer Wurzel von (74) mit einer Wurzel von (75).

Die Coefficienten von  $\Phi(x)$  hängen nur von  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1'$ ,  $b_2'$  und  $\mu$  ab. Hat nun  $\Phi(x)$  zwei gleiche Wurzeln, so ergibt sich, dass

ein Produkt  $(\pi_1)_p \cdot (\pi_2)_s$  einem Produkte  $(\pi_1)_r \cdot (\pi_2)_q$  gleich ist, eine Beziehung, welche eben durch die Gleichung (73) erfordert wird.

Die Funktion  $\Phi(x)$  hat offenbar zwei gleiche Wurzeln, wenn ihre Diskriminante verschwindet. Diese Diskriminante ist eine Funktion der Coefficienten von  $\Phi(x)$ , enthält somit nur die Grössen  $a_1, a_2, b_1', b_2'$  und  $\mu$ . Indem wir sie verschwinden lassen, erhalten wir eine Gleichung von der Form

$$\Psi(a_1, a_2, b_1', b_2', \mu) = 0.$$

In dieser Gleichung sind  $a_1, a_2, b_1'$  und  $b_2'$  absolute Constanten. Daher ist diese Gleichung tatsächlich eine Gleichung in  $\mu$ ,

$$F(\mu) = 0. \quad (79)$$

Es erhellt, dass sie die Werte von  $\mu$  liefert, welche den Punkten  $C$  auf  $l$  angehören, die auch auf der Doppelkurve liegen.

Wir haben jedoch zu beachten, dass unter den Formen  $(\pi_1)_p (\pi_2)_s$  —  $(\pi_1)_r (\pi_2)_q$  auch diejenigen vorkommen, in welchen  $p = r$ , oder  $q = s$ .

Wenn  $p = r$ , also  $(\pi_1)_p = (\pi_1)_r$  ist, so wird die erwähnte Form

$$(\pi)_p \{(\pi_2)_s - (\pi_2)_q\}.$$

Wenn aber  $s \neq q$ , so fordert das verschwinden dieser Form, dass die Gleichung  $f_2(\pi_2)$  zwei gleiche Wurzeln habe. Hieraus folgt, dass der Gleichung (73) auch genügt wird durch diejenigen Werte von  $\mu$ , welche zwei gleiche Wurzeln von  $f_2(\pi_2) = 0$  liefern. Es ist also die Diskriminante von  $f_2(\pi_2)$  ein Faktor von  $F(\mu)$ . Ebenso ist die Diskriminante von  $f_1(\pi_1)$  ein Teiler von  $F(\mu)$ . Wenn wir die Diskriminanten von  $f_1(\pi_1)$  und  $f_2(\pi_2)$  bez. mit  $\varphi_1(\mu)$  und  $\varphi_2(\mu)$  bezeichnen, so können wir demnach schreiben

$$F(\mu) = \varphi_1(\mu) \cdot \varphi_2(\mu) \cdot \psi(\mu).$$

Es ist selbstredend, dass die gesuchten Punkte  $C$  nur durch die Gleichung

$$\psi(\mu) = 0$$

geliefert werden.

Wir wollen beiläufig bemerken, dass wir beim Berechnen der Diskriminante von  $\Phi(x)$  zu einer Form gelangen werden, welche ein vollkommenes Quadrat ist, weil wir durch Vertauschung der Indices  $p$  mit  $r$  und  $q$  mit  $s$  die Bedingung  $(\pi_1)_p \cdot (\pi_2)_s - (\pi_1)_r \cdot (\pi_2)_q = 0$

in die gleichwertige Bedingung  $(\pi_1)_r \cdot (\pi_2)_q - (\pi_1)_p \cdot (\pi_2)_s = 0$  transformieren.

Der Ausdruck  $F(\mu)$  ist alsdann die Quadratwurzel aus der ursprünglichen Diskriminante.

Da die Grösse  $\mu$  in ziemlich verwickelter Weise in den Coefficienten von  $f_1(\pi_1)$  und  $f_2(\pi_2)$  auftritt, so dürfte es schwer sein im allgemeinen Falle den Grad von  $F(\mu)$ ,  $\varphi_1(\mu)$  und  $\varphi_2(\mu)$  zu bestimmen. Wir werden daher den Grad von  $\psi(\mu)$  nicht berechnen, sondern ihn nur mit  $N$  bezeichnen.

Es liegen auf  $l$  also  $N$  Punkte der Doppelkurve.

Diese Kurve schneidet ausserdem eine durch  $l$  gelegte Ebene ausserhalb  $l$  in  $mn(mn - 1) : 2$  Punkten.

Der Grad der Doppelkurve ist demnach

$$N + \frac{mn(mn - 1)}{2}.$$

Es ist klar, dass die Doppelkurve die singulären Punkte  $X_1, X_2$  und  $E_{\tau_{m-n}}$  der Regelfläche enthält.

Die Schnittkurve der axialen Regelfläche mit einer durch  $X_1 X_2$  gelegten Ebene  $\omega_\mu$  ( $x_3 = \mu x_4$ ) hat

in  $X_1$  einen  $mn$ -fachen Punkt, von dessen Tangenten je  $m$  vereinigt sind in einer der  $n$  Geraden, in welchen die Ebene  $\omega_\mu$  durch die  $n$  Ebenen (46a) geschnitten wird;

in  $X_2$  ebenfalls einen  $mn$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die Spuren der  $n$  Ebenen (45a) in der Ebene  $\omega_\mu$  sind;

in jedem der Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$  einen  $n$ -fachen Punkt, dessen Tangenten alle in  $X_1 X_2$  vereinigt sind (ausgenommen  $\mu = \infty$ );

im Schnittpunkte  $C_\mu$  von  $l$  mit  $\omega_\mu$  einen  $m^2$ -fachen Punkt, dessen Tangenten durch die nach  $C_\mu$  zielenden Congruenzstrahlen bestimmt werden;

Doppelpunkte an den Stellen, wo  $\omega_\mu$  die Doppelkurve trifft.

§ 6b. Die axiale Regelfläche einer durchaus willkürlichen Gerade in der hyperbolischen Congruenz.

Wie in § 6a wird die Axe der Regelfläche mit  $l$ , ihre Spur in  $\omega_\infty$  mit  $A$ , ihr Schnittpunkt in  $\omega_0$  mit  $B'$  bezeichnet.

Es gehen jetzt durch jeden Punkt von  $l$   $(m + n)^2$  Congruenzstrahlen, wonach  $l$  eine  $(m + n)^2$ -fache Gerade auf ihrer axialen Regelfläche ist.

In jeder durch  $l$  gelegten Ebene befinden sich noch  $2mn$  Strahlen. Eine solche Ebene hat also mit der axialen Regelfläche diese  $2mn$

Geraden und ausserdem noch die  $(m+n)^2$ -fache Gerade  $l$  gemein; der Gesamtschnitt ist demnach vom Grade  $(m+n)^2 + 2mn$ . Daher:

*In der hyperbolischen Congruenz ist der Grad der axialen Regelfläche einer willkürlichen Gerade  $(m+n)^2 + 2mn$ .*

Die Punkte  $A$  und  $B'$  werden auch hier durch

$$A \dots \frac{x_1}{x_3} = a_1, \quad \frac{x_2}{x_3} = a_2, \quad x_4 = 0,$$

$$B' \dots \frac{x_1}{x_4} = b_1', \quad \frac{x_2}{x_4} = b_2', \quad x_3 = 0$$

angewiesen. Die Gerade  $l$  ist also durch

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 x_3 + b_1' x_4, \\ x_2 &= a_2 x_3 + b_2' x_4 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

gegeben.

Ein durch

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= p_1 x_3 + p_1^{-\frac{m}{n}} x_4, \\ x_2 &= p_2 x_3 + p_2^{-\frac{m}{n}} x_4 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6b)$$

bestimmter Congruenzstrahl  $p$  schneidet  $l$ , wenn er in der Ebene

$$\lambda_1 (x_1 - a_1 x_3 - b_1' x_4) + \lambda_2 (x_2 - a_2 x_3 - b_2' x_4) = 0 \quad (19)$$

liegt.

Die Coordinaten  $p_1$  und  $p_2$  haben somit den Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 (p_1 - a_1) + \lambda_2 (p_2 - a_2) &= 0, \\ \lambda_1 (p_1^{-\frac{m}{n}} - b_1') + \lambda_2 (p_2^{-\frac{m}{n}} - b_2') &= 0 \end{aligned} \right\}$$

zu genügen, woraus, durch Elimination von  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ , die Gleichung

$$\frac{1 - b_1' p_1^{\frac{m}{n}}}{(p_1 - a_1) p_1^{\frac{m}{n}}} = \frac{1 - b_2' p_2^{\frac{m}{n}}}{(p_2 - a_2) p_2^{\frac{m}{n}}} \quad \dots \dots (20b)$$

hervorgeht.

Die Gleichung der axialen Regelfläche wird ermittelt, indem man aus den beiden Gleichungen (6b) und aus der Gleichung (20b) die Grössen  $p_1$  und  $p_2$  eliminirt.

Die Gleichung (20b) stellt, wenn wir  $p_1$  und  $p_2$  bez. durch

$x_1 : x_3$  und  $x_2 : x_3$  ersetzen, auch den geometrischen Ort derjenigen Punkte von  $\omega_\infty$  dar, nach denen Congruenzstrahlen zielen, welche  $l$  schneiden.

Dieser Ort ist demnach ein Bestandteil des Schnittes von  $\omega_\infty$  mit der axialen Regelfläche.

Wir bringen (20b) zuerst in die Form

$$(p_1 - a_1) p_1^{\frac{m}{n}} - (p_2 - a_2) p_2^{\frac{m}{n}} - \{b_2' (p_1 - a_1) - b_1' (p_2 - a_2)\} p_1^{\frac{m}{n}} p_2^{\frac{m}{n}} = 0 \quad . \quad (21b)$$

und verlegen alsdann die Ecke  $X_3$  nach  $A$ , und zwar mit Verwendung der folgenden Formeln

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \xi_1 + a_1 \xi_3, \\ x_2 &= \xi_2 + a_2 \xi_3, \\ x_3 &= \xi_3, \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

$$\frac{\xi_1}{\xi_3} = \pi_1, \quad \frac{\xi_2}{\xi_3} = \pi_2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \pi_1 + a_1, \\ p_2 &= \pi_2 + a_2. \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Die Substitution dieser Ausdrücke in (21b) liefert

$$\begin{aligned} & \pi_1 (\pi_1 + a_1)^{\frac{m}{n}} - \pi_2 (\pi_2 + a_2)^{\frac{m}{n}} - \\ & - (b_2' \pi_1 - b_1' \pi_2) (\pi_1 + a_1)^{\frac{m}{n}} (\pi_2 + a_2)^{\frac{m}{n}} = 0, \quad . \quad (25b) \end{aligned}$$

oder, mittels (23),

$$\begin{aligned} & \xi_1 (\xi_1 + a_1 \xi_3)^{\frac{m}{n}} \xi_3^{\frac{m}{n}} - \xi_2 (\xi_2 + a_2 \xi_3)^{\frac{m}{n}} \xi_3^{\frac{m}{n}} - \\ & - (b_2' \xi_1 - b_1' \xi_2) (\xi_1 + a_1 \xi_3)^{\frac{m}{n}} (\xi_2 + a_2 \xi_3)^{\frac{m}{n}} = 0. \quad . \quad (26b) \end{aligned}$$

Nach Fortschaffung der gebrochenen Exponenten wird diese Gleichung vom Grade  $n(2m + n)$ .

Der oben erwähnte Ort ist also eine Kurve vom Grade  $n(2m + n)$ .

Der Gesamtschnitt der axialen Regelfläche mit  $\omega_\infty$  muss vom Grade  $(m + n)^2 + 2mn$  sein. Die durch (26b) gegebene Kurve wird daher zum vollständigen Schnitt ergänzt durch ein Gebilde vom Grade  $(m + n)^2 + 2mn - n(2m + n) = m(m + 2n)$ .

Zu den Congruenzstrahlen, welche  $l$  schneiden, gehören auch die Geraden  $AX_1$ ,  $AX_2$  und  $AX_3$ . Nach § 5b haben wir die

Geraden  $AX_1$  und  $AX_2$  jede  $mn$  mal, die Gerade  $AX_3$   $m^2$  mal zu rechnen. Diese drei Geraden bilden mithin zusammen eine Figur vom Grade  $2mn + m^2 = m(m + 2n)$ . Diese Figur ergänzt die Kurve (26b) zum Gesamtschnitt in  $\omega_\infty$ . Wir ziehen demnach diesen Schluss: *Der Schnitt der axialen Regelfläche einer willkürlichen Gerade  $l = AB'$  mit  $\omega_\infty$  besteht aus einer Kurve vom Grade  $n(2m + n)$ , den Geraden  $AX_1$  und  $AX_2$ , jede  $mn$ -fach gezählt, und schliesslich aus der Gerade  $AX_3$   $m^2$ -fach gerechnet.*

Die Kurve in  $\omega_\infty$  werde nun einer eingehenderen Betrachtung unterworfen. Aus ihrer Gleichung:

$$\xi_1(\xi_1 + a_1 \xi_3)^{\frac{m}{n}} \xi_3^{\frac{m}{n}} - \xi_2(\xi_2 + a_2 \xi_3)^{\frac{m}{n}} \xi_3^{\frac{m}{n}} - (b_2' \xi_1 - b_1' \xi_2)(\xi_1 + a_1 \xi_3)^{\frac{m}{n}} (\xi_2 + a_2 \xi_3)^{\frac{m}{n}} = 0 \quad (26b)$$

geht hervor, dass  $\xi_1^{1+\frac{m}{n}}$  die höchste Potenz von  $\xi_1$  ist. Ihr Coefficient ist  $\xi_3^{\frac{m}{n}} - b_2'(\xi_2 + a_2 \xi_3)^{\frac{m}{n}}$ ; daher werden die Tangenten in  $X_1$  dargestellt durch

$$b_2'(\xi_2 + a_2 \xi_3)^{\frac{m}{n}} - \xi_3^{\frac{m}{n}} = 0,$$

oder

$$b_2'^n(\xi_2 + a_2 \xi_3)^m - \xi_3^m = 0,$$

oder

$$b_2'^n x_2^m - x_3^m = 0,$$

also in der rationalen Gleichung durch

$$(b_2'^n x_2^m - x_3^m)^n = 0.$$

Wir schliessen, dass  $X_1$  ein  $mn$ -facher Punkt ist, von dessen Tangenten je  $n$  in einer der  $m$  Geraden

$$x_2 = b_2'^{\frac{n}{m}} x_3$$

zusammengefallen sind. Es sind diese offenbar die Verbindungslinien von  $X_1$  mit den  $m^2$  in  $\omega_\infty$  liegenden Bildern  $B$  des in  $\omega_0$  befindlichen Punktes  $B'$ .

Wir dürfen also Folgendes behaupten:

*Die Kurve in  $\omega_\infty$  hat in  $X_1$  einen  $mn$ -fachen Punkt, von dessen Tangenten je  $n$  vereinigt sind in einer der  $m$  Geraden, welche  $X_1$  mit den  $m^2$  Bildern  $B$  von  $B'$  verbinden.*

Für  $X_2$  gilt natürlich dasselbe.

Die Gerade  $X_1 X_2$  schneidet die Kurve in den Punkten, welche durch

$$(b_2' \xi_1 - b_1' \xi_2) \xi_1^{\frac{m}{n}} \xi_2^{\frac{m}{n}} = 0,$$

also in der rationalen Gleichung durch

$$(b_2' \xi_1 - b_1' \xi_2)^{n^2} \xi_1^{mn} \xi_2^{mn} = 0$$

bestimmt sind. Es ist klar, dass die Gerade  $X_1 X_2$  die Kurve  $mn$  mal im ( $mn$ -fachen) Punkte  $X_1$ ,  $mn$  mal im ( $mn$ -fachen) Punkte  $X_2$  und  $n^2$  mal in dem Punkte schneidet, welcher durch

$$b_2' \xi_1 - b_1' \xi_2 = 0$$

gegeben und mit dem Schnittpunkte  $B_1'$  von  $X_1 B'$  und  $X_1 X_2$  identisch ist. Wir wollen die Beschaffenheit dieses Punktes später erörtern.

Zuerst wollen wir den Zustand im Punkte  $A$  erledigen.

Die höchste Potenz von  $\xi_3$  ist  $\xi_3^{\frac{2m}{n}}$ . Ihre Coefficient ist  $a_1^{\frac{m}{n}} \xi_1 - a_2^{\frac{m}{n}} \xi_2 - (b_2' \xi_1 - b_1' \xi_2) a_1^{\frac{m}{n}} a_2^{\frac{m}{n}}$ , wonach die Tangenten in  $A$  durch

$$a_1^{\frac{m}{n}} \xi_1 - a_2^{\frac{m}{n}} \xi_2 - (b_2' \xi_1 - b_1' \xi_2) a_1^{\frac{m}{n}} a_2^{\frac{m}{n}} = 0,$$

oder

$$\xi_1 = \frac{a_2^{\frac{m}{n}} (1 - b_1' a_1^{\frac{m}{n}})}{a_1^{\frac{m}{n}} (1 - b_2' a_2^{\frac{m}{n}})} = \frac{a_1^{\frac{m}{n}} - b_1'}{a_2^{\frac{m}{n}} - b_2'} \quad . \quad . \quad (27b)$$

bestimmt sind.

Durch die Umformung des Coordinatentetraeders  $X_1 X_2 X_3 X_4$  in das Tetraeder  $X_1 X_2 AB'$  mittels der Formeln

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \xi_1 + a_1 \xi_3 + b_1' \xi_4, \\ x_2 &= \xi_2 + a_2 \xi_3 + b_2' \xi_4, \\ x_3 &= \xi_3, \\ x_4 &= \xi_4, \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

wonach  $l$  durch

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= 0, \\ \xi_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

gegeben ist, gewinnen wir die Einsicht, dass die Gleichung (27b) auch die axialen Projektionen aus  $l$  auf  $\omega_0$  jener Tangenten in  $A$  darstellt.

Die Gerade (27b), als Gerade in  $\omega_0$  betrachtet, enthält den Punkt

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \left( a_1 \frac{m}{n} - b_1' \right) \xi_4, \\ \xi_2 &= \left( a_2 \frac{m}{n} - b_2' \right) \xi_4, \end{aligned} \right\}$$

der im alten Coordinatensystem durch

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a_1 \frac{m}{n} x_4, \\ x_2 &= a_2 \frac{m}{n} x_4 \end{aligned} \right\}$$

angewiesen und deshalb mit dem Bilde  $A'$  des Punktes  $A$  identisch ist.

Weil der Ausdruck (27b)  $n^2$ -deutig ist, so ist  $A$  ein  $n^2$ -facher Punkt; seine Tangenten sind die axialen Projektionen aus  $l$  auf  $\omega_\infty$  der  $n^2$  Bilder  $A'$  von  $A$ .

Wir sind also zum folgenden Resultate gelangt:

*Der Punkt  $A$  ist ein  $n^2$ -facher Punkt der Kurve in  $\omega_\infty$ . Seine Tangenten sind die axialen Projektionen aus  $l$  auf  $\omega_\infty$  der  $n^2$  in  $\omega_0$  liegenden Bilder  $A'$  von  $A$ .*

Es ist in § 6a bemerkt worden, dass dieses Resultat auch in rein geometrischer Weise gewonnen werden könnte. Auch hier hätten wir die Tangenten in  $A$  auffinden können durch die Überlegung, dass sie durch die nach  $A$  zielenden Congruenzstrahlen bestimmt sind.

Untersuchen wir jetzt den Zustand im Punkte  $B_4'$ .

Wir verlegen zuerst die Ecke  $X_1$  in  $B_4'$  mittels der Transformation

$$\xi_2 = \frac{b_2'}{b_1'} \xi_1 + \xi_2'.$$

Die Gleichung (26b) verwandelt sich alsdann in

$$\begin{aligned} \xi_1 (\xi_1 + a_1 \xi_3)^{\frac{m}{n}} \xi_3^{\frac{m}{n}} - \left( \frac{b_2'}{b_1'} \xi_1 + \xi_2' \right) \left( \frac{b_2'}{b_1'} \xi_1 + \xi_2' + a_2 \xi_3 \right)^{\frac{m}{n}} \xi_3^{\frac{m}{n}} + \\ + b_1' \xi_2' (\xi_1 + a_1 \xi_3)^{\frac{m}{n}} \left( \frac{b_2'}{b_1'} \xi_1 + \xi_2' + a_2 \xi_3 \right)^{\frac{m}{n}} = 0. \quad (29b) \end{aligned}$$

Der Punkt  $B_4'$  ist jetzt durch

$$\xi_2' = 0, \quad \xi_3 = 0$$



gegeben. Wir müssen demnach die höchste Potenz von  $\xi_1$  betrachten. *Wir setzen voraus*

$$m > n.$$

Die höchste Potenz von  $\xi_1$  ist somit  $\xi_1^{\frac{2m}{n}}$ . Ihr Coefficient ist  $\xi_2'$ . In der rationalen Gleichung hat  $\xi_1^{2mn}$  daher den Coefficient  $\xi_2'^{n^2}$ .

Der Punkt  $B_4'$  ist also ein  $n^2$ -facher und seine sämtlichen Tangenten sind mit der Gerade

$$\xi_2' = 0,$$

oder

$$b_2' \xi_1 - b_1' \xi_2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31b)$$

d. h. mit der Gerade, welche  $B_4'$  mit  $A$  verbindet, zusammengefallen.

Da  $\xi_2' = 0$  in (29b) einen Faktor  $\xi_3^m$ , also in der rationalen Gleichung einen Faktor  $\xi_3^{mn}$  absondert, so hat die Gerade  $AB_4'$  im  $n^2$ -fachen Punkte  $B_4'$   $mn$  Punkte mit der Kurve gemein.

Die obigen Überlegungen lassen sich folgendermassen zusammenfassen: *Die Kurve in  $\omega_\infty$  hat, für  $m > n$ , in dem Schnittpunkte  $B_4'$  von  $X_4 B'$  mit  $X_1 X_2$  einen  $n^2$ -fachen Punkt, dessen Tangenten alle in der Gerade  $AB_4'$  vereinigt sind; es hat diese Gerade in  $B_4'$  mit der Kurve  $mn$  Punkte gemein.*

Der Punkt  $X_3$  gehört auch hier der Kurve in  $\omega_\infty$  an.

Bei der Untersuchung von  $X_3$  werden wir die Gleichung (21b) verwenden, welche durch die Substitution  $p_1 = x_1 : x_3, p_2 = x_2 : x_3$  diese Gestalt bekommt:

$$\begin{aligned} & (x_1 - a_1 x_3) x_1^{\frac{m}{n}} x_3^{\frac{m}{n}} - (x_2 - a_2 x_3) x_2^{\frac{m}{n}} x_3^{\frac{m}{n}} - \\ & - \{b_2' (x_1 - a_1 x_3) - b_1' (x_2 - a_2 x_3)\} x_1^{\frac{m}{n}} x_2^{\frac{m}{n}} = 0. \quad . \quad (32b) \end{aligned}$$

Die höchste Potenz von  $x_3$ , d. h.  $x_3^{1+\frac{m}{n}}$  hat nun den Coefficient  $a_1 x_1^{\frac{m}{n}} - a_2 x_2^{\frac{m}{n}}$ , sodass die Tangenten in  $X_3$  bestimmt sind durch

$$a_1 x_1^{\frac{m}{n}} - a_2 x_2^{\frac{m}{n}} = 0,$$

oder

$$a_1^n x_1^m - a_2^n x_2^m = 0,$$

also in der rationalen Gleichung durch

$$(a_1^n x_1^m - a_2^n x_2^m)^n = 0.$$

Der Punkt  $X_3$  erscheint demnach als ein  $mn$ -facher Punkt, von dessen Tangenten je  $n$  in einer der  $m$  Geraden

$$\frac{x_1}{x_2} = \left( \frac{a_1}{a_2} \right)^{-\frac{n}{m}} \dots \dots \dots (33b)$$

vereinigt sind.

Es sind diese, wie leicht ersichtlich, die  $m$  Bilder der in  $\omega_0$  befindlichen Gerade

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1}{a_2},$$

welche mit  $X_3 A$  die Gerade  $X_1 X_2$  im nämlichen Punkte  $A_3$  schneidet, also mit  $X_4 A_3$  identisch ist. Daher:

*Die in  $\omega_\infty$  liegende Kurve hat in  $X_3$  einen  $mn$ -fachen Punkt, von dessen Tangenten je  $n$  vereinigt sind in einer der  $m$  Bilder der Gerade  $X_4 A_3$ , welche  $X_4$  mit dem Schnittpunkte  $A_3$  von  $X_1 X_2$  und  $X_3 A$  verbindet.*

Hiermit beendigen wir die Untersuchung der Schnittkurve mit  $\omega_\infty$ .

Während wir in der *parabolischen* Congruenz die Kurve in  $\omega_0$  besonders zu erforschen hatten, so genügt es hier zu bemerken, dass die Ebenen  $\omega_\infty$  und  $\omega_0$  fast gänzlich als gleichwertig zu betrachten sind, wenn wir nur in den obigen Resultaten  $m$  mit  $n$ ,  $A$  mit  $B'$  und  $X_3$  mit  $X_4$  vertauschen.

Es gibt aber einen Unterschied, und zwar dort, wo wir die Ungleichheit  $m > n$  betont haben. Dies war der Fall bei der Erledigung der Beschaffenheit von  $B_4'$ .

Zuerst wollen wir bemerken, dass die Kurve in  $\omega_0$  zum vollständigen Schnitt ergänzt wird durch die Geraden  $X_1 B'$  und  $X_2 B'$  welche beide  $mn$ -fach zu zählen sind und durch die  $n^2$ -fach zu rechnende Gerade  $X_3 B'$ .

Aus diesem Letzteren geht hervor, dass auch der Schnittpunkt  $B_4'$  von  $X_3 B'$  mit  $X_1 X_2$  ein  $n^2$ -facher Punkt des Gesamtschnittes ist. Da  $B_4'$  auch ein  $n^2$ -facher Punkt des in  $\omega_\infty$  befindlichen Gesamtschnittes war, so ist  $B_4'$  kein Punkt der Kurve in  $\omega_0$ .

In  $\omega_\infty$  war dagegen  $A_3$ , der Schnittpunkt von  $X_1 X_2$  mit der  $m^2$ -fachen Gerade  $X_3 A$ , ein  $m^2$ -facher Punkt des Gesamtschnittes. Es wird deshalb die Gerade  $X_1 X_2$  mit der Kurve in  $\omega_0$   $m^2$ -mal den Punkt  $A_3$  gemein haben.

Wir wollen uns nunmehr besonders mit diesem Punkt  $A_3$  beschäftigen.

Wenn wir in (26b)  $a_1$  durch  $b_1'$ ,  $a_2$  durch  $b_2'$ ,  $\xi_3$  durch  $\xi_4$  und  $m$  durch  $n$  ersetzen, so finden wir für die Kurve in  $\omega_0$  diese Gleichung:

$$\begin{aligned} & \xi_1(\xi_1 + b_1' \xi_4)^{\frac{n}{m}} \xi_4^{\frac{n}{m}} - \xi_2(\xi_2 + b_2' \xi_4)^{\frac{n}{m}} \xi_4^{\frac{n}{m}} - \\ & - (a_2 \xi_1 - a_1 \xi_2)(\xi_1 + b_1' \xi_4)^{\frac{n}{m}} (\xi_2 + b_2' \xi_4)^{\frac{n}{m}} = 0. \quad (40b) \end{aligned}$$

Indem wir die Ecke  $X_1$  in  $A_3$  ( $a_2 \xi_1 - a_1 \xi_2 = 0$ ,  $\xi_4 = 0$ ) verlegen mittels der Formel

$$\xi_2 = \frac{a_2}{a_1} \xi_1 + \xi_2',$$

so bekommt (40b) diese Gestalt:

$$\begin{aligned} & \xi_1(\xi_1 + b_1' \xi_4)^{\frac{n}{m}} \xi_4^{\frac{n}{m}} - \left(\frac{a_2}{a_1} \xi_1 + \xi_2'\right) \left(\frac{a_2}{a_1} \xi_1 + \xi_2' + b_2' \xi_4\right)^{\frac{n}{m}} \xi_4^{\frac{n}{m}} - \\ & - a_1 \xi_2' (\xi_1 + b_1' \xi_4)^{\frac{n}{m}} \left(\frac{a_2}{a_1} \xi_1 + \xi_2' + b_2' \xi_4\right)^{\frac{n}{m}} = 0. \quad (43b) \end{aligned}$$

Der Punkt  $A_3$  ist jetzt durch

$$\xi_2' = 0, \quad \xi_4 = 0$$

gegeben. Die höchste Potenz von  $\xi_1$  ist jetzt *nicht*  $\xi_1^{2n}$ , sondern  $\xi_1^{1+\frac{n}{m}}$ . Ihr Coefficient ist  $\xi_4^{\frac{n}{m}} - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{1+\frac{n}{m}} \xi_4^{\frac{n}{m}}$ ; also werden in der rationalen Gleichung die Tangenten in  $A_3$  durch

$$\xi_4^{mn} = 0$$

bestimmt. Es erhellet, dass  $A_3$  ein  $mn$ -facher Punkt ist, und dass seine sämtlichen Tangenten mit  $X_1 X_2$  zusammengefallen sind.

Da  $\xi_4 = 0$  in (43b) den Faktor  $\xi_2'$ , also in der rationalen Gleichung den Faktor  $\xi_2'^{m^2}$  absondert, so hat  $X_1 X_2$  in  $A_3$  mit der Kurve  $m^2$  Punkte gemein, wie auch oben gefunden wurde. Also:

*Die Kurve in  $\omega_0$  hat in  $A_3$  einen  $mn$ -fachen Punkt, dessen sämtliche Tangenten mit  $X_1 X_2$  zusammengefallen sind. Die Gerade  $X_1 X_2$  hat in  $A_3$  mit der Kurve  $m^2$  Punkte gemein.*

Im Übrigen weist die Kurve in  $\omega_0$  keine bemerkenswerten Abweichungen auf.

Es ist jetzt unsere Aufgabe das Verhalten der Punkte  $X_1$  und  $X_2$  als Punkte der Regelfläche zu erörtern.

Es waren  $X_1$  und  $X_2$  sowohl im Gesamtschnitte von  $\omega_\infty$ , wie auch in demjenigen von  $\omega_0$  beide  $2mn$ -fache Punkte. Sie waren nämlich  $mn$ -fache Punkte der in diesen Ebenen befindlichen Kurven, und trugen ausserdem noch  $mn$ -mal bez. die Geraden  $X_1 A$  und  $X_2 A$  in  $\omega_\infty$ ,  $X_1 B'$  und  $X_2 B'$  in  $\omega_0$ .

Die Punkte  $X_1$  und  $X_2$  sind demnach auch auf der Regelfläche  $2mn$ -fache Punkte und es ist jetzt die Frage, wie steht es um die Tangenten in diesen Punkten?

Die Berührungsebenen in  $X_1$  und  $X_2$  werden durch diejenigen Congruenzstrahlen bestimmt, welche nach  $X_1$  und  $X_2$  zielen.

Es entstammen diese Strahlen entweder dem Punkte  $A$  oder dem Punkte  $B'$ .

Die Congruenzstrahlen, welche in einem Punkt  $X$  ( $x_1, x_2, x_3, x_4$ ) zusammentreffen, befinden sich in  $m + n$  durch  $XX_1$  und in  $m + n$  durch  $XX_2$  gelegten Ebenen. Wenn  $X$  in  $A$  liegt, so sind, sowohl von den  $m + n$  Ebenen durch  $XX_1$  wie von den  $m + n$  Ebenen durch  $XX_2$ ,  $m$  mit  $\omega_\infty$  zusammengefallen. Die übrigen  $n$  durch  $XX_2$  gelegten Ebenen sind nun durch

$$(x_1 - a_1 x_3)^n a_1^m - x_4^n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (45b)$$

angewiesen, während die übrigen  $n$  durch  $XX_1$  gelegten Ebenen durch

$$(x_2 - a_2 x_3)^n a_2^m - x_4^n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (46b)$$

bestimmt sind. Um dies zu beweisen würde es genügen die Betrachtungen von S. 211 mit kleinen Abänderungen zu wiederholen.

Die in  $X_1$  an der Regelfläche gelegten Tangenten sind also teilweise in den  $n$  Ebenen (46b) aufgespeichert.

Wenn wir  $X$  in  $B'$  gelegt hätten, so würden von den  $m + n$  durch  $X_2$  gelegten Ebenen  $n$  mit  $\omega_0$  zusammengefallen sein; die übrigen  $m$  wären alsdann durch

$$(x_1 - b_1' x_4)^m b_1'^n - x_3^m = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (45'b)$$

angewiesen, die  $m$  durch  $B' X_1$  gelegten, nicht mit  $\omega_0$  zusammenfallenden Ebenen dagegen durch

$$(x_2 - b_2' x_4)^m b_2'^n - x_3^m = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (46'b)$$

Die in  $X_1$  an der Regelfläche gelegten Tangenten befinden sich also auch teilweise in den  $m$  Ebenen (46'b).

Der  $2mn$ -fache Punkt  $X_1$  hat einen Tangentenkegel vom Grade

$2mn$ , welcher dem Obigen nach in die  $n$  Ebenen (46b) und in die  $m$  Ebenen (46'b) ausgeartet erscheint.

Wir haben, wegen der Vertauschbarkeit von  $m$  und  $n$ , den Zustand derweise zu betrachten, dass wir die  $n$  Ebenen (46b) jede für  $m$  und die  $m$  Ebenen (46'b) jede für  $n$  zählen.

Diese Darlegungen gelten offenbar c. p. auch für  $X_2$ .

Das Vorhergehende lässt sich also in dem folgenden Satz zusammenfassen:

*In der hyperbolischen Congruenz sind auf der axialen Regelfläche einer willkürlichen Gerade  $X_1$  und  $X_2$  beide  $2mn$ -fache Punkte. Die Tangenten von  $X_1$  befinden sich in  $2mn$  Ebenen, von denen  $mn$  zu je  $m$  in den  $n$  Ebenen (46b) und die übrigen  $mn$  zu je  $n$  in den  $m$  Ebenen (46'b) zusammengefallen sind. Die Tangenten von  $X_2$  liegen in  $2mn$  Ebenen, von denen  $mn$  zu je  $m$  in den  $n$  Ebenen (45b) und die übrigen  $mn$  zu je  $n$  in den  $m$  Ebenen (45'b) vereinigt sind.*

Die Ebenen (46b) schneiden  $\omega_\infty$  in der  $n$ -fachen Gerade  $x_2 - a_2 x_3 = 0$ , d.h. in der Gerade  $AX_1$ . Diese Gerade zählt also als Tangente am vollständigen Schnitte für  $mn$ . Sie ist auch tatsächlich ein  $mn$ -facher Bestandteil des ausgearteten Durchschnittsgebildes.

Die Ebenen (46'b) schneiden  $\omega_\infty$  in den  $m$  Geraden  $b_2'^n x_2^m - x_3^m = 0$ , oder  $x_2 : x_3 = b_2'^{-\frac{n}{m}}$ , d.h. in den  $m$  Bildern von  $X_1 B'$ . Diese, jede für  $n$  zu zählenden Geraden sind auch wirklich die Tangenten in  $X_1$  an der Kurve in  $\omega_\infty$ .

Für  $X_2$  und für die Ebene  $\omega_0$  kann man analoge Betrachtungen halten.

Wir wollen jetzt auch die Punkte der Gerade  $X_3 X_4$  einer eingehenden Forschung unterwerfen.

Es seien  $X(x_1, x_2, x_3, x_4)$  und  $Y(y_1, y_2, y_3, y_4)$  zwei Punkte des Congruenzstrahles  $p$ ; alsdann werden die folgenden Bedingungen erfüllt:

$$(x_1 - p_1 x_3) p_1^{\frac{m}{n}} = x_4, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47b)$$

$$(x_2 - p_2 x_3) p_2^{\frac{m}{n}} = x_4, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48b)$$

$$(y_1 - p_1 y_3) p_1^{\frac{m}{n}} = y_4, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49b)$$

$$(y_2 - p_2 y_3) p_2^{\frac{m}{n}} = y_4, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50b)$$

Aus (47b) und (49b) folgt

$$\frac{x_1 - p_1 x_3}{x_4} = \frac{y_1 - p_1 y_3}{y_4},$$

wonach

$$p_1 = \frac{x_1 y_4 - x_4 y_1}{x_3 y_4 - x_4 y_3} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (51b)$$

und

$$\frac{x_1 - p_1 x_4}{x_4} = \frac{x_3 y_1 - x_1 y_3}{x_3 y_4 - x_4 y_3} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (52b)$$

Aus (47b), (51b) und (52b) geht nun hervor:

$$\left( \frac{x_3 y_1 - x_1 y_3}{x_3 y_4 - x_4 y_3} \right) \left( \frac{x_1 y_4 - x_4 y_1}{x_3 y_4 - x_4 y_3} \right)^{\frac{m}{n}} = 1,$$

oder

$$(x_4 y_1 - x_1 y_4)^m (x_1 y_3 - x_3 y_1)^n = (x_4 y_3 - x_3 y_4)^{m+n}. \quad (53b)$$

In derselben Weise lässt sich aus (49b) und (50b) ableiten:

$$(x_4 y_2 - x_2 y_4)^m (x_2 y_3 - x_3 y_2)^n = (x_4 y_3 - x_3 y_4)^{m+n}. \quad (54b)$$

Indem wir  $Y$  festhalten und  $X$  beweglich machen, so stellt die Gleichung (53b)  $m+n$ , alle durch  $Y$  und  $X_2$  hindurchgehenden Ebenen dar, während (54b)  $m+n$  Ebenen anweist, welche  $Y$  und  $X_1$  enthalten. Die beide Gleichungen bestimmen zusammen die  $(m+n)^2$  Congruenzstrahlen, welche nach  $Y$  zielen.

Wir legen jetzt den Punkt  $Y$  auf die Gerade  $X_3 X_4$  und setzen deshalb

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= 0, \\ y_2 &= 0, \\ y_3 &= \mu_3 y, \\ y_4 &= \mu_4 y. \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (55b)$$

Die Gleichungen (53b) und (54b) bekommen dadurch diese Gestalt:

$$(-\mu_1)^m \mu_3^n x_1^{m+n} = (\mu_3 x_4 - \mu_4 x_3)^{m+n}, \quad \cdot \cdot \cdot \quad (56b)$$

$$(-\mu_4)^m \mu_3^n x_2^{m+n} = (\mu_3 x_4 - \mu_4 x_3)^{m+n} \cdot \cdot \cdot \quad (57b)$$

Soll einer dieser Strahlen die Gerade  $l$  schneiden, so muss den Beziehungen

$$\begin{aligned}x_1 &= a_1 x_3 + b_1' x_4, \\x_2 &= a_2 x_3 + b_2' x_4\end{aligned}$$

genügt werden, wonach wir erhalten:

$$(-\mu_4)^m \mu_3^n (a_1 x_3 + b_1' x_4)^{m+n} = (\mu_3 x_4 - \mu_4 x_3)^{m+n}, \quad (58b)$$

$$(-\mu_4)^m \mu_3^n (a_2 x_3 + b_2' x_4)^{m+n} = (\mu_3 x_4 - \mu_4 x_3)^{m+n}. \quad (59b)$$

Indem wir aus diesen Gleichungen  $x_3$  und  $x_4$  eliminiren, erhalten wir eine Gleichung in  $\mu_3 : \mu_4$ , welche diejenigen Punkte auf  $X_3 X_4$  bestimmt, denen Congruenzstrahlen entstammen, welche  $l$  schneiden.

Wir bemerken, dass ein Wert für  $\mu_3 : \mu_4$   $m + n$  Werte für das Verhältniss  $x_3 : x_4$  bestimmt; wir schliessen somit, dass, wenn es überhaupt durch einen Punkt von  $X_3 X_4$  Congruenzstrahlen giebt, welche  $l$  schneiden, diese in der Zahl  $m + n$  vorkommen. Ein solcher Punkt von  $X_3 X_4$  ist daher ein  $(m + n)$ -facher.

Aus (58b) und (59b) folgt

$$\mu_3 x_4 - \mu_4 x_3 = (-\mu_4)^{\frac{m}{m+n}} \mu_3^{\frac{n}{m+n}} (a_1 x_3 + b_1' x_4),$$

und

$$\mu_3 x_4 - \mu_4 x_3 = (-\mu_4)^{\frac{m}{m+n}} \mu_3^{\frac{n}{m+n}} (a_2 x_3 + b_2' x_4),$$

also

$$\frac{\mu_4 + (-\mu_4)^{\frac{m}{m+n}} \mu_3^{\frac{n}{m+n}} a_1}{\mu_4 + (-\mu_4)^{\frac{m}{m+n}} \mu_3^{\frac{n}{m+n}} a_2} = \frac{\mu_3 - (-\mu_4)^{\frac{m}{m+n}} \mu_3^{\frac{n}{m+n}} b_1'}{\mu_3 - (-\mu_4)^{\frac{m}{m+n}} \mu_3^{\frac{n}{m+n}} b_2'},$$

oder

$$\begin{aligned}&\mu_3 \mu_4 + (-\mu_4)^{\frac{2m+n}{m+n}} \mu_3^{\frac{n}{m+n}} b_2' + (-\mu_4)^{\frac{m}{m+n}} \mu_3^{\frac{m+2n}{m+n}} a_1 - (-\mu_4)^{\frac{2m}{m+n}} \mu_3^{\frac{2n}{m+n}} a_1 b_2' = \\&= \mu_3 \mu_4 + (-\mu_4)^{\frac{2m+n}{m+n}} \mu_3^{\frac{n}{m+n}} b_1' + (-\mu_4)^{\frac{m}{m+n}} \mu_3^{\frac{m+2n}{m+n}} a_2 - (-\mu_4)^{\frac{2m}{m+n}} \mu_3^{\frac{2n}{m+n}} a_2 b_1',\end{aligned}$$

daher

$$(-\mu_4)^{\frac{m}{m+n}} \mu_3^{\frac{n}{m+n}} [\mu_3 (a_1 - a_2) + \mu_4 (b_1' - b_2') - (-\mu_4)^{\frac{m}{m+n}} \mu_3^{\frac{n}{m+n}} (a_1 b_2' - a_2 b_1')] = 0.$$

Wir finden demnach

$$\begin{aligned}\mu_4^m &= 0, \\ \mu_3^n &= 0\end{aligned}$$

und

$$[\mu_3(a_1 - a_2) + \mu_4(b_1' - b_2')]^{m+n} - (-\mu_4)^m \mu_3^n (a_1 b_2' - a_2 b_1')^{m+n} = 0. \quad (60b)$$

Die Gleichung  $\mu_4^m = 0$  weist  $m$  mal den Punkt  $X_3$ , die Gleichung  $\mu_3^n = 0$   $n$  mal den Punkt  $X_4$  an.

Dagegen bestimmt die Gleichung (60b)  $m + n$  Punkte  $X_\mu$  auf  $X_3 X_4$ , denen Congruenzstrahlen entstammen, welche  $l$  schneiden, also  $m + n$  Punkte der axialen Regelfläche von  $l$ .

Da jeder Punkt  $X_\mu$   $m + n$  Strahlen der Regelfläche trägt, so ist er ein  $(m + n)$ -facher Punkt.

Es liegen daher auf  $X_3 X_4$ , ausserhalb  $X_3$  und  $X_4$ ,  $m + n$   $(m + n)$ -fache Punkte, welche durch (60b) gegeben sind.

Wenn man einen der aus (60b) folgenden Werte  $\mu_3 : \mu_4$  in die Gleichung (58b) (oder (59b)) einsetzt, so findet man  $m + n$  Werte für  $x_3 : x_4$ , welche die Punkte auf  $l$  anweisen, wo die dem  $X_\mu$  entstammenden Congruenzstrahlen  $l$  schneiden.

Die Punkte  $X_3$  und  $X_4$  sind nicht  $(m + n)$ -fache, sondern  $mn$ -fache Punkte der Regelfläche. Die Gerade  $X_3 X_4$  hat ja mit der Regelfläche  $(m + n)^2 + 2mn$  Punkte gemein von denen  $(m + n)^2$  sich in den  $m + n$   $(m + n)$ -fachen Punkten  $X_\mu$  befinden, während die übrigen  $2mn$  in  $X_3$  und  $X_4$  liegen, also  $mn$  in  $X_3$  und  $mn$  in  $X_4$ . Die Punkte  $X_3$  und  $X_4$  sind daher  $mn$ -fache.

Wir wollen nun die Congruenzstrahlen studiren, welche der Nähe von  $X_3$  entstammen.

Ein Congruenzstrahl, welcher nahe bei  $X_3$  verläuft, wird in der Nähe der Ebene  $\omega_\infty$  bleiben; wenn er ausserdem  $l$  schneiden soll, so muss er beinahe mit der Gerade  $X_3 A$  coincidiren. Er wird alsdann  $\omega_0$  treffen in der Nähe von  $A_3$ , dem Schnittpunkte von  $X_3 A$  mit  $X_1 X_2$ .

Die Congruenzstrahlen aber, welche nahe an  $A_3$  ausmünden, also  $\omega_0$  in der Nähe von  $X_4 A_3$  schneiden, werden  $\omega_\infty$  treffen in Punkten, welche auf den Bildern von  $X_4 A_3$  liegen, m. a. W.: die Punkte  $P$  in der Nähe von  $X_3$ , die Strahlen tragen, welche  $\omega_0$  nahe an  $A_3$  durchbohren, müssen auf denjenigen Geraden  $X_3 P$  liegen, deren Richtungen derjenigen von  $X_4 A_3$  zugeordnet sind. Wir gelangen somit zu der Einsicht, dass die zu  $X_3$  benachbarten Punkte der Kurve in  $\omega_\infty$  sich auf den  $m$  Bildern von  $X_4 A_3$  befinden müssen, oder auch: von den  $mn$  Tangenten in  $X_3$  an der Kurve in  $\omega_\infty$  sind je  $n$  vereinigt in einem der  $m$  Bilder von  $X_4 A_3$ .



Zu diesem Resultat sind wir auf S. 230 in analytischer Weise gelangt.

Wir wählen jetzt für den Sammelpunkt  $Y$  einen zu  $X_3$  benachbarten Punkt in  $\omega_\infty$ , und setzen demgemäss

$$\begin{aligned} y_1 &= \rho_1 y_3, \\ y_2 &= \rho_2 y_3, \\ y_4 &= 0, \end{aligned}$$

wo  $\rho_1$  und  $\rho_2$  kleine Grössen darstellen.

Die durch diesen Punkt  $Y$  ( $p_1 = \rho_1, p_2 = \rho_2$ ) getragenen Strahlen sind offenbar durch

$$\left. \begin{aligned} \rho_1^m (x_1 - \rho_1 x_3)^n &= x_4^n, \\ \rho_2^m (x_2 - \rho_2 x_3)^n &= x_4^n \end{aligned} \right\}$$

bestimmt. Sollen sie  $l$  schneiden, so muss

$$\begin{aligned} \rho_1^m (a_1 x_3 + b_1' x_4 - \rho_1 x_3)^n &= x_4^n, \\ \rho_2^m (a_2 x_3 + b_2' x_4 - \rho_2 x_3)^n &= x_4^n, \end{aligned}$$

wonach

$$\frac{a_1 - \rho_1}{a_2 - \rho_2} = \frac{b_1' - \rho_1^{-\frac{m}{n}}}{b_2' - \rho_2^{-\frac{m}{n}}},$$

oder, wenn wir

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sigma_1 \rho, \\ \rho_2 &= \sigma_2 \rho \end{aligned}$$

setzen,

$$\frac{a_1 - \sigma_1 \rho}{a_2 - \sigma_2 \rho} = \frac{b_1' - \sigma_1^{-\frac{m}{n}} \rho^{-\frac{m}{n}}}{b_2' - \sigma_2^{-\frac{m}{n}} \rho^{-\frac{m}{n}}},$$

daher

$$\begin{aligned} &a_1 b_2' - a_2 b_1' - (\sigma_1 b_2' - \sigma_2 b_1') \rho + \\ &+ (\sigma_1^{-\frac{m}{n}} a_2 - \sigma_2^{-\frac{m}{n}} a_1) \rho^{-\frac{m}{n}} + (\sigma_1 \sigma_2^{-\frac{m}{n}} - \sigma_2 \sigma_1^{-\frac{m}{n}}) \rho^{\frac{m}{n} - \frac{m}{n}} = 0, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} &\sigma_1^{-\frac{m}{n}} a_2 - \sigma_2^{-\frac{m}{n}} a_1 = \\ &= (\sigma_2 \sigma_1^{-\frac{m}{n}} - \sigma_1 \sigma_2^{-\frac{m}{n}}) \rho - (a_1 b_2' - a_2 b_1') \rho^{\frac{m}{n}} + (\sigma_1 b_2' - \sigma_2 b_1') \rho^{1 + \frac{m}{n}}. \end{aligned}$$

Wir setzen voraus:  $m > n$ , wonach  $\rho^{\frac{m}{n}}$  klein ist in Bezug auf  $\rho$ . In der Voraussetzung  $m > n$  können wir demnach annähernd setzen:

$$\sigma_1^{-\frac{m}{n}} a_2 - \sigma_2^{-\frac{m}{n}} a_1 = (\sigma_2 \sigma_1^{-\frac{m}{n}} - \sigma_1 \sigma_2^{-\frac{m}{n}}) \rho. \quad (61b)$$

Die nach dem Punkte  $Y$  ( $p_1 = \sigma_1 \rho$ ,  $p_2 = \sigma_2 \rho$ ) zielenden Congruenzstrahlen sind durch

$$\begin{aligned} x_1 - \sigma_1 \rho x_3 &= \sigma_1^{-\frac{m}{n}} \rho^{-\frac{m}{n}} x_4, \\ x_2 - \sigma_2 \rho x_3 &= \sigma_2^{-\frac{m}{n}} \rho^{-\frac{m}{n}} x_4 \end{aligned}$$

bestimmt.

Wir wollen ihre Spuren auffinden in einer durch  $X_1 X_2$  gelegten Ebene, welche wir durch

$$\begin{aligned} x_3 &= \mu_3 x, \\ x_4 &= \mu_4 x \end{aligned}$$

anweisen werden.

Die Spuren sind alsdann gegeben durch

$$\begin{aligned} x_1 &= (\mu_3 \sigma_1 \rho + \mu_4 \sigma_1^{-\frac{m}{n}} \rho^{-\frac{m}{n}}) x, \\ x_2 &= (\mu_3 \sigma_2 \rho + \mu_4 \sigma_2^{-\frac{m}{n}} \rho^{-\frac{m}{n}}) x. \end{aligned}$$

Indem wir ihre Verbindungslinien mit  $A_3$  ( $a_2 x_1 - a_1 x_2 = 0, x = 0$ ) durch

$$x = \lambda (a_2 x_1 - a_1 x_2)$$

darstellen, ist  $\lambda$  bestimmt aus

$$1 = \lambda [\mu_3 (\sigma_1 a_2 - \sigma_2 a_1) \rho + \mu_4 (\sigma_1^{-\frac{m}{n}} a_2 - \sigma_2^{-\frac{m}{n}} a_1) \rho^{-\frac{m}{n}}],$$

oder

$$\lambda = \frac{\rho^{\frac{m}{n}}}{\mu_3 (\sigma_1 a_2 - \sigma_2 a_1) \rho^{1+\frac{m}{n}} + \mu_4 (\sigma_1^{-\frac{m}{n}} a_2 - \sigma_2^{-\frac{m}{n}} a_1) \rho^{-\frac{m}{n}}}.$$

Mit Verwendung der Näherungsformel (61b) erhalten wir

$$\lambda = \frac{\rho^{\frac{m-n}{n}}}{\mu_3 (\sigma_1 a_2 - \sigma_2 a_1) \rho^{\frac{m}{n}} + \mu_4 (\sigma_2 \sigma_1^{-\frac{m}{n}} - \sigma_1 \sigma_2^{-\frac{m}{n}})}. \quad (62b)$$

Wenn wir  $\rho = 0$  setzen, wonach die Spuren in  $A_3$  hineinfallen, so stellt  $\lambda$  die Richtungsconstante der Tangenten in  $A_3$  dar.

Wegen  $m > n$ , bekommen wir für  $\rho = 0$ :

$$\lambda = 0,$$

wenn nur  $\mu_4 \geq 0$ .

In allen durch  $X_1 X_2$  gelegten Ebenen, für welche  $\mu_4 \geq 0$ , d. h. welche nicht mit  $\omega_x$  zusammenfallen, wird die Schnittkurve der axialen Regelfläche in  $A_3$  durch die Gerade  $X_1 X_2$  berührt.

Dagegen wird die Tangente in der Ebene  $\omega_x$  ( $\mu_4 = 0$ ) durch

$$\lambda = \frac{1}{\mu_3 (\sigma_1 a_2 - \sigma_2 a_1) \rho} = \infty$$

angewiesen; die Gleichung der Tangente lautet demnach

$$a_2 x_1 - a_1 x_2 = 0.$$

Die Tangente ist alsdann mit der Gerade  $X_3 A_3$  (oder  $X_3 A$ ) identisch.

In der Tat enthält der Schnitt mit  $\omega_x$  die Gerade  $X_3 A$  als Ausartungselement.

Die Gesamtheit aller Tangenten in den Ebenen ( $x_3 = \mu_3 x$ ,  $x_4 = \mu_4 x$ ) wird ermittelt, indem wir in (62b)  $\mu_3$  durch  $x_3 : x$ ,  $\mu_4$  durch  $x_4 : x$  und  $\lambda$  durch  $x : (a_2 x_1 - a_1 x_2)$  ersetzen. Wir finden alsdann

$$(\sigma_1 a_2 - \sigma_2 a_1) \rho^{\frac{m}{n}} x_3 + (\sigma_2 \sigma_1^{-\frac{m}{n}} - \sigma_1 \sigma_2^{-\frac{m}{n}}) x_4 = \rho^{\frac{m-n}{n}} (a_2 x_1 - a_1 x_2).$$

Für verschwindendes  $\rho$  wird dies

$$x_4 = 0.$$

Alle Tangenten im Punkte  $A_3$  sind also in der Ebene  $\omega_x$  aufgespeichert, welche sich so zu sagen in  $X_3 A$  schneidet.

Da die  $mn$  durch  $X_3$  gehenden Strahlen alle in  $A_3$  ausmünden, so ist  $A_3$  ein  $mn$ -facher Punkt. Sämmtliche Tangenten befinden sich in  $\omega_x$ .

Wir sind also zu dem folgenden Resultat gelangt:

*In der hyperbolischen Congruenz ist  $X_3$  auf der axialen Regelfläche einer willkürlichen Gerade ein  $mn$ -facher Punkt, dessen Tangenten sich alle in der Ebene  $\omega_x$  befinden, während die Schnittkurve mit  $\omega_x$  in  $X_3$  durch die  $m$  Bilder von  $X_4 A_3$  berührt wird. Der Punkt*

$A_3$  ist ebenfalls ein  $mn$ -facher Punkt; seine Tangenten sind alle in der Ebene  $\omega_\infty$  aufgespeichert, während der Schnitt in  $\omega_\infty$  selber die Gerade  $A_3 X_3$  enthält.

Das Verhalten der Punkte  $X_4$  und  $B_4'$  auf die Fläche wird in gleicher Weise erledigt.

Die Strahlen, welche dem Punkt  $X_4$  entstammen, münden in  $B_4'$  aus und umgekehrt. Die  $mn$  durch  $X_4$  hindurchgehenden Strahlen liegen also in  $\omega_0$ . Die benachbarten Strahlen, welche  $\omega_0$  nahe bei  $X_4$  treffen, schneiden  $\omega_0$  in Punkten, welche mit  $X_4$  durch die  $n$  Bilder von  $X_3 B_4'$  verbunden werden.

Es lässt sich der Zustand in  $B_4'$  nicht ohne Weiteres durch Vertauschung von  $m$  und  $n$  aus dem in  $A_3$  herleiten, weil bei der Untersuchung von  $A_3$  die Ungleichheit  $m > n$  besonders betont werden musste.

Wir dürfen aber das Resultat übernehmen bis auf die Stelle, wo in (61b) eine Näherungsformel abgeleitet wurde. Die (61b) vorangehende Gleichung, in welcher noch nichts vernachlässigt worden ist, kann aber ohne Gefahr übersetzt werden.

Wir finden sodann

$$\sigma_1^{-\frac{n}{m}} b_2' - \sigma_2^{-\frac{n}{m}} b_1' = (\sigma_2 \sigma_1^{-\frac{n}{m}} - \sigma_1 \sigma_2^{-\frac{n}{m}}) \rho + (a_1 b_2' - a_2 b_1') \rho^{\frac{n}{m}} + (\sigma_1 a_2 - \sigma_2 a_1) \rho^{1+\frac{n}{m}}.$$

Es ist jetzt  $\rho$  klein in Bezug auf  $\rho^{\frac{n}{m}}$ ; wir dürfen also hier setzen

$$\sigma_1^{-\frac{n}{m}} b_2' - \sigma_2^{-\frac{n}{m}} b_1' = (a_1 b_2' - a_2 b_1') \rho^{\frac{n}{m}}. \quad . \quad . \quad (63b)$$

Für  $\lambda$  erhalten wir zuerst diesen Ausdruck:

$$\lambda = \frac{\rho^{\frac{n}{m}}}{\mu_4 (\sigma_1 b_2' - \sigma_2 b_1') \rho^{1+\frac{n}{m}} + \mu_3 (\sigma_1^{-\frac{n}{m}} b_2' - \sigma_2^{-\frac{n}{m}} b_1')}.$$

Vermöge (63b) können wir nun schreiben:

$$\lambda = \frac{1}{\mu_4 (\sigma_1 b_2' - \sigma_2 b_1') \rho + \mu_3 (a_1 b_2' - a_2 b_1')}. \quad . \quad . \quad (64b)$$

Unter der Annahme  $\mu_3 \leq 0$  finden wir für  $\rho = 0$

$$\lambda = \frac{1}{\mu_3 (a_1 b_2' - a_2 b_1')},$$

oder, da  $\lambda = \frac{x}{b_2' x_1 - b_1' x_2}$ ,  $\mu_3 = \frac{x_3}{x}$

$$b_2' x_1 - b_1' x_2 = (a_1 b_2' - a_2 b_1') x_3,$$

oder

$$b_2' (x_1 - a_1 x_3) = b_1' (x_2 - a_2 x_3).$$

Sämmtliche Tangenten befinden sich also in der Ebene, welche  $X_4$  mit der Gerade  $AB_4'$  verbindet.

Nur wenn die durch  $X_1 X_2$  gelegte Ebene mit  $\omega_0$  zusammenfällt, liegt die Sache anders. Es ist dann  $\mu_3 = 0$ , wonach

$$\lambda = \infty.$$

In  $\omega_0$  ist daher die Tangente durch

$$b_2' x_1 - b_1' x_2 = 0$$

angewiesen und also mit der Gerade  $X_4 B'$  (oder  $X_4 B_4'$ ) identisch. Da diese Gerade auch in der Ebene  $X_4 AB_4'$  liegt, liefert die Ebene  $\omega_0$  tatsächlich keine Ausnahme von den anderen durch  $X_1 X_2$  gelegten Ebenen.

Die letzten Resultaten lassen sich folgendermassen zusammenfassen:

*In der hyperbolischen Congruenz ist  $X_4$  auf der axialen Regelfläche einer willkürlichen Gerade ein  $mn$ -facher Punkt, dessen Tangenten alle in der Ebene  $\omega_0$  liegen, während die Schnittkurve mit  $\omega_0$  in  $X_4$  durch die  $n$  Bilder von  $X_3 B_4'$  berührt wird. Der Punkt  $B_4'$  ist aber hier ein  $n^2$ -facher Punkt (siehe den Schnitt mit  $\omega_\infty$ ), während alle seine Tangenten sich in der Ebene  $X_4 AB_4'$  ( $X_4, l$ ) befinden.*

Es befindet sich auf der Regelfläche noch eine Doppelkurve vom Grade

$$N + \frac{2mn(2mn-1)}{2},$$

wenn  $N$  die Anzahl der Schnittpunkte von  $l$  mit der Doppelkurve anweist.

Diese Anzahl  $N$  lässt sich in derselben Weise wie bei der parabolischen Congruenz bestimmen. (Siehe S. 218—223).

Der Schnitt der axialen Regelfläche mit einer durch  $X_1 X_2$  gelegten Ebene  $\omega_\mu$  ( $x_3 = \mu x_4$ ) hat

in  $X_1$  einen  $2mn$ -fachen Punkt, in welchem  $mn$  Tangenten zu

je  $m$  in die Geraden zusammengefallen sind, in denen die Ebene  $\omega_\mu$  durch die  $n$  Ebenen (46*b*) geschnitten wird, während die übrigen  $mn$  Tangenten zu je  $n$  in den  $m$  Geraden vereinigt sind, in denen  $\omega_\mu$  durch die  $m$  Ebenen (46'*b*) geschnitten wird;

in  $X_3$  einen  $2mn$ -fachen Punkt, in dem  $mn$  Tangenten zu je  $m$  in die Geraden zusammengefallen sind, in welchen die Ebene  $\omega_\mu$  durch die  $n$  Ebenen (45*b*) geschnitten wird, während die übrigen  $mn$  Tangenten zu je  $n$  in den  $m$  Geraden vereinigt sind, in denen  $\omega_\mu$  durch die  $m$  Ebenen (45'*b*) geschnitten wird;

in  $A_3$  einen  $mn$ -fachen Punkt, dessen sämtliche Tangenten in der Geraden  $X_1 X_2$  vereinigt sind (ausgenommen wenn die Ebene mit  $\omega_\infty$  identisch ist);

in  $B_4'$  einen  $n^2$ -fachen Punkt, dessen Tangenten alle mit der Schnittlinie von  $\omega_\mu$  mit der Ebene  $X_4 AB_4'$  ( $X_4, l$ ) identisch sind;

in  $C_\mu$ , dem Schnittpunkte von  $\omega_\mu$  mit  $l$  einen  $(m+n)^2$ -fachen Punkt, dessen Tangenten durch die  $(m+n)^2$  nach  $C_\mu$  zielenden Congruenzstrahlen bestimmt werden;

Doppelpunkte in den Punkten, wo  $\omega_\mu$  die Doppelkurve trifft.

Falls die Ebene  $\omega_\mu$  mit einer der durch (60*b*) gegebenen Ebenen zusammenfällt, hat der Schnitt noch einen  $(m+n)$ -fachen Punkt im Schnittpunkte  $X_\mu$  von  $\omega_\mu$  mit  $X_3 X_4$ .

§ 7a. Die axiale Regelfläche einer  $X_3 X_4$  schneidenden Gerade in der **parabolischen** Congruenz.

Wenn die Axe  $l$  der Regelfläche die Gerade  $X_3 X_4$  schneidet, so treten einige neuen Eigenschaften hervor, da  $X_3 X_4$  auch ein Congruenzstrahl ist, und somit in diesem Falle der Regelfläche angehört.

Weil die Gerade  $l$  mit  $X_3 X_4$  in einer Ebene liegt, so hat man

$$\frac{b_2'}{b_1'} = \frac{a_2}{a_1} = t, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

wonach zuerst

$$a_1 b_2' - a_2 b_1' = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (82)$$

Die Gleichung (21a) der in  $\omega_\infty$  liegenden Kurve bekommt jetzt diese Gestalt (siehe S. 199):

$$(p_2 - ta_1)p_1^{\frac{m}{n}} - (p_1 - a_1)p_2^{\frac{m}{n}} + tb_1'p_1 - b_1'p_2 = 0.$$

Ersetzen wir  $p_1$  durch  $x_1:x_3$  und  $p_2$  durch  $x_2:x_3$ , so folgt

$$(x_2 - ta_1 x_3) x_1^{\frac{n}{m}} - (x_1 - a_1 x_3) x_2^{\frac{n}{m}} + b_1' (tx_1 - x_2) x_3^{\frac{n}{m}} = 0. \quad (83a)$$

Es leuchtet ein, dass  $X_3$  ein Punkt des in  $\omega_\infty$  liegenden Schnittes ist. Die Tangenten in  $X_3$  werden durch

$$tx_1 - x_2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (84a)$$

also in der rationalen Gleichung durch

$$(tx_1 - x_2)^{n^2} = 0$$

dargestellt. Der Punkt  $X_3$  ist demnach ein  $n^2$ -facher, dessen sämtliche Tangenten mit der Gerade (84a), d. h. der Gerade  $X_3 A$  zusammengefallen sind.

Die Substitution  $x_2 = tx_1$  sondert in (83a) einen Faktor  $x_1^{\frac{n}{m}}$  ab; die Tangente (84a) hat also in  $X_3$   $mn$  Punkte mit der Kurve gemein. Daher:

*Die Kurve, welche dem Schnitte von  $\omega_\infty$  mit der axialen Regel-  
fläche einer  $X_3 X_4$  schneidenden Gerade angehört, hat in  $X_3$  einen  
 $n^2$ -fachen Punkt, dessen Tangenten alle in  $X_3 A$  vereinigt sind; diese  
Tangente hat in  $X_3$   $mn$  Punkte mit der Kurve gemein.*

Die Gleichung (35a) verwandelt sich in

$$\frac{p_1'^{\frac{n}{m}} - a_1}{p_1' - b_1'} = \frac{p_2'^{\frac{n}{m}} - ta_1}{p_2' - tb_1'},$$

oder

$$(p_2' - tb_1') p_1'^{\frac{n}{m}} - (p_1' - b_1') p_2'^{\frac{n}{m}} + a_1 (tp_1' - p_2') = 0.$$

Wenn wir  $p_1'$  durch  $x_1: x_4$  und  $p_2'$  durch  $x_2: x_4$  ersetzen, so finden wir für die Gleichung des Schnittes in  $\omega_0$ :

$$(x_2 - tb_1' x_4)^{\frac{n}{m}} - (x_1 - b_1' x_4) x_2^{\frac{n}{m}} + a_1 (tx_1 - x_2) x_4^{\frac{n}{m}} = 0. \quad (85a)$$

$X_4$  erscheint hier als ein Punkt der Kurve. Der Coefficient der höchsten Potenz von  $x_4$ , d. h.  $x_4^1$ , ist  $b_1' (tx_1^{\frac{n}{m}} - x_2^{\frac{n}{m}})$ . Die Tangenten in  $X_4$  werden somit durch

$$tx_1^{\frac{n}{m}} - x_2^{\frac{n}{m}} = 0,$$

oder

$$t^m x_1^n - x_2^n = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (86a)$$

also in der rationalen Gleichung durch

$$(t^m x_1^n - x_2^n)^m = 0$$

bestimmt. Der Punkt  $X_4$  ist daher ein  $mn$ -facher. Von seinen Tangenten sind je  $m$  in einer der  $n$  durch (86a) dargestellten Geraden vereinigt. Die Gleichung (86a), oder

$$\frac{x_2}{x_1} = t^{\frac{m}{n}},$$

zeigt, dass es die  $n$  in  $\omega_0$  liegenden Bilder der Gerade  $X_3 A$  sind.

Die Substitution  $x_2 = t^{\frac{m}{n}} x_1$  sondert einen Factor  $x_1$  ab; die Tangente hat also in  $X_4$   $m^2$  Punkte mit der Kurve gemein. Also:

*Der Schnitt von  $\omega_0$  mit der axialen Regelfläche einer  $X_3 X_4$  schneidenden Gerade, hat in  $X_4$  einen  $mn$ -fachen Punkt, von dessen Tangenten je  $m$  mit einer der  $n$  Bilder von  $X_3 A$  zusammengefallen sind. Es hat jede dieser Tangenten in  $X_4$   $m^2$  Punkte mit der Kurve gemein.*

Wir wollen nun die Congruenzstrahlen untersuchen, welche durch einen Punkt von  $X_3 X_4$  gehen und  $l$  schneiden. Wir wählen vorläufig den Sammelpunkt  $Y$  in der Nähe von  $X_3 X_4$ , und setzen demgemäss

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \rho_1 y_4, \\ y_2 &= \rho_2 y_4, \\ y_3 &= \nu y_4. \end{aligned} \right\} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (87)$$

Die  $m^2$  sich auf  $Y$  stützenden Strahlen sind hier (siehe (53a) und (54a) auf S. 213) durch

$$\left. \begin{aligned} (\nu x_1 - \rho_1 x_3)^n (\nu x_4 - x_3)^{m-n} - (\rho_1 x_4 - x_1)^m &= 0, \\ (\nu x_2 - \rho_2 x_3)^n (\nu x_4 - x_3)^{m-n} - (\rho_2 x_4 - x_2)^m &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (88a)$$

angewiesen.

Soll ein durch diese Gleichungen bestimmter Strahl  $l$  schneiden, so müssen die folgenden Gleichungen von einander abhängig sein:

$$\begin{aligned} (\nu a_1 x_3 + \nu b_1' x_4 - \rho_1 x_3)^n (\nu x_4 - x_3)^{m-n} - (\rho_1 x_4 - a_1 x_3 - b_1' x_4)^m &= 0, \\ (t \nu a_1 x_3 + t \nu b_1' x_4 - \rho_2 x_3)^n (\nu x_4 - x_3)^{m-n} - (\rho_2 x_4 - t a_1 x_3 - t b_1' x_4)^m &= 0. \end{aligned}$$

Es ist klar, dass die Abhängigkeit erfordert:



$$\rho_2 = \iota \rho_1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (89a)$$

Wenn wir den Punkt *auf*  $X_3 X_4$  annehmen, so ist

$$\rho_1 = 0, \rho_2 = 0.$$

Die Gleichungen (87) reduciren sich somit auf

$$\left. \begin{aligned} x_1^n &= 0, \\ x_2^n &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Von den  $m^2$  Strahlen, welche nach einem Punkte von  $X_3 X_4$  zielen, fallen also  $n^2$  mit  $X_3 X_4$  zusammen.

Wir schneiden die Strahlen (88a) jetzt mit einer durch  $X_1 X_2$  gelegten Ebene

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= \mu_3 x, \\ x_4 &= \mu_4 x. \end{aligned} \right\}$$

Die Schnittpunkte  $(x_1, x_2, x)$  mit dieser Ebene werden alsdann durch

$$(\nu x_1 - \mu_3 \rho_1 x)^n (\mu_4 \nu - \mu_3)^{m-n} x^{m-n} - (\mu_4 \rho_1 x - x_1)^m = 0, \quad (90a)$$

$$(\nu x_2 - \mu_3 \rho_2 x)^n (\mu_4 \nu - \mu_3)^{m-n} x^{m-n} - (\mu_4 \rho_2 x - x_2)^m = 0 \quad (91a)$$

angewiesen. Für die nahe an  $X_3 X_4$  liegenden Schnittpunkte haben die Coordinaten  $x_1$  und  $x_2$  kleine Werte. Wir wollen daher  $x_1$  nach Potenzen von  $\rho_1$  entwickeln, und zwar folgendermassen:

$$x_1 = (\alpha_1 \rho_1 + \beta_1 \rho_1^\lambda) x,$$

wo  $\lambda > 1$  vorausgesetzt wird.

Die Gleichung (90a) giebt sodann

$$(\nu \alpha_1 - \mu_3 + \nu \beta_1 \rho_1^{\lambda-1})^n (\mu_4 \nu - \mu_3)^{m-n} - (\mu_4 - \alpha_1 - \beta_1 \rho_1^{\lambda-1})^m \rho_1^{m-n} = 0. \quad (92a)$$

Setzen wir nun

$$\rho_1 = 0,$$

so folgt

$$\nu \alpha_1 - \mu_3 = 0,$$

wonach

$$\alpha_1 = \frac{\mu_3}{\nu},$$

also

$$x_1 = \frac{\mu_3}{\nu} \rho_1 x.$$

In gleicher Weise können wir aus (91a) herleiten:

$$x_2 = \frac{\mu_3}{\nu} \rho_2 x,$$

oder, mittels (89a),

$$x_2 = t \frac{\mu_3}{\nu} \rho_1 x.$$

Die Gerade, welche den Schnittpunkt des Congruenzstrahles mit der Spur  $X_\mu$  von  $X_3 X_4$  verbindet, hat also die Gleichung

$$\frac{x_2}{x_1} = t.$$

Aus diesem Resultat geht hervor, dass in jeder durch  $X_1 X_2$  gelegten Ebene die  $n^2$  Tangenten des  $n^2$ -fachen Punktes  $X_\mu$  vereinigt sind in der Gerade, welche  $X_\mu$  mit dem Schnittpunkte  $C_\mu$  dieser Ebene mit  $l$  verbindet.

Wir haben aber zu beachten, dass die obigen Betrachtungen hinfällig werden, so bald man hat

$$\mu_3 = 0;$$

der obige Schluss gilt also tatsächlich für alle durch  $X_1 X_2$  gelegten Ebenen, *ausgenommen*  $\omega_0$ .

Betrachten wir jetzt den Zustand in  $\omega_0$ . Indem wir  $\mu_3 = 0$  setzen, verwandelt (92a) sich in

$$(\nu \alpha_1 + \nu \beta_1 \rho_1^{\lambda-1})^n (\mu_4 \nu)^{m-n} - (\mu_4 - \alpha_1 - \beta_1 \rho_1^{\lambda-1})^m \rho_1^{m-n} = 0.$$

Nun liefert  $\rho_1 = 0$

$$\alpha_1 = 0,$$

daher

$$\nu^m \mu_4^{m-n} \beta_1^n \rho_1^{n(\lambda-1)} - \mu_4^m \rho_1^{m-n} = 0,$$

wenn höhere Potenzen von  $\rho_1$  niedrigeren gegenüber vernachlässigt werden. Aus dieser Gleichung schliessen wir dass

$$1^\circ. \quad n(\lambda - 1) = m - n,$$

oder

$$\lambda = \frac{m}{n},$$

2°.

$$\nu^m \beta_1^n = \mu_4^n,$$

oder

$$\beta_1 = \frac{\mu_1}{\nu^n},$$

wonach wir für  $x_1$  finden:

$$x_1 = \frac{\mu_1}{\nu^n} \rho_1^{\frac{m}{n}} x = \left( \frac{\rho_1}{\nu} \right)^{\frac{m}{n}} x_4.$$

In analoger Weise würden wir für  $x_2$  erhalten

$$x_2 = \left( \frac{\rho_2}{\nu} \right)^{\frac{m}{n}} x_4 = \left( \frac{t \rho_1}{\nu} \right)^{\frac{m}{n}} x_4,$$

daher

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{t^m}{\nu^n}.$$

In  $\omega_0$ , so schliessen wir, sind die Tangenten in  $X_4$  durch  $x_2 : x_1 = t^{\frac{m}{n}}$  angewiesen, demnach mit den  $n$  Bildern von  $X_3 A$  identisch.

Die oben gewonnenen Resultaten bekommen ihren Ausdruck im folgenden Satze:

*Auf der axialen Regelfläche einer  $X_3 X_4$  schneidenden Gerade ist  $X_3 X_4$  eine  $n^2$ -fache Gerade, deren Berührungsebenen alle vereinigt sind in der Ebene, welche  $X_3 X_4$  mit  $l$  verbindet. Nur in  $\omega_0$  liegt die Sache anders: dort ist  $X_4$  ein  $mn$ -facher Punkt, von dessen Tangenten je  $m$  in einer der  $n$  Bilder von  $X_3 A$  vereinigt sind.*

Der Schnitt der Regelfläche mit einer durch  $X_1 X_2$  gelegten Ebene  $\omega_\mu$  ( $x_3 = \mu x_1$ ) hat, ausser den Singularitäten des allgemeinen Falles (siehe S. 223), noch einen  $n^2$ -fachen Punkt im Schnittpunkte  $X_\mu$  der Ebene  $\omega_\mu$  mit  $X_3 X_4$ ; die Tangenten in  $X_\mu$  sind alle vereinigt in der Gerade, welche  $X_\mu$  mit der Spur  $C_\mu$  von  $l$  in  $\omega_\mu$  verbindet (ausgenommen wenn  $\mu = 0$ ).

Die Ebene, welche  $X_1 X_2$  mit dem Schnittpunkt  $S$  von  $l$  und  $X_3 X_4$  verbindet, hat in  $X_\mu = S$  einen  $m^2$ -fachen Punkt. Von den  $m^2$  Tangenten sind  $n^2$  in der Schnittlinie der Ebene  $\omega_\mu$  mit der durch  $X_3 X_4$  und  $l$  gelegten Ebene ( $x_2 = t x_1$ ) zusammengefallen.

Wir wollen uns noch besonders beschäftigen mit zwei Lagen von  $l$ , welche für die axiale Regelfläche zu gewissen Eigentümlichkeiten

Veranlassung geben, nl. mit den Fällen, wo  $l$  entweder  $X_3$  oder  $X_4$  enthält.

Zuerst betrachten wir den Fall, wo  $l$  durch  $X_3$  hindurchgeht.

Die Strahlen  $p$ , welche aus einem Punkte  $P'$  ( $p'_1, p'_2$ ) von  $\omega_0$  entstammen, schneiden  $\omega_\infty$  in  $m^2$  Punkten  $P$ , welche durch

$$p_1 = p'_1{}^{\frac{n}{m}}, p_2 = p'_2{}^{\frac{n}{m}}$$

gegeben sind. Die Coordinaten  $p_1$  und  $p_2$  sind also beide  $m$ -deutig. Wenn wir einen der  $m$  Werte von  $p_1$  mit  $q_1$  und einen der  $m$  Werte von  $p_2$  mit  $q_2$  bezeichnen und zwei  $m^{\text{te}}$ -Wurzeln der Einheit durch  $\tau_m$  und  $\tau_m'$  anweisen, so haben wir

$$p_1 = \tau_m q_1, p_2 = \tau_m' q_2,$$

wonach

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\tau_m}{\tau_m'} \cdot \frac{q_1}{q_2}.$$

Es geschieht  $m$  mal, dass  $\tau_m' = \tau_m$ ; daher liegen jedesmal  $m$  Bilder  $P$  von  $P'$  in einer Geraden mit  $X_3$ .

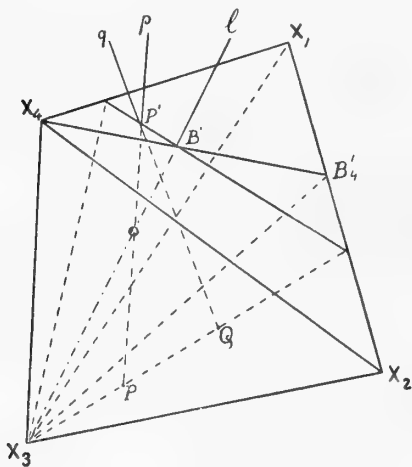


Fig. 11.

Eine durch  $l$  ( $X_3 B'$ ) gelegte Ebene wird zwei Congruenzstrahlen  $p$  und  $q$  enthalten, wenn ihre Spuren  $P$  und  $Q$  in  $\omega_\infty$  in einer Geraden liegen mit der Spur  $X_3$  von  $l$  in  $\omega_\infty$ . Durch die Spur  $P'$  von  $p$  in  $\omega_0$  gehen nun  $m$  Congruenzstrahlen deren Spuren  $P, Q, \dots$  mit  $X_3$  allineirt sind.

Wenn also  $l$  in der Ebene ( $X_3, p$ ) liegt, so liegt  $l$  auch in der Ebene ( $X_3, q$ ) u. s. w.; die Ebene, welche  $l$  mit  $P'$  verbindet, enthält demnach  $m$  sich in  $P'$  treffende Congruenzstrahlen.

Wir ziehen den Schluss, dass in jedem Punkte des Schnittes der axialen Regelfläche mit  $\omega_0$   $m$  Erzeugenden dieser Regelfläche zusammentreffen, wonach der Schnitt in  $\omega_0$  eine  $m$ -fache Kurve ist.

Der Schnitt in  $\omega_0$ , welcher im allgemeinen Falle eine Kurve vom Grade  $m(m+n)$  war, ist jetzt eine  $m$ -fache Kurve vom Grade  $m+n$ . Überdies leuchtet ein, dass die Ordnung jeder Singularität  $m$ -fach erniedrigt ist. Es ist also jetzt  $X_4$  ein  $n$ -facher Punkt, dessen

Tangenten die Bilder sind der Gerade (früher  $X_3 A$ ), in der die durch  $l$  und  $X_3 X_4$  gelegte Ebene die Ebene  $\omega_\infty$  schneidet, also der Gerade  $X_3 B_4'$ .

Es ist ferner  $B'$  ein  $m$ -facher Punkt; da von den  $m^2$  in  $\omega_\infty$  liegenden Bildern  $B$  von  $B'$  je  $m$  sich mit  $X_3$  in einer Gerade befinden, werden sie aus  $l$  auf  $\omega_0$  axial projicirt in nur  $m$  verschiedene durch  $B'$  gehende Geraden, welche offenbar die Tangenten in  $B'$  sind.

Es ist  $X_1$  nun ein  $n$ -facher Punkt, dessen Tangenten die  $n$  Bilder von  $X_1 A$ , d. h.  $X_1 X_3$  sind. Diese  $n$  Bilder sind aber alle in der Gerade  $X_1 X_4$  vereinigt, wonach alle Tangenten des  $n$ -fachen Punktes  $X_1$  mit  $X_1 X_4$  zusammengefallen sind. Ebenso ist  $X_2$  ein  $n$ -facher Punkt, dessen Tangenten alle in  $X_2 X_4$  vereinigt sind.

Die Untersuchung der Punkte  $E_\tau$  muss aber aufs Neue angefangen werden, weil der Coefficient der höchsten Potenz von  $\xi_1$  ( $\xi_1^{m+n-\frac{n}{m}}$ ) in der Gleichung (44a) (S. 209)

$$(a_2 - a_1 \tau) \xi_4^{\frac{n}{m}}$$

war. Dieser Coefficient verschwindet also hier, wo  $a_1 = a_2 = 0$ ; unser frühere Schluss wird somit hinfällig.

Die Kurve in  $\omega_0$  ist jetzt (siehe (85a) S. 243) angewiesen durch

$$(x_2 - b_2' x_4) x_1^{\frac{n}{m}} - (x_1 - b_1' x_4) x_2^{\frac{n}{m}} = 0,$$

oder

$$(x_2 - b_2' x_4)^m x_1^n - (x_1 - b_1' x_4)^m x_2^n = 0. \quad . \quad . \quad (93a)$$

Indem wir

$$x_2 = \tau x_1 + x_2'$$

substituieren, finden wir

$$(\tau x_1 + x_2' - b_2' x_4)^m x_1^n = (x_1 - b_1' x_4)^m (\tau x_1 + x_2')^n,$$

oder

$$\begin{aligned} & \tau^m x_1^{m+n} + m \tau^{m-1} x_1^{m+n-1} (x_2' - b_2' x_4) + \dots = \\ & = (x_1^m - m b_1' x_1^{m-1} x_4 + \dots) (\tau^n x_1^n + n \tau^{n-1} x_1^{n-1} x_2' + \dots) \\ & = \tau^n x_1^{m+n} + \tau^{n-1} (n x_2' - m \tau b_1' x_4) x_1^{m+n-1} + \dots; \end{aligned}$$

die Tangente in  $E_\tau$  ist, vermöge  $\tau^{m-n} = 1$ , bestimmt durch

$$m(x_2' - b_2' x_4) = n x_2' - m \tau b_1' x_4,$$

oder

$$x_2' = \frac{m(b_2' - \tau b_1')}{m - n} x_4,$$

also

$$(m - n)(x_2 - \tau x_1) - m(b_2' - \tau b_1') x_4 = 0. \quad (94a)$$

Die Punkte  $E_\tau$  sind nun alle gewöhnliche Punkte. Ihre Tangenten sind in (94a) gegeben. Sie convergiren offenbar alle nach dem Punkt  $T_0$

$$T_0 \dots \frac{x_1}{mb_1'} = \frac{x_2}{mb_2'} = \frac{x_4}{m - n}, \quad (95a)$$

welcher sich auf der Gerade  $X_4 B'$  befindet.

Die Kurve in  $\omega_\infty$  hat nun ihren  $n^2$ -fachen Punkt  $A$  in  $X_3$ .

Ihre Gleichung lautet jetzt (siehe (83a), S. 243):

$$x_2 x_1^{\frac{m}{n}} - x_1 x_2^{\frac{m}{n}} + (b_2' x_1 - b_1' x_2)^{\frac{m}{n}} = 0. \quad (96a)$$

Da die Rechnungen auf S. 203—205 ihre Gültigkeit behalten, so können wir in Bezug auf die Punkte  $E_\tau$  das dort gewonnene Resultat übernehmen wenn nur  $a_1 = a_2 = 0$  gesetzt wird.

Für die einzige Tangente im  $n$ -fachen Punkte  $E_\tau$  finden wir alsdann (siehe (31a))

$$\tau \xi_1 - \xi_2 = 0,$$

oder

$$\tau x_1 - x_2 = 0.$$

Die Tangenten in den Punkten  $E_\tau$  verbinden also diese Punkte mit  $X_3$ .

Die Überlegungen, durch welche wir damals (S. 212 u. f.) die Berührungsebenen in den Punkten  $E_\tau$  bestimmt haben, erfahren hier auch eine geringe Änderung.

Aus der Gleichung (63a) (S. 215)

$$\lambda = \frac{(\alpha_2 - \tau \alpha_1 + \rho(b_2' - \tau b_1'))(m - \mu \rho n)}{(m - n)\rho}$$

folgte damals bei verschwindendem  $\rho$  für  $\lambda$

$$\lambda = \frac{(a_2 - \tau a_1)(m - \mu \rho n)}{(m - n)\rho},$$

jetzt aber

$$\lambda = \frac{(b_2' - \tau b_1')(m - \mu \rho n)}{m - n};$$

die Tangente hat nun also diese Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} x_2' = x_2 - \tau x_1 &= \frac{b_2' - \tau b_1'}{m - n} (mx_4 - \rho nx_3), \\ x_3 &= \mu x_4. \end{aligned} \right\}$$

Bei verschwindendem  $\rho$  ist daher die Berührungsebene in  $E_\tau$  durch

$$(m - n)(x_2 - \tau x_1) - m(b_2' - \tau b_1')x_4 = 0$$

angewiesen. Es enthalten diese Berührungsebenen alle die Gerade  $t$

$$\frac{x_1}{mb_1'} = \frac{x_2}{mb_2'} = \frac{x_4}{m - n}, \quad . \quad . \quad . \quad (95a)$$

welche  $X_3$  mit dem in  $\omega_0$  liegenden Punkte  $T_0$  verbindet.

Diese Gerade befindet sich offenbar in der durch  $l$  und  $X_3 X_4$  gelegten Ebene.

Die Punkte  $E_\tau$  sind jetzt  $m$ -fache Punkte.

Der Schnitt mit einer durch  $X_1 X_2$  gelegten Ebene zeigt nun, verglichen mit dem Schnitte der allgemeinen Regelfläche, Abweichungen in den Punkten  $E_\tau$  und natürlich in dem Schnittpunkte  $X_\mu$  der Ebene  $\omega_\mu$  mit  $X_3 X_4$ , welcher auch hier ein  $n^2$ -facher Punkt ist. Während im allgemeinen Falle die Tangente im  $n$ -fachen Punkte  $E_\tau$  immer mit  $X_1 X_2$  zusammenfällt (ausgenommen in  $\omega_\infty$ ), vereinigen sich jetzt alle Tangenten des  $m$ -fachen Punktes  $E_\tau$  in der Gerade, welche  $E_\tau$  mit der Spur  $T_\mu$  von  $t$  in  $\omega_\mu$  verbindet.

Betrachten wir jetzt den Fall, wo  $l$  den Punkt  $X_4$  enthält, so haben wir

$$b_1' = b_2' = 0.$$

Die Überlegung, welche uns im Vohergehenden zu dem Schlusse führte, dass die Kurve in  $\omega_0$   $m$ -fach ist, wenn  $l$  durch  $X_3$  geht, bringt uns jetzt, wo  $l$  durch  $X_4$  geht, zu der Erkenntniss, dass die Kurve in  $\omega_\infty$  eine  $n$ -fache Kurve vom Grade  $m + n$  ist.

Es ist  $X_3$  auf dieser Kurve ein  $m$ -facher Punkt, dessen Tangenten mit den  $m$  Bildern von  $X_4 A_3$  zusammenfallen.

Der Punkt  $X_1$  ist jetzt ein  $n$ -facher, so wie auch der Punkt  $X_2$ . Auch der Punkt  $A$  ist ein  $n$ -facher; seine  $n$  Tangenten sind die axialen Projektionen, aus  $l$  auf  $\omega_\infty$ , der  $n$  Geraden  $X_4 A'$ .

Die Gleichung der in  $\omega_\infty$  befindlichen Kurve lautet

$$(x_2 - a_2 x_3)^n x_1^m - (x_1 - a_1 x_3)^n x_2^m = 0.$$

Der Schnitt in  $\omega_0$  hat die Gleichung

$$x_2 x_1^{\frac{n}{m}} - x_1 x_2^{\frac{n}{m}} + (a_2 x_1 - a_1 x_2) x_4^{\frac{n}{m}} = 0.$$

Hier ist  $X_4$  ein  $m^2$ -facher Punkt, dessen Tangenten alle in  $X_4 A_3$  vereinigt sind.

Da die Gleichung (63a) auf S. 215 hier zu demselben Resultate führt als im allgemeinen Falle, so werden die Punkte  $E_r$  dieselben Eigenschaften aufweisen als bei der Regelfläche der durchaus willkürlichen Gerade.

Hieraus geht auch hervor, dass der Schnitt mit einer durch  $X_1 X_2$  gelegten Ebene  $\omega_\mu$ , ausser seinem  $n^2$ -fachen Punkte  $X_\mu$ , keine Abweichungen vom Schnitte der allgemeinen Regelfläche zeigt.

§ 7b. Die axiale Regelfläche einer  $X_3 X_4$  schneidenden Gerade in der **hyperbolischen** Congruenz.

Auch hier gelten die Beziehungen.

$$\frac{b_2'}{b_1'} = \frac{a_2}{a_1} = t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

und

$$a_1 b_2' - a_2 b_1' = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (82)$$

Da  $l$  mit  $X_3 X_4$  in einer Ebene liegt, so wird der Punkt  $A_3$ , wo  $X_3 A$  die Gerade  $X_1 X_2$  schneidet, mit dem Punkte  $B_4'$  identisch sein, wo die Gerade  $X_1 X_2$  durch  $X_4 B'$  getroffen wird.

Während wir in § 6b (S. 239—241) gefunden haben, dass auf der Fläche  $A_3$  ein  $mn$ -facher und  $B_4'$  ein  $n^2$ -facher Punkt ist, so werden wir nun in  $A_3 \equiv B_4'$  einen  $mn + n^2 = n(m + n)$ -fachen Punkt erkennen.

Die in  $\omega_\infty$  liegende Kurve (siehe (32b), S. 229) wird nun durch

$$(x_1 - a_1 x_3) x_1^{\frac{m}{n}} x_3^{\frac{m}{n}} - (x_2 - t a_1 x_3) x_2^{\frac{m}{n}} x_3^{\frac{m}{n}} - b_1' (t x_1 - x_2) x_1^{\frac{m}{n}} x_2^{\frac{m}{n}} = 0 \quad (83b)$$

dargestellt.



Es ist, wie im allgemeinen Falle,  $X_3$  ein  $mn$ -facher Punkt, von dessen Tangenten je  $n$  in einem der  $m$  Bilder von  $X_4 A_3 \equiv X_4 B'$  vereinigt sind.

Die Kurve schneidet auch die Gerade  $X_1 X_2$ , ausserhalb  $X_1$  und  $X_2$ ,  $n^2$  mal in  $B_4' \equiv A_3$ , während die Tangente  $AB_4' \equiv X_3 A$  in  $B_4'$   $mn$  Punkte mit der Kurve gemein hat.

Ausser dem Zusammenfallen von  $B_4'$  mit  $A_3$  finden wir also im Schnitte von  $\omega_\infty$  keine Abweichungen vom allgemeinen Falle.

Der Schnitt in  $\omega_0$  wird (siehe (40b), S. 231) durch

$$(x_1 - b_1' x_4) x_1^{\frac{n}{m}} x_4^{\frac{n}{m}} - (x_2 - b_2' x_4) x_2^{\frac{n}{m}} x_4^{\frac{n}{m}} - a_1 (tx_1 - x_2) x_1^{\frac{n}{m}} x_2^{\frac{n}{m}} = 0 \quad (85b)$$

dargestellt. Der Punkt  $A_3 \equiv B_4'$  ist ein  $mn$ -facher; seine sämtlichen Tangenten sind in  $X_1 X_2$  vereinigt; es hat  $X_1 X_2$  mit der Kurve  $m^2$  Punkte gemein.

Die  $m+n$  durch (60b) (S. 236) bestimmten Schnittpunkte von  $X_3 X_4$  mit der Regelfläche sind nun alle im Punkte  $S$

$$(a_1 - a_2)x_3 + (b_1' - b_2')x_4 = 0,$$

wo  $l$  die Gerade  $X_3 X_4$  schneidet, zusammengefallen.

Die Fläche hat also in  $S$   $(m+n)^2$  Punkte mit  $X_3 X_4$  gemein.

Auf der Fläche ist  $A_3 \equiv B_4'$  ein  $\mathbf{n}(\mathbf{m} + \mathbf{n})$ -facher Punkt; von den  $\mathbf{mn} + \mathbf{n}^2$  Berührungsebenen, in welche die Tangentenkegel ausgeartet ist, fallen  $\mathbf{mn}$  mit  $\omega_\infty$  und  $\mathbf{n}^2$  mit  $(X_4, l)$ , d. h. ( $x_2 = tx_1$ ), zusammen. Die Gerade  $X_1 X_2$  hat in  $A_3 \equiv B_4'$  mit der Fläche  $\mathbf{m}^2 + \mathbf{n}^2$  Punkte gemein. Es schneidet  $X_3 X_4$  die Fläche  $(\mathbf{m} + \mathbf{n})^2$  mal im Schnittpunkte  $S$  von  $l$ .

Der Schnitt mit einer durch  $X_1 X_2$  gelegten Ebene  $\omega_\mu$  hat nun auch in  $A_3 \equiv B_4'$  einen  $n(m+n)$ -fachen Punkt, von dessen Tangenten  $mn$  mit  $X_1 X_2$  zusammengefallen sind und  $n^2$  mit der Gerade, welche  $A_3 \equiv B_4'$  verbindet mit dem Punkte  $C_\mu$ , wo  $l$  die Ebene  $\omega_\mu$  trifft. Nur in  $\omega_\infty$  liegt die Sache anders: dort ist nämlich  $X_3 A \equiv X_3 A_3$  ein  $m^2$ -faches Ausartungsgebilde, aber zugleich die einzige Tangente im  $n^2$ -fachen Punkte  $A_3 \equiv B_4'$ .

Dass die neuen Eigenschaften bei der *hyperbolischen* Congruenz nicht dieselbe Bedeutung haben als diejenigen bei der *parabolischen*, verdankt man dem Umstande, dass in der *hyperbolischen* Congruenz die Gerade  $X_3 X_4$  nicht, wie in der *parabolischen*, Congruenzstrahl ist.

Betrachten wir jetzt den Fall, wo  $l$  den Punkt  $X_3$  enthält.

Es ist nun jede Gerade in  $\omega_\infty$ , welche  $X_3$  trägt, ein Congruenzstrahl, welcher  $l$  schneidet.

Wir ersahen früher, dass jeder Strahl, welcher einen in  $\omega_\infty$  liegenden Punkt mit  $X_3$  verbindet, ein  $m^2$ -facher Strahl ist.

Dies ist aber nur der Fall, wenn diese Gerade als ein durch den ausserhalb  $X_3$  liegenden Punkt hindurchgehender Strahl betrachtet wird.

Wir sind dagegen auch zu der Einsicht gelangt, dass  $X_3$   $mn$  Strahlen trägt, welche eine willkürliche Gerade  $l$  in  $\mathcal{A}$  schneiden (wonach u. a. sowohl  $X_3$  wie  $\mathcal{A}_3$   $mn$ -fache Punkte auf der axialen Regelfläche der willkürlichen Gerade sind).

Wir sind also gezwungen *jeden Strahl, welcher in  $\omega_\infty$  liegt und  $X_3$  enthält, wenn er als ein durch  $X_3$  gehender Strahl betrachtet wird, nur  $mn$ -fach zu zählen.*

Ebenso muss jeder in  $\omega_0$  liegende  $X_4$  enthaltende Strahl, als Strahl durch  $X_4$  betrachtet, immer  $mn$ -fach gerechnet werden.

Aus diesen Überlegungen geht nun unmittelbar hervor, dass von der betrachteten Regelfläche die Ebene  $\omega_\infty$   $mn$  mal abgesondert wird; es bleibt also eine Fläche vom Grade  $(m+n)^2 + 2mn - mn = (m+n)^2 + mn$ .

Auf der Restfläche sind nun  $X_1$  und  $X_2$   $mn$ -fache Punkte.

Ihre Berührungsebenen sind hier nur durch die Gleichungen (45'b) und (46'b) bestimmt.

Die Fläche schneidet jetzt die Gerade  $X_3 X_4$   $mn$  mal in  $X_4$  und  $(m+n)^2$  mal in  $X_3$ .

Auch hier (wie in der parabolischen Congruenz) ist die Kurve in  $\omega_0$  eine  $m$ -fache.

Der Gesamtschnitt in  $\omega_0$  enthält  $mn$  mal die Gerade  $B' X_1$ ,  $mn$  mal die Gerade  $B' X_2$ ,  $n^2$  mal die Gerade  $B' X_4$  und schliesslich noch ein Gebilde vom Grade  $(m+n)^2 + mn - 2mn - n^2 = m(m+n)$ , welches offenbar eine  $m$ -fache Kurve vom Grade  $m+n$  ist.

Indem wir in (85b)  $a_1 = 0$  und  $a_2 = 0$  substituieren, finden wir, nach Teilung durch  $x_4$ ,

$$(x_1 - b_1' x_4) x_1^{\frac{n}{m}} - (x_2 - b_2' x_4) x_2^{\frac{n}{m}} = 0,$$

oder

$$(x_1 - b_1' x_4)^m x_1^n - (x_2 - b_2' x_4)^m x_2^n = 0. \quad . \quad . \quad (93b)$$

Die Schnittpunkte dieser Kurve vom Grade  $m+n$  mit  $X_1 X_2$  sind durch

$$x_1^{m+n} - x_2^{m+n} = 0$$

bestimmt, oder, wenn wir  $\tau_{m+n}^{m+n} = 1$  setzen, durch

$$x_2 = \tau_{m+n} x_1.$$

Die Kurve schneidet deshalb  $X_1 X_2$  in den  $m + n$  Punkten  $E_{\tau_{m+n}}$ , wo die singulären durch  $X_3 X_4$  gelegten Ebenen  $\varepsilon_{\tau_{m+n}}$  die Gerade  $X_1 X_2$  treffen.

Die Tangenten im Punkte  $E_\tau$  ergeben sich durch die Substitution

$$x_2 = \tau x_1 + x_2';$$

wir finden somit

$$(x_1 - b_1' x_4)^m x_1^n = (\tau x_1 + x_2' - b_2' x_4)^m (\tau x_1 + x_2')^n,$$

oder

$$x_1^{m+n} - m b_1' x_1^{m+n-1} x_4 + \dots = \tau^{m+n} x_1^{m+n} + \tau^{m+n-1} x_1^{m+n-1} \{m(x_2' - b_2' x_4) + n x_2'\} + \dots;$$

die Tangente in  $E_\tau$  ist demnach durch

$$- m \tau b_1' x_4 = m x_2' - m b_2' x_4 + n x_2',$$

oder

$$x_2' = \frac{m(b_2' - \tau b_1')}{m + n} x_4,$$

also durch

$$(m + n)(\tau x_1 - x_2) + m(b_2' - \tau b_1') x_4 = 0 \quad . \quad (94b)$$

angewiesen. Es convergiren alle diese Tangenten nach dem Punkte  $T_0'$ :

$$T_0' \dots \frac{x_1}{m b_1'} = \frac{x_2}{m b_2'} = \frac{x_4}{m + n}. \quad . \quad . \quad (95b)$$

Die in  $\omega_\infty$  liegende Kurve wird jetzt durch

$$(x_1^{\frac{m+n}{n}} - x_2^{\frac{m+n}{n}}) x_3^{\frac{m}{n}} - (b_2' x_1 - b_1' x_2) x_1^{\frac{m}{n}} x_2^{\frac{m}{n}} = 0 \quad . \quad (96b)$$

dargestellt.

Es ist hier  $X_3$  ein  $n(m + n)$ -facher Punkt, dessen durch

$$x_1^{\frac{m+n}{n}} - x_2^{\frac{m+n}{n}} = 0,$$

oder

$$(x_1^{m+n} - x_2^{m+n})^n = 0$$

bestimmte Tangenten, in Gruppen von  $n$  mit denjenigen Geraden zusammenfallen, welche  $X_3$  mit den  $m+n$  Punkten  $E_{\tau_{m+n}}$  verbin-

den. Da  $x_2 = \tau_{m+n} x_1$  einen Faktor  $x_2^{\frac{2m+n}{n}}$  absondert, so hat jede Tangente in  $X_3$   $n(2m+n)$  Punkte, also ausserhalb  $X_3$  keinen Punkt mit der Kurve gemein.

Die Kurve wird zum vollständigen Schnitte in  $\omega_\infty$  ergänzt durch  $m$  mal die  $m+n$  in  $X_3$  an die Kurve in  $\omega_\infty$  gelegten Tangenten.

Zum Schluss den Fall, wo  $l$  den Punkt  $X_4$  enthält, betrachtend, bemerken wir, dass die Ebene  $\omega_0$   $mn$  mal abgesondert wird. Wir erübrigen wiederum eine Fläche vom Grade  $(m+n)^2 + mn$ . Die Punkte  $X_1$  und  $X_2$  sind nun  $mn$ -fache. Von den Berührungsebenen sind je  $m$  in einer der  $n$  Ebenen (45b) bez. (46b) vereinigt.

Der Schnitt in  $\omega_\infty$  besteht aus  $mn$  mal  $AX_1$ ,  $mn$  mal  $AX_2$ ,  $m^2$  mal  $AX_3$  und aus einem Gebilde vom Grade  $n(m+n)$ , welches aus einer  $n$ -fachen Kurve vom Grade  $m+n$  besteht.

Die Substitution  $b'_1 = 0$ ,  $b'_2 = 0$  liefert in der Gleichung (83b), nach Teilung durch  $x_3$ ,

$$(x_1 - a_1 x_3) x_1^{\frac{m}{n}} - (x_2 - a_2 x_3) x_2^{\frac{m}{n}} = 0,$$

oder

$$(x_1 - a_1 x_3)^n x_1^m - (x_2 - a_2 x_3)^n x_2^m = 0. \quad . \quad . \quad (93'b)$$

Die Eigenschaften dieser Kurve sind denen der Kurve (93b) analog.

Der Schnitt in  $\omega_0$  enthält eine Kurve vom Grade  $m^2 + 2mn$ , deren Gleichung lautet:

$$(x_1^{\frac{m+n}{m}} - x_2^{\frac{m+n}{m}}) x_4^{\frac{n}{m}} - (a_2 x_1 - a_1 x_2) x_1^{\frac{n}{m}} x_2^{\frac{n}{m}} = 0. \quad (96b')$$

Diese Kurve entspricht vollkommen der Kurve (96b) in  $\omega_\infty$ .

Der Schnitt enthält noch die  $m+n$  in  $X_4$  an dieser Kurve gelegten Tangenten, jede  $n$ -fach gezählt.

§ 8a. Die axiale Regelfläche einer  $X_1 X_2$  schneidenden Gerade in der parabolischen Congruenz.

Die axiale Regelfläche einer Gerade  $l_\mu$ , welche  $X_1 X_2$  schneidet, hat denselben Grad wie die axiale Regelfläche einer durchaus willkürlichen Gerade. Da  $X_1 X_2$  ein Congruenzstrahl ist, so wird diese Gerade jetzt der Regelfläche angehören und auf ihr eine vielfache Gerade sein.

Wie wir bereits im I. und II. Abschnitte ersahen, können wir in den meisten Fällen die der allgemeinen Regelfläche angehörenden Gleichungen aufrecht erhalten, wenn wir nur, statt der hier unendlich grossen  $a_1, a_2, b_1', b_2'$ , setzen

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= + \frac{\alpha_2 a_0}{\delta}, \\ a_2 &= - \frac{\alpha_1 a_0}{\delta}, \\ b_1' &= - \frac{\mu \alpha_2 a_0}{\delta}, \\ b_2' &= + \frac{\mu \alpha_1 a_0}{\delta}, \\ \Delta &= a_1 b_2' - a_2 b_1' = - \frac{(\mu \alpha_3 + \alpha_4) a_0}{\delta}, \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

wo  $a_0 = \frac{\mu \alpha_3 + \alpha_4}{2 \alpha_1 \alpha_2}$  ist, und  $\delta$  eine unendlich kleine Grösse darstellt.

Die Gleichungen von  $l_\mu$  lauten:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} . \\ . \\ . \end{array} \right. \quad (97)$$

$$x_3 = \mu x_4. \quad \left\{ \begin{array}{l} . \\ . \\ . \end{array} \right. \quad (98)$$

Zuerst wollen wir wiederum die Kurven in  $\omega_\infty$  und  $\omega_0$  untersuchen.

Wir dürfen jetzt nicht die Gleichung (26a) anwenden, weil das Coordinatendreieck hier in eine Gerade ausgeartet ist. Es ist ja der Punkt  $A$ , wo  $l_\mu \omega_\infty$  schneidet, mit dem Schnittpunkte  $L_\mu$  von  $l_\mu$  und  $X_1 X_2$  identisch.

Wir haben also nur die Coordinaten  $x_1, x_2, x_3$  zur Verfügung. Die Gleichung der in  $\omega_\infty$  liegenden Kurve wird erhalten, indem wir in (21a) auf S. 199  $p_1$  durch  $x_1: x_3$  und  $p_2$  durch  $x_2: x_3$  ersetzen. Wir finden alsdann

$$\begin{aligned} (x_2 - a_2 x_3) x_1^{\frac{m}{n}} - (x_1 - a_1 x_3) x_2^{\frac{m}{n}} + (b_2' x_1 - b_1' x_2) x_3^{\frac{m}{n}} - \\ - (a_1 b_2' - a_2 b_1') x_3^{\frac{m+n}{n}} = 0. \end{aligned}$$

Durch die Substitution (96) bekommt diese Gleichung die folgende Form:

$$\begin{aligned} \frac{\delta x_2 + \alpha_1 a_0 x_3}{\delta} x_1^{\frac{m}{n}} - \frac{\delta x_1 - \alpha_2 a_0 x_3}{\delta} x_2^{\frac{m}{n}} + \mu \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}{\delta} a_0 x_3^{\frac{m}{n}} + \\ + \frac{\mu \alpha_3 + \alpha_4}{\delta} a_0 x_3^{\frac{m+n}{n}} = 0, \end{aligned}$$

oder

$$\left[ \alpha_1 x_1^{\frac{m}{n}} + \alpha_2 x_2^{\frac{m}{n}} + \{ \mu (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) + \alpha_4 x_3 \} x_3^{\frac{m-n}{n}} \right] x_3 = 0.$$

Die Kurve in  $\omega_\infty$  ist daher zusammengesetzt aus  $n^2$  mal der Gerade  $X_1 X_2$  und einer Kurve vom Grade  $mn$  mit dieser Gleichung:

$$\alpha_1 x_1^{\frac{m}{n}} + \alpha_2 x_2^{\frac{m}{n}} + \{ \mu (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) + \alpha_4 x_3 \} x_3^{\frac{m-n}{n}} = 0. \quad (99a)$$

Diese Kurve schneidet  $X_1 X_2$  in den Punkten, welche durch

$$\alpha_1 x_1^{\frac{m}{n}} + \alpha_2 x_2^{\frac{m}{n}} = 0,$$

also in der rationalen Gleichung durch

$$[\alpha_1^n x_1^m - (-\alpha_2)^n x_2^m]^n = 0$$

angewiesen sind. Von den  $mn$  Schnittpunkten sind also je  $n$  vereinigt in einem der  $m$  Punkte

$$\frac{x_2}{x_1} = \left( -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^{\frac{n}{m}}, x_3 = 0, x_4 = 0,$$

welche die  $m$  Bilder  $L_{\mu}'$  sind des Punktes

$$\frac{x_2}{x_1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}, x_3 = 0, x_4 = 0$$

oder

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0,$$

d. h. des Punktes  $L_\mu$ , wo  $l_\mu$  die Gerade  $X_1 X_2$  schneidet.

Die Rechnung zeigt, dass die Tangenten in  $L_{\mu}'$  von der Grösse des Verhältnisses  $m : n$  abhängen; wir verzichten aber auf eine Erledigung verschiedener Fälle, und unterlassen somit die Ermittlung dieser Tangenten.

Der Schnitt in  $\omega_0$  hat die Gleichung:

$$(x_2 - b_2' x_4) x_1^{\frac{n}{m}} - (x_1 - b_1' x_4) x_2^{\frac{n}{m}} + (a_2 x_1 - a_1 x_2) x_4^{\frac{n}{m}} + (a_1 b_2' - a_2 b_1') x_4^{\frac{m+n}{m}} = 0.$$

Indem wir die Substitution (96) ausführen, erhalten wir

$$\frac{\delta x_2 - \mu \alpha_1 \alpha_3 x_4^{\frac{n}{m}}}{\delta} x_1^{\frac{n}{m}} - \frac{\delta x_1 + \mu \alpha_2 \alpha_3 x_4^{\frac{n}{m}}}{\delta} x_2^{\frac{n}{m}} - \frac{(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \alpha_3^{\frac{n}{m}}}{\delta} x_4^{\frac{n}{m}} - \frac{(\mu \alpha_3 + \alpha_4) \alpha_3^{\frac{m+n}{m}}}{\delta} x_4^{\frac{m+n}{m}} = 0,$$

oder

$$[\mu(\alpha_1 x_1^{\frac{n}{m}} + \alpha_2 x_2^{\frac{n}{m}}) x_4^{\frac{m-n}{m}} + (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_4 x_4) + \mu \alpha_3 x_4] x_4^{\frac{n}{m}} = 0.$$

Der Schnitt in  $\omega_0$  besteht also aus  $mn$  mal der Gerade  $X_1 X_2$  und aus einer Kurve vom Grade  $m^2$ , mit der Gleichung

$$\mu(\alpha_1 x_1^{\frac{n}{m}} + \alpha_2 x_2^{\frac{n}{m}}) x_4^{\frac{m-n}{m}} + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + (\mu \alpha_3 + \alpha_4) x_4 = 0. \quad (100a)$$

Diese Kurve schneidet  $X_1 X_2$  in den Punkten, welche durch

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0,$$

also in der rationalen Gleichung durch

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^{m^2} = 0$$

angewiesen sind. Es sind die  $m^2$  Schnittpunkte mit  $X_1 X_2$  alle im Punkte  $L_\mu$  vereinigt.

Da die Substitution

$$x_2 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} x_1 + x_2'$$

die Gleichung (100a) verwandelt in

$$\mu[\alpha_1 x_1^{\frac{n}{m}} + \alpha_2 (-\frac{\alpha_1}{\alpha_2} x_1 + x_2')^{\frac{n}{m}}] x_4^{\frac{m-n}{m}} + \alpha_2 x_2' + (\mu \alpha_3 + \alpha_4) x_4 = 0,$$

und der Coefficient der höchsten Potenz von  $x_1$  (nl.  $x_1^m x_4^{\frac{m-n}{m}}$ ) ist, so sind die Tangenten in  $L_\mu$  durch

$$x_4^{m(m-n)} = 0$$

angewiesen. Der Punkt  $L_\mu$  ist somit ein  $m(m-n)$ -facher Punkt, dessen sämtliche Tangenten in  $X_1 X_2$  vereinigt sind. Die Gerade  $X_1 X_2$  hat in  $L_\mu$   $m^2$  Punkte mit der Kurve gemein.

Weil die Ebene  $\omega_0$  mit jeder anderen durch  $X_1 X_2$  gelegten Ebene (ausgenommen  $\omega_\infty$ ) gleichwertig ist, so ist die Gerade  $X_1 X_2$  auch auf der Fläche eine  $mn$ -fache Gerade.

Der Schnitt in jeder durch  $X_1 X_2$  gelegten Ebene  $\omega_v$  ist vom

Grade  $m^2$  und hat in  $L_\mu$  einen  $m(m-n)$ -fachen Punkt, dessen Tangenten alle in  $X_1 X_2$  vereinigt sind.

Nur in  $\omega_x$  liegt die Sache anders. Der Schnitt in  $\omega_x$  besteht aus  $n(m-n)$  mal  $X_1 L_\mu (= X_1 X_2)$ ,  $n(m-n)$  mal  $X_2 L_\mu (= X_1 X_2)$ ,  $(m-n)$  mal den  $m-n$  Geraden  $E_\tau L_\mu (= X_1 X_2)$  und aus der Restkurve, welche hier auch noch  $n^2$  mal  $X_1 X_2$  enthält. Der Gesamtschnitt in  $\omega_x$  enthält demnach  $X_1 X_2$  als eine  $2n(m-n) + (m-n)^2 + n^2 = m^2$ -fache Gerade.

Die Ebene  $\omega_\mu$ , in welcher  $l_\mu$  sich befindet, trägt, ausser der  $m^2$ -fachen Gerade  $l_\mu$ , die  $mn$ -fache Gerade  $X_1 X_2$ .

Wir schliessen somit:

*Die axiale Regelfläche einer  $X_1 X_2$  schneidenden Gerade enthält  $X_1 X_2$  als eine  $mn$ -fache Gerade, deren Berührungsebenen alle mit  $\omega_x$  zusammengefallen sind.*

In jeder durch  $X_1 X_2$  gelegten Ebene (ausser  $\omega_x$ ) ist der Restschnitt eine Kurve vom Grade  $m^2$ , welche in  $L_\mu$  einen  $m(m-n)$ -fachen Punkt hat; die Tangenten sind alle vereinigt in der Gerade  $X_1 X_2$ , welche in  $L_\mu$   $m^2$  Punkte mit der Kurve gemein hat.

Wir wollen jetzt den Fall betrachten, wo  $l_\mu$  durch  $X_1$  oder  $X_2$  hindurchgeht.

Wenn die Gerade  $l_\mu X_1$  enthält, so haben wir

$$\alpha_1 = 0.$$

Die in  $\omega_x$  liegende Kurve besteht alsdann aus der  $n^2$ -fachen Gerade  $X_1 X_2$  und einer Kurve, welche durch

$$\alpha_2 x_2^{\frac{m}{n}} + \{\mu \alpha_2 x_2 + (\mu \alpha_3 + \alpha_4) x_3\} x_3^{\frac{m-n}{n}} = 0,$$

oder

$$[(-\alpha_2)^n x_2^m - \{\mu \alpha_2 x_2 + (\mu \alpha_3 + \alpha_4) x_3\}^n x_3^{m-n}]^n = 0 \quad (101a)$$

dargestellt wird.

Sie ist eine  $n$ -fache Kurve  $m^{\text{ten}}$  Grades, welche aber in  $m$  durch  $X_1$  gehende Geraden ausgeartet ist.

Der Schnitt in  $\omega_x$  besteht aus der  $mn$ -fachen Gerade  $X_1 X_2$  und aus einer Kurve mit der Gleichung

$$\mu \alpha_2 x_2^{\frac{n}{m}} x_4^{\frac{m-n}{m}} + \alpha_2 x_2 + (\mu \alpha_3 + \alpha_4) x_4 = 0,$$

oder

$$[\mu^m \alpha_2^m x_2^n x_4^{m-n} - (-1)^m \{\alpha_2 x_2 + (\mu \alpha_3 + \alpha_4) x_4\}^m]^m = 0. \quad (102a)$$



Diese Kurve ist offenbar aus  $m$  nach  $X_1$  convergirenden  $m$ -fach zu zählenden Geraden zusammengesetzt. Diese Resultate würden sich auch in folgender (rein geometrischen) Weise ergeben haben.

Die durch  $X_1$  gehende Gerade trägt  $m$  Berührungsebenen an dem Fokalkegel  $F_1$ , von denen jede ein Strahlengebilde  $m^{\text{ter}}$  Klasse von Congruenzstrahlen enthält. Diese  $m$  Ebenen bilden also zusammen eine axiale Regelfläche vom Grade  $m^2$ .

Ausserdem ist jede in  $\omega_\infty$  durch  $X_1$  gelegte Gerade ein Congruenzstrahl.

Indem wir eine Gerade  $PX_1$  in  $\omega_\infty$  als einen durch  $P$  gehenden Congruenzstrahl betrachten, ist sie  $n(m-n)$ -fach zu zählen (Siehe S. 191). Wenn wir nun  $P$  längs  $PX_1$  sich  $X_1$  nähern lassen, so werden die  $n^2$  Bilder  $P'$  in  $\omega_0$  auch  $X_1$  näher kommen; es werden die  $n^2$  Strahlen, die  $P$  mit seinen in  $\omega_0$  befindlichen Bildern  $P'$  verbinden, schliesslich ebenfalls in  $X_1$  ausmünden; es folgt somit, dass der Strahl  $PX_1$ , als Strahl in  $\omega_\infty$  durch  $X_1$  betrachtet,  $n(m-n) + n^2 = mn$ -fach zu zählen ist.

Wir sind demnach zu der Einsicht gelangt, dass ein Strahl  $PX_1$  in  $\omega_\infty$ , als Strahl durch  $X_1$  betrachtet,  $mn$ -fach zu rechnen ist.

Die Ebene  $\omega_\infty$  ist deshalb ein Bestandteil vom Grade  $mn$  der axialen Regelfläche einer durch  $X_1$  gehenden Gerade.

Der totale Grad dieser axialen Regelfläche ist somit  $m^2 + mn = m(m+n)$ .

Der Schnitt in einer durch  $X_1 X_2$  gelegten Ebene enthält auch die Gerade  $X_1 X_2$  als eine  $mn$ -fache Gerade, und ausserdem die  $m$   $m$ -fachen durch  $X_1$  gehenden Geraden, in denen diese Ebene durch die  $m$  Berührungsebenen an dem Fokalkegel  $F_1$  geschnitten wird.

Indem wir die durch  $X_1$  gehende Gerade durch die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= -\frac{\mu\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_2} x_1, \\ x_3 &= \mu x_1 \end{aligned} \right\}$$

darstellen, müssen die Coordinaten des Punktes  $Y$ , welchem die Congruenzstrahlen entstammen (siehe S. 212, 213), den Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} y_2 &= -\frac{\mu\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_2} y_1, \\ y_3 &= \mu y_1 \end{aligned} \right\}$$

genügen, wonach die Gleichung (54a) (S. 213) diese Form bekommt:

$$\left(-\frac{\mu\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_2} x_1 - x_2\right)^m = \left(\mu x_1 + \frac{\mu\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_2} x_2\right)^n (\mu x_1 - x_2)^{m-n}$$

oder

$$\{\alpha_2 x_2 + (\mu \alpha_3 + \alpha_4) x_4\}^m - (-1)^n \alpha_2^{m-n} \{\mu \alpha_2 x_2 + (\mu \alpha_3 + \alpha_4) x_3\}^n (x_3 - \mu x_4)^{m-n} = 0. \quad (103a)$$

Es werden durch diese Gleichungen also  $m$  durch  $X_1$  gelegte Ebenen angewiesen, welche die Congruenzstrahlen tragen, welche auf der durch  $X_1$  gehenden Gerade ruhen; sie sind daher die  $m$  durch diese Gerade an den Fokalkegel  $F_1$  gelegten Berührungsebenen.

Indem man in (103a)  $x_4 = 0$  substituirt, erhält man (101a), während man durch die Substitution  $x_3 = 0$  die Gleichung (102a) bekommt. Daher:

*Die axiale Regelfläche einer durch  $X_1$  gehenden Gerade ( $\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0$ ,  $x_3 = \mu x_4$ ) besteht aus den  $m$   $m$ -fachen Ebenen (103a) und aus der  $mn$ -fachen Ebene  $\omega_\infty$ .*

Die Regelfläche einer durch  $X_2$  gehenden Gerade lässt sich natürlich aus dem Vorhergehenden durch Vertauschung der Indices 1 und 2 ableiten.

Einen anderen besonderen Fall einer  $X_1 X_2$  schneidenden Gerade bildet eine Gerade in  $\omega_\infty$  und eine Gerade in  $\omega_0$ .

Weil eine in  $\omega_\infty$  liegende Gerade sich in einer singulären Ebene befindet, so wird der Grad der axialen Regelfläche erniedrigt. Diesen Fall wollen wir bis nachher verschieben.

Betrachten wir jetzt die axiale Regelfläche einer in  $\omega_0$  liegenden Gerade. Wir haben alsdann in dem Obigen nur

$$\mu = 0$$

zu setzen.

Die Kurve in  $\omega_\infty$  wird nun (siehe (99a)) durch

$$\alpha_1 x_1^{\frac{m}{n}} + \alpha_2 x_2^{\frac{m}{n}} + \alpha_4 x_3^{\frac{m}{n}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (104a)$$

dargestellt. Wir erkennen in dieser Kurve vom Grade  $mn$  die Bildkurve in  $\omega_\infty$  der in  $\omega_0$  befindlichen Gerade

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_4 x_4 = 0.$$

Der Schnitt in  $\omega_0$  wird jetzt (siehe (100a)) durch

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_4 x_4)^{m^2} = 0$$

angewiesen, und besteht, wie zu erwarten war, aus der  $m^2$ -fachen Axe der Regelfläche.

Die Gerade  $X_1 X_2$  wird wiederum auf der Regelfläche eine  $mn$ -fache Gerade sein. In  $\omega_\infty$  aber ist  $X_1 X_2$  eine  $m^2$ -fache Gerade.

Wenn die in  $\omega_0$  liegende Gerade durch  $X_1$  geht, so besteht die Regelfläche aus den  $m$  Ebenen, welche (siehe (103a)) durch

$$(\alpha_2 x_2 + \alpha_4 x_4)^m - (-1)^n \alpha_2^{m-n} \alpha_4^n x_3^m = 0 \quad . \quad (105a)$$

dargestellt werden (jede  $m$ -fach zu zählen), und aus der  $mn$ -fachen Ebene  $\omega_\infty$ .

Dasselbe gilt c. p. für die axiale Regelfläche einer Gerade in  $\omega_0$  durch  $X_2$ .

§ 8b. Die axiale Regelfläche einer  $X_1 X_2$  schneidenden Gerade in der hyperbolischen Congruenz.

Auch hier setzen wir

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= + \frac{\alpha_2 a_0}{\delta}, \\ a_2 &= - \frac{\alpha_1 a_0}{\delta}, \\ b_1' &= - \frac{\mu \alpha_2 a_0}{\delta}, \\ b_2' &= + \frac{\mu \alpha_1 a_0}{\delta}, \\ \Delta &= a_1 b_2' - a_2 b_1' = - \frac{(\mu \alpha_3 + \alpha_1) a_0}{\delta}, \end{aligned} \right\} \quad . \quad (96)$$

wo  $a_0 = \frac{\mu \alpha_3 + \alpha_1}{2 \alpha_1 \alpha_2}$  ist, und  $\delta$  eine unendlich kleine Grösse bezeichnet.

Die Gerade  $l_\mu$  wird durch

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0, \quad . \quad . \quad (97)$$

$$x_3 = \mu x_4 \quad . \quad . \quad (98)$$

dargestellt.

Die Gleichung der in  $\omega_\infty$  liegenden Kurve war (siehe (32b), S. 229)

$$\begin{aligned} (x_1 - a_1 x_3) x_1^{\frac{m}{n}} x_3^{\frac{m}{n}} - (x_2 - a_2 x_3) x_2^{\frac{m}{n}} x_3^{\frac{m}{n}} - \\ - \{b_2' (x_1 - a_1 x_3) - b_1' (x_2 - a_2 x_3)\} x_1^{\frac{m}{n}} x_2^{\frac{m}{n}} = 0. \quad . \quad (32b) \end{aligned}$$

Die Substitutionen (96) ergeben sodann

$$\frac{\delta x_1 - \alpha_2 a_0 x_3}{\delta} x_1^{\frac{m}{n}} x_3^{\frac{m}{n}} - \frac{\delta x_2 + \alpha_1 a_0 x_3}{\delta} x_2^{\frac{m}{n}} x_3^{\frac{m}{n}} -$$

$$- \frac{|\mu(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + (\mu\alpha_3 + \alpha_4)x_3| a_0}{\delta} x_1^{\frac{m}{n}} x_2^{\frac{m}{n}} = 0,$$

oder

$$\alpha_2 x_1^{\frac{m}{n}} x_3^{\frac{m+n}{n}} + \alpha_1 x_2^{\frac{m}{n}} x_3^{\frac{m+n}{n}} + |\mu(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + (\mu\alpha_3 + \alpha_4)x_3| x_1^{\frac{m}{n}} x_2^{\frac{m}{n}} = 0. \quad (99b)$$

Die Kurve ist auch hier vom Grade  $n(2m+n)$ . Die Gerade  $X_1 X_2$  wird hier nicht als Ausartungsgebilde abgesondert, weil sie nicht Congruenzstrahl ist.

Die Kurve (99b) hat in  $X_1$  einen  $mn$ -fachen Punkt, dessen Tangenten in der rationalen Gleichung durch

$$x_2^{mn} = 0$$

bestimmt werden. Sie sind also alle in  $X_1 X_3$  vereinigt.

Da  $x_2 = 0$  in (99b) den Faktor  $x_3^{\frac{m+n}{n}}$  absondert, so hat  $X_1 X_3$  in  $X_1$   $n(m+n)$  Punkte mit der Kurve gemein.

Für  $X_2$  finden wir ein analoges Resultat; wir können daher Folgendes behaupten:

*Die in  $\omega_x$  liegende Kurve hat in  $X_1$  einen  $mn$ -fachen Punkt, dessen sämtliche Tangenten in  $X_1 X_3$  vereinigt sind; es hat diese Tangente in  $X_1$   $n(m+n)$  Punkte mit der Kurve gemein. In  $X_2$  hat die Kurve ebenfalls einen  $mn$ -fachen Punkt; seine Tangenten sind alle vereinigt in der Gerade  $X_2 X_3$ , welche in  $X_2$  mit der Kurve  $n(m+n)$  Punkte gemein hat.*

Die Gerade  $X_1 X_2$  schneidet die Kurve (99b) ausserhalb  $X_1$  und  $X_2$  noch  $n^2$  mal im Punkte  $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0, x_3 = 0)$ , d. h. in Schnittpunkte  $L_\mu$  von  $l_\mu$  mit  $X_1 X_2$ .

Weil  $\mu(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = -(\mu\alpha_3 + \alpha_4)x_3$  einen Faktor  $x_3^{\frac{m+n}{n}}$  absondert, so ist die Tangente in  $L_\mu$  durch

$$\mu(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + (\mu\alpha_3 + \alpha_4)x_3 = 0$$

angewiesen.

Diese Gleichung wird auch ermittelt durch die Elimination von  $x_4$  aus (97) und (98); die Tangente in  $L_\mu$  ist demnach die Projektion der Axe  $l_\mu$  der Regelfläche aus  $X_4$  auf  $\omega_x$ .

Also:

Die Kurve in  $\omega_\infty$  hat in  $L_\mu$  einen  $n^2$ -fachen Punkt, dessen Tangenten alle in der Projektion von  $l_\mu$  aus  $X_4$  auf  $\omega_\infty$  vereinigt sind. Es hat diese Tangente in  $L_\mu$  mit der Kurve  $n(m+n)$  Punkte gemein. Wie im allgemeinen Falle hat die Kurve in  $X_3$  einen  $mn$ -fachen Punkt. Die Tangenten sind durch  $\alpha_2^n x_1^m - (-\alpha_1)^n x_2^m = 0$  bestimmt und daher mit den  $m$  Bildern der Gerade  $X_4 L_\mu$  identisch.

Da wir nirgends die Ungleichheit  $m > n$  angewandt haben, so können alle Eigenschaften der in  $\omega_0$  liegenden Kurve abgeleitet werden, indem wir im Obigen die Indices 3 mit 4 und  $m$  mit  $n$  vertauschen, während noch  $\mu$  durch  $1:\mu$  zu ersetzen ist.

Das Ausartungsgebilde, welches die Kurve in  $\omega_\infty$  zu einer Figur vom Grade  $(m+n)^2 + 2mn$  ergänzt, ist aus  $mn$  mal der Gerade  $AX_1$ ,  $mn$  mal der Gerade  $AX_2$  und  $m^2$  mal der Gerade  $AX_3$  zusammengesetzt. Weil  $A$  in  $L_\mu$  auf  $X_1 X_2$  ist angelangt, so besteht das Ergänzungsgebilde in  $\omega_\infty$  hier aus  $2mn$  mal der Gerade  $X_1 X_2$  und  $m^2$  mal der Gerade  $X_3 L_\mu$ .

Ebenso wird die Kurve in  $\omega_0$  hier durch  $2mn$  mal  $X_1 X_2$  und  $n^2$  mal  $X_4 L_\mu$  ergänzt.

Der Punkt  $L_\mu$  ist jetzt offenbar ein  $(m+n)^2$ -facher, sowohl des Gesamtschnittes in  $\omega_\infty$  als desjenigen in  $\omega_0$ . Von den  $(m+n)^2$  Zweigen durch  $L_\mu$  in  $\omega_\infty$  sind ja  $m^2$  in der Gerade  $L_\mu X_3$ ,  $2mn$  in der Gerade  $X_1 X_2$  und  $n^2$  in den  $n^2$  Zweigen der Kurve in  $\omega_\infty$  vereinigt.

Es ist  $L_\mu$  natürlich ein  $(m+n)^2$ -facher Punkt, weil er der  $(m+n)^2$ -fachen Gerade  $l_\mu$  angehört.

Von den  $(m+n)^2$  nach  $L_\mu$  zielenden Congruenzstrahlen fallen  $m^2$  mit  $L_\mu X_3$  zusammen,  $2mn$  mit  $X_1 X_2$  (als Gerade von  $\omega_\mu$  ( $x_3 = \mu x_4$ ) betrachtet) und  $n^2$  in  $L_\mu X_4$ .

Der Tangentenkegel in  $L_\mu$  ist somit in  $(m+n)^2$  Ebenen ausgeartet, von denen  $m^2$  mit  $\omega_\infty$ ,  $2mn$  mit  $\omega_\mu$  ( $x_3 = \mu x_4$ ) und  $n^2$  mit  $\omega_0$  zusammenfallen.

Die Punkte  $X_1$  und  $X_2$  sind, wie im allgemeinen Falle,  $2mn$ -fache Punkte. Die Berührungsebenen in  $X_1$  sind in zwei Gruppen, jede von  $mn$  Ebenen, verteilt; die eine Gruppe ist in  $\omega_\infty$ , die andere in  $\omega_0$  vereinigt.

Es gilt dasselbe vom Punkte  $X_2$ .

Die  $n^2$  Tangenten im  $n^2$ -fachen Punkte  $L_\mu$  an der Kurve in  $\omega_\infty$  sind die Bilder der Gerade  $X_4 L_\mu$ . Die nahe an  $L_\mu$  liegenden Punkte tragen Strahlen, welche nahe bei  $X_4$  ausmünden.

Weil sie Erzeugenden der axialen Regelfläche sind, so schneiden sich auch  $l_\mu$  und liegen demnach in der Ebene, welche  $l_\mu$  mit  $X_4$  verbindet. Sie schneiden eine durch  $X_1 X_2$  gelegte Ebene in der

Nähe von  $L_\mu$  derart, dass die Gerade, welche diese Schnittpunkte mit  $L_\mu$  verbindet, mit der Spur dieser Ebene in der Ebene  $(X_4, l_\mu)$  zusammenfällt. Eine solche durch  $X_1 X_2$  gelegte Ebene trägt somit eine Kurve, welche in  $L_\mu$  einen vielfachen Punkt besitzt, von dem  $n^2$  Zweige durch die Spur der Ebene  $(X_4, l_\mu)$  berührt werden. Ebenso werden  $m^2$  Zweige durch die Spur der Ebene  $(X_3, l_\mu)$  berührt. Schliesslich werden  $2mn$  Zweige durch die Gerade  $X_1 X_2$  berührt.

Wir haben also folgendes:

*Die axiale Regelfläche einer  $X_1 X_2$  in  $L_\mu$  schneidenden Gerade  $l_\mu$  hat in  $X_1$  und  $X_2$   $2mn$ -fache Punkte, deren  $mn$  Berührungsebenen mit  $\omega_\infty$  und  $mn$  mit  $\omega_0$  zusammenfallen. Sie hat in  $L_\mu$  einen  $(m+n)^2$ -fachen Punkt, von dem  $m^2$  Berührungsebenen vereinigt sind in  $(X_3, l_\mu)$ ,  $n^2$  in  $(X_4, l_\mu)$  und  $2mn$  in der Ebene  $\omega_\mu$  ( $x_3 = \mu x_4$ ). Schliesslich sind  $X_3$  und  $X_4$  beide  $mn$ -fache Punkte, deren Verhalten nicht von dem im allgemeinen Falle abweicht.*

Betrachten wir jetzt besonders den Fall, wo  $l_\mu$  durch  $X_1$  geht.

Die durch  $X_1$  gelegte Gerade trägt  $m+n$  Berührungsebenen an dem Fokalkegel  $F_1$ . Weil von diesen jede ein  $(m+n)$ -faches Strahlengebilde enthält, so gelangen wir zu einer Fläche vom Grade  $(m+n)^2$ .

Da jeder Strahl durch  $X_1$  in  $\omega_\infty$  ein  $mn$ -facher ist (auch wenn er als Strahl durch  $X_1$  betrachtet wird), so müssen die Ebenen  $\omega_\infty$  und  $\omega_0$  beide als ein Bestandteil vom Grade  $mn$  angesehen werden.

In dieser Weise bekommen wir für den Gesamtgrad  $(m+n)^2 + 2mn$ .

Stellen wir die durch  $X_1$  gehende Gerade durch

$$\left. \begin{aligned} \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 &= 0, \\ x_3 &= \mu x_4, \end{aligned} \right\}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} x_2 &= -\frac{\mu \alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_2} x_4, \\ x_3 &= \mu x_4 \end{aligned} \right\}$$

dar, so haben die Coordinaten des Sammelpunktes  $Y$  (Siehe S. 233, 234) den Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} y_2 &= -\frac{\mu \alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_2} y_4, \\ y_3 &= \mu y_4 \end{aligned} \right\}$$

zu genügen, wonach die Gleichung (54b) (S. 234) diese Gestalt annimmt:

$$\left(-\frac{\mu\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_2}x_4 - x_2\right)^m (\mu x_2 + \frac{\mu\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_2}x_3)^n = (\mu x_4 - x_3)^{m+n},$$

oder

$$\{\alpha_2 x_2 + (\mu\alpha_3 + \alpha_4)x_4\}^m \{\mu\alpha_2 x_2 + (\mu\alpha_3 + \alpha_4)x_3\}^n - \\ - (-1)^n \alpha_2^{m+n} (x_3 - \mu x_4)^{m+n} = 0. \quad (103b)$$

Durch diese Gleichungen werden (siehe S. 261, 262) die  $m+n$  durch  $l_\mu$  an dem Fokalkegel  $F_1$  gelegten Berührungsebenen angewiesen.

Die Substitution  $x_4 = 0$  liefert

$$x_2^m \{\mu\alpha_2 x_2 + (\mu\alpha_3 + \alpha_4)x_3\}^n - (-1)^n \alpha_2^n x_3^{m+n} = 0; \quad (101b)$$

diese Gleichung würde sich auch ergeben haben, wenn wir in (99b)  $\alpha_1 = 0$  gesetzt hätten.

Unser Schluss ist nun:

*Die axiale Regelfläche einer durch  $X_1$  gehenden Gerade  $(\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0, x_3 = \mu x_4)$  besteht aus den  $m+n$  ( $m+n$ )-fachen Ebenen (103b), aus der  $m$ -fachen Ebene  $\omega_x$  und aus der  $n$ -fachen Ebene  $\omega_0$ .*

Die Regelfläche einer durch  $X_2$  gehenden Gerade hat jetzt keine Eigentümlichkeiten aufzuweisen.

Die Fälle, wo die Gerade in  $\omega_x$  oder  $\omega_0$  liegt, werden an dieser Stelle nicht erörtert, da diese Ebenen singulär sind.

§ 9a. *Die axiale Regelfläche einer sowohl  $X_3 X_4$  wie  $X_1 X_2$  schneidenden Gerade, in der parabolischen Congruenz.*

Um die Eigenschaften dieser Regelfläche aufzufinden haben wir nur die Resultate von § 7a und § 8a zu combinieren.

Eine Gerade  $l_\mu$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 &= 0, \\ x_3 &= \mu x_4 \end{aligned} \right\}$$

schneidet auch  $X_3 X_4$ , wenn man hat

$$\alpha_3 \mu + \alpha_4 = 0.$$

Die Gleichung der in  $\omega_x$  liegenden Kurve wird alsdann (siehe (99a), S. 258), ausser  $x_3 = 0$ ,

$$\alpha_1 x_1^{\frac{m}{n}} + \alpha_2 x_2^{\frac{m}{n}} + \mu(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) x_3^{\frac{m-n}{n}} = 0. \quad (104a)$$

Der einzige Unterschied mit der Kurve auf S. 258 ist, dass

die Kurve jetzt auch den Punkt  $X_3$  enthält und sogar an dieser Stelle einen  $n^2$ -fachen Punkt besitzt, dessen sämtliche Tangenten mit  $X_3 L_\mu$  zusammenfallen; es hat diese Tangente in  $X_3$   $mn$  Punkte mit der Kurve gemein.

Die in  $\omega_0$  liegende Kurve besteht nun; ausser der  $mn$ -fachen Gerade  $X_1 X_2$ , aus der folgenden Kurve vom Grade  $m^2$ :

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \mu(\alpha_1 x_1^{\frac{n}{m}} + \alpha_2 x_2^{\frac{n}{m}}) x_3^{\frac{m-n}{m}} = 0. \quad (105a)$$

Diese Kurve hat, in Bezug auf die Kurve auf S. 259, die neue Eigenschaft, dass sie  $X_4$  enthält und sogar in  $X_4$  einen  $mn$ -fachen Punkt hat, dessen Tangenten durch

$$\alpha_1 x_1^{\frac{n}{m}} + \alpha_2 x_2^{\frac{n}{m}} = 0$$

angewiesen, und daher mit den  $n$  ( $m$ -fach zu zählenden) Bildern von  $X_3 L_\mu$  identisch sind.

Die axiale Regelfläche hat dieselben Eigenschaften wie die Fläche von § 8a. Es ist überdies  $X_3 X_4$  eine  $n^2$ -fache Gerade, deren Berührungsebenen alle vereinigt sind in der Ebene, welche  $X_3 X_4$  mit  $l_\mu$  verbindet. Nur in  $\omega_0$  ist  $X_4$  ein  $mn$ -facher Punkt, von dessen Tangenten je  $m$  in einem der  $n$  Bilder von  $X_3 L_\mu$  vereinigt sind. In der durch  $l_\mu$  und  $X_1 X_2$  gelegten Ebene liegt  $l_\mu$  als eine  $m^2$ -fache Gerade. Ihr Schnittpunkt  $S \equiv X_\mu$  mit  $X_3 X_4$  ist denn auch ein  $m^2$ -facher Punkt.

§ 9b. *Die axiale Regelfläche einer sowohl  $X_3 X_4$  wie  $X_1 X_2$  schneidenden Gerade, in der hyperbolischen Congruenz.*

Auch hier haben wir nur die Ergebnisse von § 7b und § 8b zu vereinigen.

Da  $l_\mu$  jetzt  $X_3 X_4$  schneidet, so ist

$$\mu \alpha_3 + \alpha_4 = 0.$$

Die in  $\omega_\infty$  liegende Kurve wird nun durch

$$\alpha_2 x_1^{\frac{m}{n}} x_3^{\frac{m+n}{n}} + \alpha_1 x_2^{\frac{m}{n}} x_3^{\frac{m+n}{n}} + \mu(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) x_1^{\frac{m}{n}} x_2^{\frac{m}{n}} = 0 \quad (104b)$$

dargestellt.

Das einzige Neue ist hier, dass die Tangente im Punkte  $L_\mu$  diesen Punkt mit  $X_3$  verbindet.

Im Übrigen weicht diese Regelfläche in keiner wesentlichen Hinsicht von der Fläche von § 8b ab.



§ 10a. Die axiale Regelfläche einer in einer singulären Ebene  $\varepsilon_\tau$  liegenden Gerade, in der parabolischen Congruenz.

Da die Ebene  $\varepsilon_\tau$  (wo  $\tau^{m-n} = 1$ ) eine singuläre Ebene ist, welche ein Strahlengebilde  $m^{\text{ter}}$  Klasse trägt, so wird diese Ebene,  $m$ -fach gezählt, von der axialen Regelfläche abgesondert. Die Restfläche ist also vom Grade  $m(m+n-1)$ .

Von den  $m^2$  Strahlen, welche nach einem Punkte auf  $l$  zielen, liegen  $m$  in  $\varepsilon_\tau$ . Es liegen demnach auf der Restfläche, welche künftighin die axiale Regelfläche genannt werde,  $m(m-1)$  Strahlen, wonach die in  $\varepsilon_\tau$  liegende Gerade  $l$  auf ihrer axialen Regelfläche eine  $m(m-1)$ -fache Gerade ist.

Der Schnitt der allgemeinen Regelfläche mit  $\omega_\infty$  besteht aus  $n(m-n)$  mal der Gerade  $AX_1$ ,  $n(m-n)$  mal der Gerade  $AX_2$ ,  $(m-n)$  mal den  $m-n$  Geraden  $AE_{\tau_{m-n}}$  (von denen jetzt eine der Ebene  $\varepsilon_\tau$  angehört) und aus einer Kurve vom Grade  $n(m+n)$ .

Da jetzt  $A$  auf  $X_3 E_\tau$  liegt, hat man

$$a_2 = \tau a_1,$$

während der Umstand, dass  $B'$  auf  $X_4 E_\tau$  liegt, zu der Bedingung

$$b_2' = \tau b_1'$$

Veranlassung giebt.

Die  $m-n$  Ebenen  $\varepsilon_{\tau_{m-n}}$  sind natürlich unter sich gleichwertig. Es genügt daher, dass wir  $l$  in eine dieser Ebenen legen. Der einfachen Rechnungen wegen werden wir voraussetzen, dass  $l$  sich in der durch

$$x_1 = x_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (106)$$

angewiesenen Ebene  $\varepsilon$  befindet.

Die Coordinaten von  $A$  genügen alsdann der Bedingung

$$a_1 = a_2 = a, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (107)$$

und zwischen den Coordinaten von  $B'$  besteht die Beziehung

$$b_1' = b_2' = b'. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (108)$$

Es gilt offenbar auch

$$a_1 b_2' - a_2 b_1' = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (109)$$

Die Kurve in  $\omega_\infty$  hat (siehe (26a), S. 200) die Gleichung

$$\xi_2(\xi_1 + a\xi_3)^{\frac{m}{n}} - \xi_1(\xi_2 + a\xi_3)^{\frac{m}{n}} + b'(\xi_1 - \xi_2)\xi_3^{\frac{m}{n}} = 0. \quad (110a)$$

Die rationale Gleichung ist durch  $(\xi_1 - \xi_2)^n$  teilbar. Dies lässt sich nachweisen, indem wir (110a) in dieser Form schreiben:

$$\xi_2(\xi_1 + a\xi_3)^{\frac{m}{n}} = \xi_1(\xi_2 + a\xi_3)^{\frac{m}{n}} - b'(\xi_1 - \xi_2)\xi_3^{\frac{m}{n}}.$$

Durch Potenzirung beider Seiten mit  $n$  finden wir

$$\begin{aligned} \xi_2^n(\xi_1 + a\xi_3)^m &= \xi_1^n(\xi_2 + a\xi_3)^m - nb'\xi_1^{n-1}(\xi_2 + a\xi_3)^{\frac{m}{n}(n-1)}(\xi_1 - \xi_2)\xi_3^{\frac{m}{n}} + \dots + \\ &+ (-1)^n b'^n(\xi_1 - \xi_2)^n \xi_3^m, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} &\xi_2^n(\xi_1 + a\xi_3)^m - \xi_1^n(\xi_2 + a\xi_3)^m = \\ &= (\xi_1 - \xi_2)[-nb'\xi_1^{n-1}(\xi_2 + a\xi_3)^{\frac{m}{n}(n-1)}\xi_3^{\frac{m}{n}} + \dots + (-1)^n b'^n(\xi_1 - \xi_2)^{n-1}\xi_3^m]. \end{aligned}$$

Setzen wir, der Kürze wegen,

$$-nb'\xi_1^{n-1}(\xi_2 + a\xi_3)^{\frac{m}{n}(n-1)}\xi_3^{\frac{m}{n}} + \dots + (-1)^n b'^n(\xi_1 - \xi_2)^{n-1}\xi_3^m = P,$$

so geht die vorhergehende Gleichung über in

$$\xi_2^n(\xi_1 + a\xi_3)^m - \xi_1^n(\xi_2 + a\xi_3)^m = (\xi_1 - \xi_2)P,$$

oder

$$\begin{aligned} &\xi_1^n \xi_2^n (\xi_1^{m-n} - \xi_2^{m-n}) + ma\xi_1^n \xi_2^n (\xi_1^{m-n-1} - \xi_2^{m-n-1})\xi_3 + \dots + \\ &+ (-1)^n a^m (\xi_1^n - \xi_2^n) \xi_3^m = (\xi_1 - \xi_2)P. \quad (111a) \end{aligned}$$

Die beiden Seiten sind offenbar durch  $\xi_1 - \xi_2$  teilbar. Da der Grad der rationalen Gleichung das  $n$ -fache von dem von (111a) ist, so enthält die rationale Gleichung den Faktor  $(\xi_1 - \xi_2)^n$ .

Hieraus erfahren wir, dass die Spur in  $\omega_\infty$  aus  $n$  mal der Gerade  $\xi_1 - \xi_2 = 0$ , d. h.  $X_3 E$ , und aus einer Kurve vom Grade  $n(m + n - 1)$  zusammengesetzt ist. Im Ganzen enthält der Gesamtschnitt also, ausser dieser Kurve,  $n(m - n)$  mal  $AX_1$ ,  $n(m - n)$  mal  $AX_2$ ,  $(m - n)$  mal die Geraden  $AE_{\tau_{m-n}}$  (ausgenommen  $AE$ ) und  $(m - n) + n = m$  mal die Gerade  $AE$ .

Von der allgemeinen Regelfläche hatte sich die Ebene  $\varepsilon$   $m$  mal abgesondert; in diesem Ausartungsgebilde ist somit die Gerade  $AE$   $m$ -fach enthalten. Die Restfläche schneidet demnach  $\omega_\infty$  in einer Kurve vom Grade  $n(m + n - 1)$ , in der  $n(m - n)$ -fachen Gerade  $AX_1$ , in der  $n(m - n)$ -fachen Gerade  $AX_2$  und in den  $m - n - 1$

$(m-n)$ -fachen Geraden  $AE_{\tau_{m-n}}$  ( $\tau_{m-n} \neq 1$ ), weshalb der totale Grad  $n(m+n-1) + 2n(m-n) + (m-n)(m-n-1) = m(m+n-1)$  ist.

Da  $n$  Zweige im Punkte  $A$  der ursprünglichen Kurve in  $AE = X_3E$  vereinigt sind, so bleiben für die hier betrachtete Kurve in  $\omega_x$   $n^2 - n = n(n-1)$  Zweige übrig. Der Punkt  $A$  ist also ein  $n(n-1)$ -facher Punkt.

Es fand sich dass  $X_3$ , falls  $l$  die Gerade  $X_3X_4$  schneidet, ein  $n^2$ -facher Punkt ist, dessen sämtliche Tangenten mit  $X_3A$  zusammenfallen.

Im vorliegenden Fall, wo  $A$  sich auf  $X_3E$  befindet, sind von den  $n^2$  Zweigen  $n$  in  $X_3E$  vereinigt, wonach  $X_3$  auf der Restkurve ein  $n(n-1)$ -facher Punkt ist, dessen Tangenten alle  $X_3$  mit  $A$  (oder  $E$ ) verbinden.

Der Punkt  $E$  gehört jetzt der Kurve *nicht* an.

Übrigens können wir, in Bezug auf diese Kurve in  $\omega_x$ , auf die Resultaten von S. 203 u. f. hinweisen.

Der Schnitt in  $\omega_0$  hat jetzt (siehe (40a), S. 207) die Gleichung

$$\xi_2(\xi_1 + b'\xi_4)^{\frac{n}{m}} - \xi_1(\xi_2 + b'\xi_4)^{\frac{n}{m}} + a(\xi_1 - \xi_2)\xi_4^{\frac{n}{m}} = 0. \quad (112a)$$

Von dieser Gleichung lässt sich zeigen, dass ihre rationalisirte Form den Faktor  $(\xi_1 - \xi_2)^m$  enthält, wonach geschlossen wird, dass der Schnitt in  $\omega_0$  aus  $m$  mal der Gerade  $X_4E (\equiv B'E)$  und aus einer Kurve vom Grade  $m(m+n-1)$  besteht.

Es erhellt, dass die  $m$ -fache Gerade  $X_4E$  der  $m$ -fachen Ebene  $\varepsilon$  angehört, welche von der allgemeinen Regelfläche abgesondert ist. Die Restfläche schneidet daher  $\omega_0$  in der oben erwähnten Kurve vom Grade  $m(m+n-1)$ .

Es ist auf diese Kurve  $B'$  ein  $m(m-1)$ -facher Punkt, für dessen Tangenten wir auf S. 208 hinweisen. Der Punkt  $X_4$  ist nun ein  $mn - m = m(n-1)$ -facher Punkt. Seine Tangenten sind in § 7a auf S. 243, 244 erörtert.

Da die Punkte  $X_1, X_2$  und  $E_{\tau_{m-n}}$  ( $\tau_{m-n} \neq 1$ ) nicht durch die Lage von  $l$  in  $\varepsilon$  beeinflusst werden, so lässt sich von der axialen Regelfläche (Restfläche) folgendes behaupten:

*Die axiale Regelfläche einer in  $\varepsilon$  befindlichen Gerade ist vom Grade  $m(m+n-1)$ . Sie hat in  $X_1$  einen  $mn$ -fachen Punkt, von dessen Berührungsebenen je  $m$  in einer der  $n$  Ebenen (siehe (46a), S. 211)*

$$(x_2 - ax_3)^n - a^m x_4^n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (113a)$$

*vereinigt sind. Der Punkt  $X_2$  ist ebenfalls ein  $mn$ -facher; von seinen Tangenten sind je  $m$  mit einer der  $n$  Ebenen (siehe (45a), S. 211).*

$$(x_1 - ax_3)^n - a^m x_4^n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (114a)$$

vereinigt. Die  $m - n - 1$  Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$  ( $\tau_{m-n} \neq 1$ ) sind  $n$ -fache Punkte, deren Berührungsebenen alle mit  $\omega_x$  zusammengefallen sind. Die Gerade  $X_3 X_4$  ist nun eine  $n(n-1)$ -fache Gerade der Fläche, weil von den  $n^2$  Blättern der allgemeinen Fläche von § 7a  $n$  mit  $\varepsilon$  zusammenfallen.

Wir können dies leicht ersehen, wenn wir bedenken, dass die  $n^2$  Blätter in einem Punkte  $X_\mu$  von  $X_3 X_4$  durch die  $n^2$  Congruenzstrahlen bestimmt werden, welche mit  $X_3 X_4$  coincidiren. Von den  $m^2 - n^2$  übrigen Strahlen liegen  $m - n$  in jeder der  $m - n$  Ebenen  $\varepsilon_{\tau_{m-n}}$ , also auch  $m - n$  in  $\varepsilon$ . Da aber die Ebene  $\varepsilon$   $m$  mal abgetrennt wird, so müssen noch  $n$  Strahlen den  $n^2$  entzogen werden, welche mit  $X_3 X_4$  zusammenfallen.

Auf der Restfläche ist also  $X_3 X_4$  eine  $n(n-1)$ -fache Gerade. Es sind alle Berührungsebenen in  $\varepsilon$  vereinigt (Ausnahme in  $\omega_0$ ).

Nur der Schnittpunkt  $S$  von  $l$  mit  $X_3 X_4$  ist ein  $m(m-1)$ -facher Punkt.

Wir sind jetzt im Stande die Singularitäten des Schnittes mit einer durch  $X_1 X_2$  gelegten Ebene  $\omega_\mu$  zu bestimmen. Ein solcher Schnitt hat in  $X_1$  und  $X_2$   $mn$ -fache Punkte, dessen Tangenten die Spuren in  $\omega_\mu$  bez. der  $n$  Ebenen (113a) und der  $n$  Ebenen (114a) sind (jede  $m$  mal gerechnet). Die  $m - n - 1$  Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$  ( $\tau_{m-n} \neq 1$ ) sind  $n$ -fache Punkte, deren Tangenten alle mit  $X_1 X_2$  zusammengefallen sind (Ausnahme in  $\omega_x$ ). Der Schnittpunkt  $C_\mu$  von  $l$  mit  $\omega_\mu$  ist ein  $m(m-1)$ -facher Punkt, dessen Tangenten durch die ausserhalb  $\varepsilon$  liegenden, nach  $C_\mu$  zielenden Congruenzstrahlen bestimmt werden. Der Punkt  $X_\mu$ , wo  $\omega_\mu X_3 X_4$  trifft, ist ein  $n(n-1)$ -facher. Seine sämtlichen Tangenten sind in  $X_\mu E$  vereinigt (ausgenommen in  $\omega_0$ ).

Schliesslich hat der Schnitt Doppelpunkte in den Schnittpunkten von  $\omega_\mu$  mit der Doppelkurve.

Die Doppelkurve wird durch die Lage von  $l$  in  $\varepsilon$  wesentlich beeinflusst. Wir wollen sie daher besonders untersuchen.

Die Gleichungen (67a) und (68a) sind hier identisch geworden. Ihre gemeinschaftliche Form ist

$$f(\pi) \equiv (b' - \mu\pi)^n - (\pi + a)^m = 0. \quad . \quad . \quad (115a)$$

Es liefert diese Gleichung sowohl die Coordinaten  $\pi_2$  wie die  $\pi_1$ .

Die Spur  $P$  eines Strahles  $p$ , welcher einem Punkte  $C$  von  $l$  in  $\varepsilon$  entstammt, ist somit durch eine Combination  $(\pi_1, \pi_2)$  zweier der

$m$  Wurzeln von (115a) bestimmt. Wir wollen diese Wurzeln mit

$$c_1, c_2, \dots, c_m$$

bezeichnen.

Wir denken uns nunmehr zwei Spuren, nl.

$$P_{1,2} \dots \pi_1 = c_1, \pi_2 = c_2,$$

und

$$P_{2,1} \dots \pi_1 = c_2, \pi_2 = c_1.$$

Die Gerade, welche  $P_{2,1}$  mit  $P_{1,2}$  verbindet, hat alsdann die Gleichung

$$\xi_1 + \xi_2 - (c_1 + c_2) \xi_3 = 0; \quad . \quad . \quad . \quad (116a)$$

sie enthält also den Punkt  $E'$  auf  $X_1 X_2$ , welcher durch

$$x_1 + x_2 = 0$$

bestimmt ist. Es giebt daher jede Combination  $(c_k, c_l)$  zu einer durch  $E'$  gehenden Gerade Veranlassung.

Es leuchtet ein, dass die  $m$  Spuren  $P_{1,1}, P_{2,2}, P_{m,m}$  sich auf  $X_3 E$  befinden.

Die  $m(m-1)$  ausserhalb  $X_3 E$  liegenden Spuren werden nun paarweise mit  $E'$  verbunden durch  $\frac{m(m-1)}{2}$  Geraden  $P_{k,l} P_{l,k} E'$ .

Wenn eine solche Gerade  $P_{k,l} P_{l,k} E'$  durch  $A$  ( $\xi_1 = 0, \xi_2 = 0$ ) geht, so folgt aus (116a)

$$c_1 + c_2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (117)$$

Sobald einem Punkte  $C$  von  $l$  zwei Strahlen  $p_{k,l}$  und  $p_{l,k}$  entstammen, deren Spuren  $P_{k,l}$  und  $P_{l,k}$  mit  $A$  in einer Gerade liegen, so ist dieser Punkt  $C$  ein Punkt  $D_{k,l}$  der Doppelkurve.

Aus dem Obigen geht alsdann hervor, dass die Ebene, welche die zwei Strahlen  $p_{k,l}$  und  $p_{l,k}$  mit  $l$  verbindet, den Punkt  $E'$  enthält.

Wenn also der Gleichung (117) genügt wird, d. h. wenn zwei Wurzeln von  $f(\pi) = 0$  (115a) sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, so liegt ein Punkt der Doppelkurve auf  $l$ , während die beiden durch diesen Punkt gehenden Strahlen sich in der Ebene  $(l, E')$  befinden.

Wir haben nun zu untersuchen, für welche Punkte  $C$  auf  $l$  die Gleichung (117) erfüllt ist.

Es ist (117) ein besonderer Fall der Bedingung

$$\Pi(c_k + c_l) = 0, \dots \dots \dots (118)$$

deren linke Seite eine symmetrische Funktion der  $m$  Wurzeln von  $f(\pi) = 0$  ist, sich also ausdrücken lässt in einer Form, welche nur die Coefficienten von  $f(\pi) = 0$  enthält.

Weil die Coefficienten ausschliesslich von den Constanten  $a, b'$  und von der  $C$  kennzeichnenden Grösse  $\mu$  abhängen, so wird (118) sich darstellen lassen in der Form

$$\Phi(\mu) = 0. \dots \dots \dots (119)$$

Wenn  $m$  und  $n$  grosse Zahlen sind, so kann es geschehen, dass die Umformung der symmetrischen Wurzelfunktion in eine Funktion der Coefficienten zu ausserordentlichen Schwierigkeiten Veranlassung giebt. In diesem Falle können wir einer Methode folgen, welche zwar umständlich, aber von Kunstgriffen frei ist. Wir betrachten alsdann die Gleichung

$$f(-\pi) = 0,$$

deren Wurzeln sich offenbar von den Wurzeln von  $f(\pi) = 0$  nur durch das Vorzeichen unterscheiden. Wenn nun  $f(-\pi) = 0$  und  $f(\pi) = 0$  eine gleiche Wurzel haben, so bedeutet dies

$$c_k + c_l = 0.$$

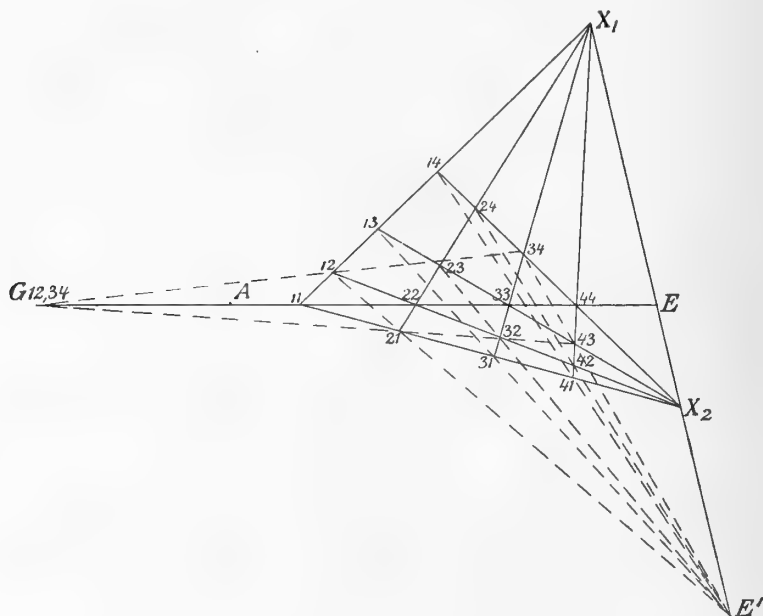


Fig. 12.

Man erhält alle Bedingungen  $c_k + c_l = 0$ , indem man die Eli-

minante von  $f(\pi) = 0$  und  $f(-\pi) = 0$  verschwinden lässt. Es ist selbstredend, dass neben der Bedingung, dass  $c_k$  von  $f(\pi)$  dem  $-c_l$  von  $f(-\pi)$  gleich sei, auch die Bedingung auftritt, dass  $c_l$  von  $f(\pi)$  dem  $-c_k$  von  $f(-\pi)$  gleich sei, so dass in der Eliminate der Fall  $c_k + c_l = 0$  zweimal vertreten ist. Die Eliminate ist daher das Quadrat einer Funktion von  $a$ ,  $b$  und  $\mu$ .

Aus dem Obigen erhellt ohne Weiteres, dass die axiale Regel-  
fläche von  $l$  in  $\varepsilon$  *harmonisch-symmetrisch* ist in Bezug auf die Ebene  $\varepsilon$  und den Punkt  $E'$  (welcher  $E$  in Bezug auf  $X_1$  und  $X_2$  harmonisch zugeordnet ist). Hieraus geht hervor, dass alle Geraden, wofern sie  $E'$  *nicht* enthalten, in Paaren vorkommen, deren Schnittpunkte sich in der Ebene  $\varepsilon$  befinden.

Es werden speziell die Verbindungslinien der Spuren  $P_{p,q}$ ,  $P_{r,s}$  sich in Paaren anordnen lassen, deren Schnittpunkte auf  $X_3E$  liegen. Wir ersehen hieraus, dass die beiden Geraden

$$P_{p,q}P_{r,s} \dots (c_q - c_s)\xi_1 - (c_p - c_r)\xi_2 + (c_p c_s - c_q c_r)\xi_3 = 0$$

und

$$P_{q,p}P_{s,r} \dots (c_p - c_r)\xi_1 - (c_q - c_s)\xi_2 - (c_p c_s - c_q c_r)\xi_3 = 0$$

sich in dem auf  $X_3E$  liegenden Punkte  $G_{pq,rs}$  schneiden; welcher durch

$$G_{pq,rs} \dots \xi_1 = \xi_2 = \frac{c_p c_s - c_q c_r}{c_p - c_q - c_r + c_s} \xi_3$$

bestimmt ist.

Wenn nun die Gerade  $P_{p,q}P_{r,s}$   $A$  enthält, so ist dies auch mit  $P_{q,p}P_{s,r}$  der Fall. Es treffen alsdann im Punkte  $C$  auf  $l$  vier Strahlen zusammen, nämlich  $p_{p,q}$ ,  $p_{r,s}$ ,  $p_{q,p}$  und  $p_{s,r}$ , von denen die ersteren zwei mit  $l$  durch *eine* Ebene verbunden werden, und ebenfalls die letzteren zwei mit  $l$  in einer Ebene liegen.

Der auf  $l$  befindliche Punkt  $C$ , welcher diese Anordnung liefert, ist daher ein *Doppelpunkt der Doppelkurve*. Wir wollen ihn mit  $D_{pq,rs}$  bezeichnen.

Wir können jetzt auch sagen, dass  $C$  ein Punkt  $D_{pq,rs}$  sein wird, wenn der Punkt  $G_{pq,rs}$  mit  $A$  zusammenfällt. Es ist dies der Fall, wenn

$$c_p c_s - c_q c_r = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (120)$$

Hier kann  $p = s$  und  $q = r$  sein. Dagegen kann weder  $p = q$  oder  $p = r$  sein, noch  $s = q$  oder  $s = r$ . Denn im Falle  $p = q$  würde die Gleichung (120) zerfallen in  $c_p = 0$  und  $c_s = c_r$ , wonach  $s = r$ ; es würde demnach entweder der Strahl in  $A$  ausmünden,

oder in irgend einem Punkte von  $X_3E$ , und dies ist ausgeschlossen.

Nebst den Fällen, wo der Bedingung

$$c_p c_s - c_q c_r = 0 \quad (p, q, r, s \text{ alle ungleich})$$

genügt wird, haben wir noch die Fälle zu betrachten, wo

$$c_p c_s - c_q^2 = 0 \quad (p, q \text{ und } s \text{ alle ungleich}).$$

Das Produkt

$$\Pi(c_p c_s - c_q c_r)$$

aller Combinationen (120) ist offenbar eine symmetrische Funktion der Wurzeln von  $f(\pi) = 0$  und somit eine Funktion von  $\mu$ . Es kommen in diesem Produkt auch die Fälle vor, wo  $p = q$  oder  $r = s$ . Die Gleichheit  $p = q$  z. B. liefert den Faktor  $(c_s - c_r)$ , welcher verschwindet falls  $f(\pi) = 0$  zwei gleiche Wurzeln hat.

Ferner giebt  $p = s$  und  $q = r$  zu  $c_p^2 - c_q^2 = 0$  Veranlassung, also, neben  $c_p - c_q = 0$ , zu  $c_p + c_q = 0$ ; doch ist diese Bedingung schon durch die Gleichung  $\Phi(\mu) = 0$  (119) vertreten.

Die Funktion von  $\mu$ , welche das Produkt  $\Pi(c_p c_s - c_q c_r)$  ersetzt, wird ein Quadrat sein; wir setzen deshalb

$$\Pi(c_p c_s - c_q c_r) = [\varphi(\mu)]^2. \quad (121)$$

Nach dem oben Dargelegten wird  $\varphi(\mu)$  die Funktion  $\Phi(\mu)$  und die Discriminante  $\Psi(\mu)$  von  $f(\pi) = 0$  als Faktoren enthalten. Wir können somit schreiben:

$$\varphi(\mu) = \Phi(\mu). \Psi(\mu). \Psi(\mu). \quad (122)$$

Die Gleichung

$$\Psi(\mu) = 0 \quad (123)$$

wird nun diejenigen Punkte auf  $l$  anweisen, welche zu den Gleichungen

$$c_p c_s - c_q c_r = 0$$

oder

$$c_p c_s - c_q^2 = 0$$

Veranlassung geben.

Auch hier wollen wir eine Methode angeben um  $\Psi(\mu)$  zu



ermitteln, falls  $m$  und  $n$  so gross sind, dass die Umformung der symmetrischen Funktion scheitert.

Wir betrachten daher die Gleichung

$$f\left(\frac{x}{\pi}\right) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (124)$$

Ihre Wurzeln sind durch

$$\frac{x}{\pi} = c_1, c_2, \dots, c_m,$$

oder durch

$$\pi = \frac{x}{c_{1,2,\dots,m}}$$

bestimmt.

Falls  $f(\pi) = 0$  und  $f\left(\frac{x}{\pi}\right) = 0$  eine gleiche Wurzel haben, so muss die Beziehung

$$c_p = \frac{x}{c_s},$$

oder

$$x = c_p c_s$$

erfüllt sein.

Die Eliminate von  $f(\pi) = 0$  und  $f\left(\frac{x}{\pi}\right) = 0$  ist ein Ausdruck, welcher, ausser von  $a$  und  $b'$ , nur von  $\mu$  und  $x$  abhängt.

Indem wir ihn durch  $G(x)$  darstellen, so sind die Coefficienten Funktionen von  $\mu$ .

Die Wurzeln der Gleichung

$$G(x) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (125)$$

sind die Produkte  $x = c_p c_s$  der Wurzelpaare von  $f(\pi) = 0$ .

Weil diese Produkte auch die Quadrate der Wurzeln enthalten, so werden auch die Werte  $x = c_p^2$  der Gleichung (125) genügen.

Es sind diese Werte aber auch die Wurzeln der Gleichung  $f(\sqrt{x}) = 0$ , wonach die Form  $G(x)$  den Ausdruck  $f(\sqrt{x})$  als Faktor enthalten muss.

Wenn  $f(\sqrt{x}) = 0$  rationalisirt wird, möge sie die Gestalt  $g(x) = 0$  annehmen. Wir haben alsdann

$$G(x) \equiv g(x) \cdot h(x). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (126)$$

Die Gleichung  $h(x) = 0$  liefert sodann die Produkte  $c_p c_s$  u.s.w.

Es leuchtet ein, dass die Coefficienten von  $g(x)$  und  $h(x)$  noch ausschliesslich von  $\mu$  abhängen.

Wenn  $h(x)$  zwei gleiche Wurzeln hat, so weist dies auf die Gleichheit

$$c_p c_s = c_q c_r$$

hin. Die Diskriminante von  $h(x)$  ist eine Funktion von  $\mu$ , nl.  $\varphi(\mu)$ . Diejenigen auf  $l$  liegenden Punkte  $C$ , welche durch

$$\varphi(\mu) = 0$$

bestimmt sind, geben demnach zu der Gleichung  $c_p c_s = c_q c_r$  Veranlassung; ihnen gehören somit die Punkte  $D_{pq,rs}$  und  $D_{k,l}$ .

Den Überlegungen von S. 276 nach, bemerken wir, dass  $\varphi(\mu)$  den Ausdruck  $\Phi(\mu)$  und die Diskriminante  $\Psi(\mu)$  von  $f(\pi) = 0$  als Faktoren enthalten muss; wir können also, wie dort, schreiben

$$\varphi(\mu) = \Phi(\mu) \cdot \Psi(\mu) \cdot \Upsilon(\mu).$$

Die Gleichung

$$\Upsilon(\mu) = 0$$

bestimmt besonders die Punkte  $D_{pq,rs}$ .

Es befinden sich unter diesen Punkten auch die Punkte  $D_{pq,qs}$ , welche die Gleichung

$$c_p c_s = c_q^2$$

veranlassen.

Obgleich das Verhalten dieser Punkte nicht von dem der Punkte  $D_{pq,rs}$  verschieden ist, so wollen wir doch zeigen, wie wir sie von jenen trennen können.

Wir bemerken, dass die Bedingung (128) erfüllt ist, wenn die Gleichungen  $g(x) = 0$  und  $h(x) = 0$  eine gleiche Wurzel haben.

Indem wir die Eliminate von  $g(x) = 0$  und  $h(x) = 0$  von dem Faktor  $\Psi(\mu)$ , der Diskriminante von  $f(\mu)$  befreien, erübrigen wir eine Form  $\Omega(\mu)$ , welche, wenn gleich Null gesetzt, die Punkte  $D_{pq,qs}$  bestimmt.

Wie wir ersahen, sind die Punkte  $D_{pq,rs}$  (daher auch die Punkte  $D_{pq,qs}$ ) *Doppelpunkte der Doppelkurve*, während die Punkte  $D_{k,l}$  *gewöhnliche Punkte der Doppelkurve* sind.

Es sei  $\Phi(\mu)$  vom Grade  $M$ ,  $\Psi(\mu)$  vom Grade  $N$  in  $\mu$ . Es liegen alsdann  $M$  Punkte  $D_{k,l}$  und  $N$  Punkte  $D_{pq,rs}$  auf  $l$ .

Die Doppelkurve schneidet daher  $l$  in  $M + 2N$  Punkten.

Da jede durch  $l$  gelegte Ebene noch  $\frac{mn(mn-1)}{2}$  Punkte der Doppelkurve enthält, so ist der Grad der Doppelkurve

$$M + 2N + \frac{mn(mn-1)}{2}.$$

Von der Doppelkurve lässt sich also folgendes behaupten:

*Die Doppelkurve auf der axialen Regelfläche einer in der Ebene  $\varepsilon$  befindlichen Gerade  $l$  schneidet die Gerade  $l$  in  $M$  gewöhnlichen und  $N$  Doppelpunkten. Die Strahlen, welche den  $M$  gewöhnlichen Punkten entstammen, liegen alle in der durch  $l$  und  $E'$  gelegten Ebene. Hier ist  $M$  der Grad der durch Umformung von  $\Pi(c_k + c_l) = 0$  erhaltenen Gleichung  $\Phi(\mu) = 0$ ,  $N$  der Grad der aus  $\Pi(c_p c_s - c_q c_r) = 0$  hergeleiteten Gleichung  $\Psi(\mu) = 0$ . Der Grad der Doppelkurve ist*

$$M + 2N + \frac{mn(mn-1)}{2}.$$

Betrachten wir jetzt den Fall, wo  $l$  durch  $X_3$  hindurchgeht, so ist der Schnitt eine  $m$ -fache Kurve, deren Grad im allgemeinen Falle  $m + n$  ist. Es wird jetzt die  $m$ -fache Gerade  $X_3 E$  abgesondert, wonach wir eine  $m$ -fache Kurve vom Grade  $m + n - 1$  erübrigen. Auf dieser Kurve sind  $X_1$  und  $X_2$   $n$ -fache Punkte (siehe S. 249); ihre Tangenten sind bez. mit  $X_1 X_4$  und  $X_2 X_4$  zusammengefallen. Die Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$  ( $\tau_{m-n} \neq 1$ ) sind alle gewöhnliche Punkte; ihre Tangenten convergiren alle nach dem Punkt  $T_0$  (siehe (95a), S. 250). Der Punkt  $E$  gehört jetzt der Restkurve *nicht* an. Es ist ferner  $B'$  ein  $(m-1)$ -facher Punkt, dessen Tangenten die ausserhalb  $\varepsilon$  liegenden Bilder von  $X_3 A = X_3 E$  sind.

Die in  $\omega_x$  liegende Kurve hat einen  $n(n-1)$ -fachen Punkt in  $X_3$ ; sie hat sonst keine Abweichungen von der obigen aufzuweisen.

Die  $m-n-1$  Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$  ( $\tau_{m-n} \neq 1$ ) sind auf der Fläche  $n$ -fache Punkte. Ihre Tangenten liegen aber jetzt nicht in  $\omega_x$ , sondern in den Ebenen, welche  $E_{\tau_{m-n}}$  mit der Gerade  $X_3 T_0$  (siehe S. 250) verbinden. Der Punkt  $E$  gehört der Fläche *nicht* an.

Es möge schliesslich die in  $\varepsilon$  liegende Gerade den Punkt  $X_4$  enthalten. In  $\omega_x$  befindet sich alsdann eine  $n$ -fache Kurve vom Grade  $m + n - 1$ . Auf dieser Kurve sind  $X_1$  und  $X_2$   $(n-1)$ -fache Punkte, deren Tangenten bez. mit  $X_1 X_3$  und  $X_2 X_3$  zusammenfallen. Es ist  $X_3$  ein  $(m-1)$ -facher Punkt, dessen Tangenten die  $m-1$  ausser-

halb  $\varepsilon$  liegenden Bilder von  $X_4 E$  sind. Es ist  $A$  ein  $(n-1)$ -facher Punkt, dessen Tangenten durch die ausserhalb  $\varepsilon$  liegenden Congruenzstrahlen bestimmt sind. Die Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$  ( $\tau_{m-n} \neq 1$ ) sind gewöhnliche Punkte; ihre Tangenten convergiren in einem auf  $X_3 E$  befindlichen Punkt. Der Punkt  $E$  gehört der Kurve *nicht* an.

Die in  $\omega_\infty$  liegende Kurve hat in  $X_4$  einen  $m(m-1)$ -fachen Punkt, dessen Tangenten alle in  $X_4 E$  vereinigt sind. Es weist übrigens diese Kurve keine Abweichungen auf.

Auf dieser Regelfläche verhalten die Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$  sich nicht anders als auf der allgemeinen Fläche. Nur der Punkt  $E$  befindet sich *nicht* auf der Fläche.

Der Schnitt mit einer durch  $X_1 X_2$  gelegten Ebene  $\omega_\mu$  zeigt daher keine anderen Eigenschaften als diejenigen, welche bei der axialen Regelfläche einer willkürlichen in  $\varepsilon$  liegenden Gerade erwähnt sind.

§ 10b. Die axiale Regelfläche einer in einer singulären Ebene  $\varepsilon_\tau$  liegenden Gerade, in der hyperbolischen Congruenz.

Die Ebene  $\varepsilon_\tau$  ( $\tau^{m+n} = 1$ ) ist *singulär* und trägt ein Strahlengebilde von der Klasse  $m+n$ ; sie gehört also als Ausartungsgebilde vom Grade  $m+n$  der axialen Regelfläche an. Die Restfläche ist somit vom Grade  $(m+n)(m+n-1) + 2mn$ .

Von den  $(m+n)^2$  Strahlen, welche einem auf  $l$  in  $\varepsilon_\tau$  liegenden Punkte entstammen, liegen  $m+n$  in der Ebene  $\varepsilon_\tau$ . Auf der Restfläche liegen deren also  $(m+n)(m+n-1)$ , wonach  $l$  auf der Restfläche eine  $(m+n)(m+n-1)$ -fache Gerade ist.

Wo kein Irrtum droht, wird mit der axialen Regelfläche die Restfläche gemeint.

Der Schnitt mit  $\omega_\infty$  der allgemeinen Regelfläche besteht aus  $mn$  mal  $AX_1$ ,  $mn$  mal  $AX_2$ ,  $m^2$  mal der Gerade  $AX_3$  und aus einer Kurve vom Grade  $n(2m+n)$ .

Die  $m^2$ -fache Gerade  $AX_3$  rührt von den  $m^2$  Strahlen her, welche dem Punkte  $A$  entstammen und  $\omega_0$  in der Nähe von  $A_3$  schneiden. Durch einen Punkt  $A$  von  $X_3 E_\tau$  gehen  $m+n$  Tangenten der in der Ebene  $\varepsilon_\tau$  liegenden Fokalkurve. Von diesen Tangenten fallen  $m$  mit der Gerade  $AE_\tau$  ( $\equiv X_3 E_\tau$ ) zusammen. Es ist dies leicht ersichtlich, sobald man die Gleichung der Fokalkurve in Linienkoordinaten betrachtet.

Die Tangente wird (als Congruenzstrahl in der Ebene  $x_1 = \tau x_2 = x_0$ ) durch

$$x_0 - p_1 x_3 - p_1 \frac{m}{n} x_4 = 0$$

dargestellt. Ihre Liniencoordinaten  $\varphi_0, \varphi_3, \varphi_4$  sind somit durch

$$\frac{\varphi_0}{1} = \frac{\varphi_3}{-p_1} = \frac{\varphi_4}{-p_1 \frac{m}{n}}$$

bestimmt, wonach

$$\varphi_0^{m+n} - (-1)^{m+n} \varphi_3^m \varphi_4^n = 0. \quad . \quad . \quad (127)$$

Der Punkt  $A$  ( $x_3 = ax_3, x_4 = 0$ ) wird offenbar durch die tangentielle Gleichung

$$a\varphi_0 + \varphi_3 = 0,$$

oder

$$\varphi_3 = -a\varphi_0$$

angewiesen. Durch die Substitution dieses Wertes in (28) findet man u. A.  $\varphi_0^m = 0$ ; es sind also von den aus  $A$  an der Fokalkurve gelegten Tangenten  $m$  mit der Geraden  $a\varphi_0 + \varphi_3 = 0$ ,  $\varphi_0 = 0$ , oder  $\varphi_0 = 0, \varphi_3 = 0$ , d. h. mit der Geraden  $AE$  zusammengefallen.

Wenn der auf  $l$  in  $\varepsilon_\tau$  liegende Punkt  $Y$  sich nahe an  $A$  befindet, so trägt  $Y$   $m$  Tangenten der Fokalkurve, welche in der Nähe von  $X_3 E_\tau$  liegen. Im Ganzen werden durch  $Y$   $m^2$  Strahlen gehen, welche  $\omega_0$  nahe bei  $E_\tau (\equiv A_3)$  schneiden. Von diesen  $m^2$  Strahlen befinden sich also  $m$  in der Ebene  $\varepsilon_\tau$ .

Wir schliessen demnach, dass von den  $m^2$  Geraden  $AE_\tau$ , welche  $A$  entstammen, nur  $m$  genau in  $\varepsilon_\tau$  liegen, während die  $m(m-1)$  übrigen sich ursprünglich ausserhalb  $\varepsilon_\tau$  befanden.

Es wird aber von dem Gesamtschnitte in  $\varepsilon_\tau$   $(m+n)$  mal die Gerade  $X_3 E_\tau$  abgesondert; aus dem Vorhergehenden leuchtet nun ein, dass von diesen  $m+n$  Geraden  $X_3 E_\tau$   $m$  dem Ausartungsgebilde angehört haben, welches aus  $m^2$  mal  $X_3 E_\tau (= AE_\tau)$  besteht. Wir müssen also schliessen, dass  $X_3 E_\tau$  noch  $n$  mal der in  $\omega_\infty$  liegenden Restkurve entnommen wird.

Die Restkurve, welche bei der willkürlichen Geraden vom Grade  $n(2m+n)$  war, wird jetzt vom Grade  $n(2m+n) - n = n(2m+n-1)$  sein.

Das Ausartungsgebilde, welches diese Restkurve zum vollständigen Schnitte von  $\omega_\infty$  mit der Restfläche ergänzt, besteht nunmehr aus  $mn$  mal  $AX_1$ ,  $mn$  mal  $AX_2$  und  $m(m-1)$  mal  $AX_3 \equiv X_3 E_\tau$ .

Es ist somit der totale Grad  $n(2m+n-1) + 2mn + m(m-1) = (m+n)(m+n-1) + 2mn$ .

Wie in der parabolischen Congruenz, genügt es den Fall zu erörtern, wo  $l$  in der Ebene  $\varepsilon$  ( $x_1 = x_2$ ) liegt.

Die Coordinaten von  $A$  erfüllen alsdann die Beziehung

$$a_1 = a_2 = a,$$

und zwischen den Coordinaten von  $B'$  besteht die Verbindung

$$b_1' = b_2' = b',$$

wonach auch hier die Gleichung

$$a_1 b_2' - a_2 b_1' = 0$$

gilt.

Die in  $\omega_\infty$  liegende Kurve (siehe (26b) S. 225) hat jetzt die Gleichung

$$\begin{aligned} \xi_1(\xi_1 + a\xi_3)^{\frac{m}{n}}\xi_3^{\frac{m}{n}} - \xi_2(\xi_2 + a\xi_3)^{\frac{m}{n}}\xi_3^{\frac{m}{n}} - \\ - b'(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 + a\xi_3)^{\frac{m}{n}}(\xi_2 + a\xi_3)^{\frac{m}{n}} = 0. \quad (110b) \end{aligned}$$

Die rationale Gleichung wird nun durch  $(\xi_1 - \xi_2)^n$  teilbar sein; wir können dies in analoger Weise wie in § 10a auf S. 270 nachweisen.

Die Kurve, welche vom Grade  $n(2m + n)$  war, ist daher zerfallen in  $n$  mal die Gerade  $X_3 E$  und eine Kurve vom Grade  $n(2m + n - 1)$ .

Auf der allgemeinen Kurve in  $\omega_\infty$  ist  $A$  ein  $n^2$ -facher Punkt.

Es sind jetzt  $n$  Zweige in  $AE$  vereinigt und somit von der Kurve abgesondert. Die Restkurve hat also in  $A$  einen  $n(n - 1)$ -fachen Punkt; seine Tangenten sind die axialen Projektionen aus  $l$  auf  $\omega_\infty$  der  $n(n - 1)$  ausserhalb  $\varepsilon$  liegenden nach  $A$  zielenden Strahlen.

Der Punkt  $X_3$  war damals ein  $mn$ -facher. Es sind aber jetzt von den  $mn$  Zweigen  $n$  in der abgesonderten Gerade  $X_3 E$  vereinigt. Es ist also  $X_3$  auf der Restkurve ein  $n(m - 1)$ -facher Punkt. Von den Tangenten sind je  $n$  mit einem der ausserhalb  $\varepsilon$  liegenden Bilder von  $X_4 E$  zusammengefallen. Der Punkt  $A_3 \equiv B_4'$  ist jetzt mit dem Punkte  $E$  identisch. In § 7b, wo  $l$  die Gerade  $X_3 X_4$  traf, war  $A_3 \equiv B_4'$  ein  $n^2$ -facher Punkt der Kurve in  $\omega_\infty$ . Es wird offenbar jetzt ein  $n(n - 1)$ -facher Punkt sein, dessen sämtliche Tangenten in  $X_3 E$  vereinigt sind. Es hat diese Gerade in  $E$   $m(n - 1)$  Punkte mit der Kurve gemein.

Die in  $\omega_0$  liegende Kurve ist jetzt zerfallen in  $m$  mal die Gerade

$X_4 E$  und in eine Restkurve vom Grade  $m(m + 2n - 1)$ . Wir können zwar ihre Eigenschaften aus dem unmittelbar Vorangehenden ableiten, indem wir  $m$  und  $n$ , und die Indices 3 und 4 vertauschen, müssen jedoch bemerken, dass  $E$  auf dieser Kurve ein  $n(m - 1)$ -facher Punkt ist und *nicht* ein  $m(n - 1)$ -facher, wie man erwarten könnte.

Es lässt sich diese Abweichung wie folgt erklären.

Im Falle der willkürlichen Gerade zeigte sich, dass alle  $mn$   $X_3$  entstammenden Strahlen im Punkte  $A_3$  ausmünden, und umgekehrt, wonach die Ordnung der Singularität von  $X_3$  und  $A$  die nämliche war.

Diese Eigenschaft erhält sich stets aufrecht, auch falls von diesen Strahlen  $X_3 A_3$  welche in eine singuläre Ebene abgesondert werden. Wie sich oben ergab, liegen von den  $mn$  nach  $X_3$  zielenden Strahlen nur  $n$  genau in  $\varepsilon$ . Die übrigen  $n(m - 1)$  Strahlen rühren vom auf der Restkurve in  $\omega_0$  liegenden Punkte  $E$  her. Wir schliessen, dass der Punkt  $E$  auf dieser Restkurve ein  $n(m - 1)$ -facher ist. Sämtliche Tangenten sind in der Gerade  $X_1 X_2$  vereinigt, welche in  $E$   $m(m - 1)$  Punkte mit der Kurve gemein hat.

Die Punkte  $X_1$  und  $X_2$  erfahren selbstverständlich keinen Einfluss von der Lage von  $l$  in  $\varepsilon$ .

Falls  $l$  die Gerade  $X_3 X_4$  (in  $S$ ) trifft, zeigt sich der Schnittpunkt  $S$  als ein  $(m + n)^2$ -facher Punkt der Fläche. Es leuchtet ein, dass, wenn  $l$  in  $\varepsilon$  liegt, der Tangentenkegel vom Grade  $(m + n)^2$  von  $S$  in  $(m + n)$  mal die Ebene  $\varepsilon$  und einen Kegel vom Grade  $(m + n)(m + n - 1)$  ausgeartet sein wird. Der Schnittpunkt  $S$  von  $l$  mit  $X_3 X_4$  ist also hier ein  $(m + n)(m + n - 1)$ -facher Punkt.

Die Gerade  $l$  schneidet die in  $\varepsilon$  befindliche Fokalkurve  $e$  in  $m + n$  Punkten  $L_e$ . Aus jedem Punkte  $L_e$  werden *zwei zusammenfallende* Tangenten an  $e$  gelegt, also zwei coincidirende Congruenzstrahlen in  $\varepsilon$ . Bei der Absonderung der Ebene  $\varepsilon$  wird jede an  $e$  gelegte Tangente *einmal* der totalen axialen Regelfläche entnommen. Die  $m + n$  in den Punkten  $L_e$  gelegten Tangenten funktionieren also *noch einmal* als Erzeugende der Restfläche. Sie schneiden  $X_3 X_4$  in  $m + n$  Punkten  $X_e$ .

Die Gerade  $X_3 X_4$  hat nun mit der Restfläche gemein:  $n(m - 1)$  mal den Punkt  $X_3$ ,  $m(n - 1)$  mal den Punkt  $X_4$ ,  $(m + n)(m + n - 1)$  mal den Punkt  $S$ , und *einmal* die Punkte  $X_e$ , zusammen also

$$n(m - 1) + m(n - 1) + (m + n)(m + n - 1) + m + n = \\ = (m + n)(m + n - 1) + 2mn \text{ Punkte.}$$

Wir haben nun die folgenden Resultate aufzuweisen:

*Die axiale Regelfläche einer in der singulären Ebene  $\varepsilon$  liegenden Gerade ist vom Grade  $(m + n)(m + n - 1) + 2mn$ . Die Punkte  $X_1$  und*

$X_2$  sind beide  $2mn$ -fache Punkte; die Tangenten in  $X_1$  befinden sich in  $2mn$  Ebenen, von denen  $mn$  zu je  $m$  in einer der  $n$  Ebenen

$$a^m(x_2 - ax_3)^n - x_4^n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (113b)$$

(siehe (46b) S. 232) und die übrigen  $mn$  zu je  $n$  in einer der  $m$  Ebenen

$$b'^n(x_2 - b'x_4)^m - x_3^m = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (113'b)$$

vereinigt sind; die Tangenten in  $X_2$  sind in derselben Weise über die Ebenen

$$a^m(x_1 - ax_3)^n - x_4^n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (114b)$$

und

$$b'^n(x_1 - b'x_4)^m - x_3^m = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (114'b)$$

verteilt.

Der Punkt  $X_3$  ist ein  $n(m-1)$ -facher Punkt, dessen Tangenten sich alle in  $\omega_\infty$  befinden. Der Punkt  $X_4$  dagegen ist ein  $m(n-1)$ -facher Punkt, dessen Tangenten alle in  $\omega_0$  liegen. Der Punkt  $E$  ist nun ein  $(2mn - m - n)$ -facher Punkt;  $n(m-1)$  Berührungsebenen sind in  $\omega_\infty$ ,  $m(n-1)$  in  $\varepsilon$  vereinigt. Der Schnittpunkt  $S$  von  $l$  mit  $X_3X_4$  ist ein  $(m+n)(m+n-1)$ -facher Punkt. Die Axe  $l$  ist eine  $(m+n)(m+n-1)$ -fache Gerade.

Der Schnitt in einer durch  $X_1X_2$  gelegten Ebene  $\omega_\mu$  hat in  $X_1$  und  $X_2$   $2mn$ -fache Punkte, dessen Tangenten die Schnittlinien von  $\omega_\mu$  mit den oben gegebenen Ebenen sind; er hat im Schnittpunkte von  $l$  mit  $\omega_\mu$  einen  $(m+n)(m+n-1)$ -fachen Punkt, dessen Tangenten durch die ausserhalb  $\varepsilon$  liegenden Congruenzstrahlen bestimmt sind. Der Punkt  $E$  ist ein  $(2mn - m - n)$ -facher Punkt, von dem  $n(m-1)$  Tangenten mit  $X_1X_2$  und  $m(n-1)$  mit der Schnittlinie von  $\omega_\mu$  und  $\varepsilon$  zusammenfallen. Der Schnitt hat Doppelpunkte in den Schnittpunkten von  $\omega_\mu$  mit der Doppelkurve.

In Bezug auf die Doppelkurve dürfen wir hinweisen auf das am Ende von § 10a Dargelegte. Der Unterschied ist nur, dass die Gleichung  $f(\pi) = 0$  eine andere Gestalt aufweist.

Betrachten wir jetzt noch den Fall, wo  $l$  den Punkt  $X_3$  oder  $X_4$  enthält.

Wenn  $l$  durch  $X_3$  geht, so wird die Ebene  $\omega_\infty$   $mn$  mal abgesondert. Man erübrigt eine Fläche vom Grade  $(m+n)(m+n-1) + mn$ , auf welcher  $X_1$  und  $X_2$   $mn$ -fache Punkte sind.

Die Gerade  $X_3X_4$  schneidet die Restfläche  $m(n-1)$  mal in  $X_4$ ,



$(m+n)(m+n-1)$  mal in  $X_3$  und *einmal* in den  $m$  Schnittpunkten  $X_e$  der Tangenten, welche man in den  $m$  ausserhalb  $X_3$  liegenden Schnittpunkten von  $l$  mit der Fokalkurve  $e$  an dieser legen kann.

Die in  $\omega_0$  liegende Kurve ist identisch mit der  $m$ -fachen Kurve (siehe (93b), S. 254)

$$\frac{(x_1 - b' x_4)^m x_1^n - (x_2 - b' x_4)^m x_2^n}{x_1 - x_2} = 0.$$

Diese ist vom Grade  $m+n-1$  und schneidet  $X_1 X_2$  in den  $m+n-1$  Punkten  $E_{\tau_{m+n}}$  ( $\tau_{m+n} \neq 1$ ); die Tangenten in diesen Punkten convergiren alle nach  $T'_0$  (siehe (95b), S. 255).

Die in  $\omega_\infty$  liegende Kurve hat nun in  $X_3$  einen  $n(m+n-1)$ -fachen Punkt; seine Tangenten verbinden  $X_3$  mit den  $m+n-1$  Punkten  $E_{\tau_{m+n}}$  ( $\tau_{m+n} \neq 1$ ). Es haben diese Tangenten in  $X_3$   $n(2m+n-1)$  Punkte mit der Kurve gemein. Übrigens haben wir keine Abweichungen aufzuweisen.

Wenn  $l$  in  $\varepsilon$  den Punkt  $X_4$  enthält, so wird die Ebene  $\omega_0$   $mn$  mal abgesondert. Wir erübrigen eine Fläche vom Grade  $(m+n)(m+n-1) + mn$ , auf welcher  $X_1$  und  $X_2$   $mn$ -fache Punkte sind. Die Gerade  $X_3 X_4$  schneidet die Fläche  $n(m-1)$  mal in  $X_3$ ,  $(m+n)(m+n-1)$  mal in  $X_4$  und *einmal* in den  $n$  Schnittpunkten  $X_e$  der Tangenten, welche in den  $n$  ausserhalb  $X_4$  liegenden Schnittpunkten von  $l$  mit der Fokalkurve  $e$  an diese gelegt werden.

Die in  $\omega_\infty$  befindliche Kurve ist in eine  $n$ -fache Kurve vom Grade  $m+n-1$  ausartet.

§ 11a. Die axiale Regelfläche einer in  $\varepsilon$  liegenden Gerade  $l_\mu$ , welche  $X_1 X_2$  (in  $E$ ) schneidet, in der parabolischen Congruenz.

Weil jede durch  $E$  hindurchgehende Gerade in  $\omega_\infty$  ein Congruenzstrahl ist, so wird die Ebene  $\omega_\infty$  ein Bestandteil der Regelfläche sein. Um zu erledigen, wieviel mal  $\omega_\infty$  abzusondern ist, haben wir nur zu untersuchen, wieviel-fach ein Strahl in  $\omega_\infty$  durch  $E$  ist, wenn er als Grenzlage eines ausserhalb  $\omega_\infty$  liegenden Strahles betrachtet wird, oder, was dasselbe ist, wieviel ausserhalb  $\omega_\infty$  liegende Strahlen sich in einer willkürlichen durch  $E$  gelegten Ebene befinden

Diese Anzahl wird ermittelt, indem wir die Bildkurve einer in  $\omega_\infty$  liegenden durch  $E$  gehenden Gerade betrachten, und untersuchen, wieviel Punkte eine in  $\omega_0$  liegende, durch  $E$  gehende Gerade ausser  $E$  mit dieser Kurve gemein hat.

Die Bildkurve der durch

$$x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0$$

angewiesenen Gerade  $l$  wird durch

$$x_1^{\frac{n}{m}} - x_2^{\frac{n}{m}} + \lambda x_3^{\frac{n}{m}} = 0$$

dargestellt, oder wenn wir

$$x_2 = x_1 + x_2'$$

setzen, durch

$$(x_1 + x_2')^{\frac{n}{m}} = x_1^{\frac{n}{m}} + \lambda x_3^{\frac{n}{m}},$$

also durch

$$(x_1 + x_2')^n = x_1^n + m\lambda x_1^{\frac{n}{m}(m-1)} x_3^{\frac{n}{m}} + \dots + \lambda^m x_3^n,$$

oder

$$n x_1^{n-1} x_2' + \dots + x_2'^n = m\lambda x_1^{\frac{n}{m}(m-1)} x_3^{\frac{n}{m}} + \dots + \lambda^m x_3^n.$$

Hieraus ergibt sich, dass, da die höchste Potenz von  $x_1$ , d. h.  $x_1^{\frac{n}{m}(m-1)}$ , den Coefficient  $x_3^{\frac{n}{m}}$  hat, der Punkt  $E$  ein  $n$ -facher ist. Eine durch  $E$  gelegte Ebene enthält daher  $mn - n = (m-1)n$  Strahlen ausserhalb  $\omega_\infty$ . Es sind somit  $n$  Strahlen in die Schnittlinie der Ebene mit  $\omega_\infty$  gefallen.

Es leuchtet ein, dass von der ursprünglichen Regelfläche die Ebene  $\omega_\infty$   $n$  mal abzusondern ist, wonach man eine Restfläche vom Grade  $m(m+n-1) - n = (m+n)(m-1)$  erübrigt.

Es ist also in jedem Schnitte mit einer durch  $X_1 X_2$  gelegten Ebene die Gerade  $X_1 X_2$   $n$  mal der in § 9a und § 10a hergeleiteten Kurve zu entnehmen. Die Resultaten von § 9a und § 10a werden am einfachsten combinirt, indem man in § 9a

$$\alpha_2 = -\alpha_1$$

einsetzt. Die Gleichung des in  $\omega_\infty$  befindlichen Schnittes ist alsdann, nach Teilung durch  $x_3$  (siehe (104a), S. 262),

$$x_1^{\frac{m}{n}} - x_2^{\frac{m}{n}} - \mu(x_1 - x_2)x_3^{\frac{m-n}{n}} = 0. \quad (128a)$$

Nach Rationalisirung erscheint diese Gleichung teilbar durch

$(x_1 - x_2)^n$ . Die Kurve vom Grade  $mn$  ist nun in die  $n$ -fache Gerade  $X_3E$  und eine Kurve vom Grade  $n(m-1)$  zerfallen. Diese hat in  $X_3$  einen  $n(n-1)$ -fachen Punkt, dessen sämtliche Tangenten in  $X_3E$  vereinigt sind. Es hat diese Tangente ausser  $X_3$  keinen Punkt mit der Kurve gemein. Der Punkt  $E$  gehört der Kurve nicht an.

Die in  $\omega_0$  liegende Kurve besteht jetzt aus der  $n(m-1)$ -fachen Gerade  $X_1X_2$  und aus einer Kurve vom Grade  $m(m-1)$ .

Die Gleichung

$$x_1 - x_2 + \mu(x_1^{\frac{n}{m}} - x_2^{\frac{n}{m}})x_4^{\frac{m-n}{m}} = 0 \quad \dots \quad (129a)$$

erscheint ja nach Rationalisierung teilbar durch  $(x_1 - x_2)^m$ .

Es ist auf der Fläche  $X_1X_2$  eine  $n(m-1)$ -fache,  $X_3X_4$  eine  $n(n-1)$ -fache Gerade (Siehe weiter § 8a, § 9a, § 10a).

§ 11b. *Die axiale Regelfläche einer in  $\varepsilon$  liegenden Gerade  $l_\mu$ , welche  $X_1X_2$  (in  $E$ ) schneidet, in der hyperbolischen Congruenz.*

Wir haben hier die Ergebnisse von § 9b und § 10b zu verschmelzen.

Die Schnittkurve in  $\omega_\infty$  hat die Gleichung  $(\alpha_2 = -\alpha_1)$

$$x_1^{\frac{m}{n}} x_3^{\frac{m+n}{n}} - x_2^{\frac{m}{n}} x_3^{\frac{m+n}{n}} - \mu(x_1 - x_2)x_1^{\frac{m}{n}} x_2^{\frac{m}{n}} = 0. \quad \dots \quad (128b)$$

Nach Rationalisierung wird sie teilbar durch  $(x_1 - x_2)^*$ .

Wir erübrigen also eine Kurve vom Grade  $n(2m + n - 1)$ .

Übrigens unterscheidet diese Regelfläche sich nicht wesentlich von der in § 10b erörterten Fläche.

§ 12a. *Die axiale Regelfläche eines Congruenzstrahles in der parabolischen Congruenz.*

Die Ebene, welche einen Congruenzstrahl  $s$  mit  $X_1$  verbindet, ist singulär und trägt ein Strahlengebilde von der Klasse  $m$ . Es ist diese Ebene  $(s, X_1)$  daher als ein Bestandteil  $m^{\text{ten}}$  Grades der axialen Regelfläche zu betrachten. Aus denselben Gründen ist auch die Ebene, welche  $s$  mit  $X_2$  vereinigt, als Bestandteil  $m^{\text{ten}}$  Grades zu betrachten.

Aus dem Obigen geht hervor, dass wir eine Fläche vom Grade  $m(m + n - 2)$  erübrigen.

Von den  $m^2$  Strahlen, welche sich in einem Punkte von  $s$  treffen, ist  $s$  selbst ein Exemplar;  $m - 1$  andere liegen in der Ebene  $(s, X_1)$ , noch  $m - 1$  andere liegen in der Ebene  $(s, X_2)$ ; es liegen deren also ausserhalb  $s$  auf der Restfläche  $m^2 - 2(m - 1) - 1 = (m - 1)^2$ . Der

Strahl  $s$  ist demnach auf seiner axialen Regelfläche eine  $(m-1)^2$ -fache Gerade.

Der Schnitt von  $\omega_\infty$  mit der allgemeinen Regelfläche besteht aus  $n(m-n)$  mal der Geraden  $AX_1$ ,  $n(m-n)$  mal der Geraden  $AX_2$ ,  $(m-n)$  mal den  $m-n$  Geraden  $AE'_{\tau_{m-n}}$  und aus einer Kurve vom Grade  $n(m+n)$ .

Der Fokalkegel  $F_2$  hat in  $X_1X_2$  eine  $n$ -fache Kante, deren sämtliche Berührungsebenen in  $\omega_\infty$  vereinigt sind. Die Ebene  $(s, X_1)$  schneidet also  $F_2$  in einer Kurve  $m^{\text{ter}}$  Klasse, welche in  $X_1$  einen  $n$ -fachen Punkt hat. Die  $n$  Tangenten in  $X_1$  sind alle in  $X_1S$  zusammengefallen, wenn mit  $S$  die Spur von  $s$  in  $\omega_\infty$  bezeichnet wird. Diese  $n$  Geraden  $X_1S$  können als die Grenzlagen von  $n$  Geraden betrachtet werden, welche einem auf  $s$  nahe bei  $S$  liegenden Punkte  $Y$  entstammen und überdies die Kurve  $m^{\text{ter}}$  Klasse berühren. Weil letztere auf der Fokallfläche liegt, so sind die  $n$  Tangenten Congruenzstrahlen. Wir stoßen hier auf einen Unterschied mit dem Falle, wo es sich um eine willkürliche Gerade  $l$  handelt. In diesem Falle sind die aus einem nahe bei  $A$  liegenden Punkte  $Y$  an die in der Ebene  $(l, X_1)$  befindlichen Kurve gelegten Tangenten eben *nicht* Congruenzstrahlen, da die Ebene  $(l, X_1)$  nicht singulär ist.

Die  $n$  Tangenten  $SX_1$  erscheinen also als Congruenzstrahlen nur dann, wenn wir uns dem Punkte  $S$  längs einem Congruenzstrahle  $s$  nähern. Sie gehören somit den  $n(m-n)$  Geraden  $AX_1$  sonst nicht an, werden deshalb jetzt der in  $\omega_\infty$  liegenden Restkurve entzogen, deren Grad demnach um  $2n$  erniedrigt wird und also den Wert  $n(m+n-2)$  erhält. Die Ebene  $(s, X_1)$  ist im Ganzen  $m$ -fach abgesondert,  $SX_1$  daher dem Gesamtschnitte in  $\omega_\infty$   $m$  mal entnommen. Wie oben gezeigt wurde, werden von diesen  $m$  Geraden  $SX_1$   $n$  der Restkurve entzogen, und somit  $m-n$  den  $n(m-n)$  Geraden  $SX_1$ , welche ursprünglich dem Ausartungsgebilde angehörten. Das Ausartungsgebilde enthält also jetzt  $(n-1)(m-n)$  mal die Gerade  $SX_1$  und  $(n-1)(m-n)$  mal die Gerade  $SX_2$ .

Unser Schluss ist demnach, dass die Restfläche, vom Grade  $m(m+n-2)$ , die Ebene  $\omega_\infty$  schneidet in  $(n-1)(m-n)$  mal der Geraden  $SX_1$ ,  $(n-1)(m-n)$  mal der Geraden  $SX_2$ ,  $(m-n)$  mal den  $m-n$  Geraden  $SE'_{\tau_{m-n}}$  und in einer Restkurve vom Grade  $n(m+n-2)$ .

Da die Spur  $S'$  von  $s$  in  $\omega_0$  eines der Bilder von  $S$  ist, so haben wir

$$\left. \begin{array}{ll} a_1 = s_1, & a_2 = s_2, \\ b_1' = s_1^{\frac{m}{n}}, & b_2' = s_2^{\frac{m}{n}}. \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (130a)$$

Die in  $\omega_\infty$  liegende Kurve hat (siehe (26a), S. 200) die Gleichung

$$\xi_2(\xi_1 + s_1 \xi_3)^{\frac{m}{n}} - \xi_1(\xi_2 + s_2 \xi_3)^{\frac{m}{n}} + (s_2^{\frac{m}{n}} \xi_1 - s_1^{\frac{m}{n}} \xi_2) \xi_3^{\frac{m}{n}} = 0. \quad (131a)$$

Wir bringen diese Gleichung in die Gestalt:

$$\xi_2(\xi_1 + s_1 \xi_3)^{\frac{m}{n}} + s_2^{\frac{m}{n}} \xi_1 \xi_3^{\frac{m}{n}} = \xi_1(\xi_2 + s_2 \xi_3)^{\frac{m}{n}} + s_1^{\frac{m}{n}} \xi_2 \xi_3^{\frac{m}{n}},$$

und potenzieren die beiden Seiten mit  $n$ , wonach sich ergibt

$$\begin{aligned} \xi_2^n (\xi_1 + s_1 \xi_3)^m + n s_2^{\frac{m}{n}} \xi_1 \xi_2^{n-1} (\xi_1 + s_1 \xi_3)^{\frac{m(n-1)}{n}} \xi_3^{\frac{m}{n}} + \dots + s_2^m \xi_1^n \xi_3^m = \\ = \xi_1^n (\xi_2 + s_2 \xi_3)^m + n s_1^{\frac{m}{n}} \xi_1^{n-1} \xi_2 (\xi_2 + s_2 \xi_3)^{\frac{m(n-1)}{n}} \xi_3^{\frac{m}{n}} + \dots + s_1^m \xi_2^n \xi_3^m. \end{aligned}$$

Es zeigt sich, dass die Glieder mit  $\xi_1^n \xi_3^m$  und  $\xi_2^n \xi_3^m$  verschwinden, wonach die ganze Gleichung durch  $\xi_1 \xi_2$  teilbar wird.

Die rationale Gleichung ist also teilbar durch  $\xi_1^n \xi_2^n$ , womit ausgedrückt wird, dass von der ursprünglichen Kurve  $n$  mal die Gerade  $SX_1$  und  $n$  mal die Gerade  $SX_2$  abgesondert wird.

Es erübrigt somit eine Kurve vom Grade  $n(m + n - 2)$ .

Der Punkt  $X_1$ , wird jetzt ein  $n(n - 1)$ -facher, dessen Tangenten alle noch mit  $SX_1$  zusammenfallen.

Ebenso wird  $X_2$  ein  $n(n - 1)$ -facher Punkt sein, dessen Tangenten alle sich in  $SX_2$  vereinigen.

Der Punkt  $S$  ist jetzt ein  $(n - 1)^2$ -facher, weil von den ursprünglichen  $n^2$  Zweigen  $n$  mit  $SX_1$ ,  $n$  mit  $SX_2$  zusammengefallen sind, während ein Zweig (da  $s$  selbst Congruenzstrahl ist) unbestimmt geworden ist.

Übrigens hat die Kurve in  $\omega_\infty$  keine besonderen Eigenschaften aufzuweisen.

Die in  $\omega_0$  liegende Kurve wird jetzt (siehe (40a), S. 207) durch

$$\xi_2(\xi_1 + s_1^{\frac{m}{n}} \xi_4)^{\frac{n}{m}} - \xi_1(\xi_2 + s_2^{\frac{m}{n}} \xi_4)^{\frac{n}{m}} + (s_2^{\frac{m}{n}} \xi_1 - s_1^{\frac{m}{n}} \xi_2) \xi_4^{\frac{n}{m}} = 0 \quad (132a)$$

dargestellt. Nach Rationalisirung erscheint diese Gleichung teilbar durch  $\xi_1^m \xi_2^m$ ; es wird somit der ursprünglichen Kurve  $m$  mal die Gerade  $S'X_1$  und  $m$  mal die Gerade  $S'X_2$  entnommen, wonach eine Restkurve vom Grade  $m(m + n - 2)$  übrig bleibt.

Es ist auf dieser Restkurve  $X_1$  ein  $m(n - 1)$ -facher Punkt, von dessen Tangenten je  $m$   $X_1$  mit einem der ausserhalb  $S'X_1$  liegenden Bilder von  $S$  verbinden. Ebenso ist  $X_2$  ein  $m(n - 1)$ -facher Punkt, von dessen Tangenten je  $m$  in eine der  $n - 1$  Geraden zusam-

menfallen, welche  $X_2$  mit den  $n(n-1)$  ausserhalb  $S'X_2$  liegenden Bildern von  $S$  verbinden.

Der Punkt  $S'$  ist ein  $(m-1)^2$ -facher; seine Tangenten sind die axialen Projektionen aus  $s$  auf  $\omega_0$  der  $(m-1)^2$  ausserhalb  $(s, X_1)$  und  $(s, X_2)$  liegenden nach  $S'$  zielenden Congruenzstrahlen.

Übrigens haben wir nichts wesentlich Neues zu vermelden.

Von den Punkten  $X_1$  und  $X_2$  als Punkten der Fläche lässt sich bemerken, dass beide  $m(n-1)$ -fache Punkte sind. Die Tangenten in  $X_1$  befinden sich in  $m(n-1)$  Ebenen, von denen je  $m$  zusammenfallen in die  $n-1$  Ebenen (siehe (46a), S. 211)

$$\frac{(x_2 - s_2 x_3)^n - s_2^m x_4^n}{x_2 - s_2 x_3 - s_2^{\frac{n}{m}} x_4} = 0, \quad . \quad . \quad (133a)$$

wobei für  $s_2^{\frac{n}{m}}$  im Nenner die der Spur  $S'$  von  $s$  in  $\omega_0$  entsprechende  $n$ -te Wurzel von  $s_2^m$  einzusetzen ist.

Die Tangenten in  $X_2$  sind in  $m(n-1)$  Ebenen aufgespeichert, von denen je  $m$  zusammenfallen in die  $n-1$  Ebenen (siehe (45a), S. 211)

$$\frac{(x_1 - s_1 x_3)^n - s_1^m x_4^n}{x_1 - s_1 x_3 - s_1^{\frac{n}{m}} x_4} = 0, \quad . \quad . \quad (134a)$$

wo  $s_1^{\frac{n}{m}}$  die Spur  $S'$  bestimmt.

Der Schnitt mit einer durch  $X_1 X_2$  gelegten Ebene ist eine Kurve vom Grade  $m(m+n-2)$ , welche in  $X_1$  und  $X_2$   $m(n-1)$ -fache Punkte aufweist. Von den Tangenten in  $X_1$  sind je  $m$  in einer der  $n-1$  Schnittlinien von  $\omega_\mu$  mit den  $n-1$  Ebenen (133a), von denen in  $X_2$  sind je  $m$  in einer der  $n-1$  Spuren in  $\omega_\mu$  der  $n-1$  Ebenen (134a) vereinigt.

Die Kurve hat im Schnittpunkte  $S_\mu$  von  $s$  mit  $\omega_\mu$  einen  $(m-1)^2$ -fachen Punkt, dessen Tangenten durch die  $(m-1)^2$  nach  $S_\mu$  zielenden Congruenzstrahlen bestimmt werden.

Ferner besitzt die Kurve in den  $m-n$  Punkten  $E_{\tau_{m-n}}$   $n$ -fache Punkte, deren sämtliche Tangenten in  $\omega_\infty$  aufgespeichert sind, während die Tangenten in  $\omega_\infty$  die Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$  verbinden mit dem Schnittpunkte von  $X_3 S$  und der Gerade

$$(m-n)(\xi_1 - \xi_2) + m(s_1 - s_2)\xi_3 = 0 \quad . \quad . \quad (135a)$$

(siehe S. 217).

Die Kurve hat schliesslich Doppelpunkte in den Schnittpunkten von  $\omega_\mu$  mit der *Doppelkurve*.

Wir wollen diese Doppelkurve näher betrachten.

Die Gleichungen

$$f_1(\pi_1) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

und

$$f_2(\pi_2) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad , \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

welche zusammen die Spuren der Strahlen bestimmen, welche sich in einem Punkte von  $s$  schneiden, haben jetzt bez. die Wurzeln  $\pi_1 = 0$  und  $\pi_2 = 0$ .

Die durch Fortschaffung dieser Wurzeln entstandenen Gleichungen wollen wir mit

$$s_1(\pi_1) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (136)$$

$$s_2(\pi_2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (137)$$

andeuten; sie sind nun vom Grade  $m - 1$ .

Nachdem wir die Gleichungen (136) und (137) an die Stelle der Gleichungen (74) und (85) gesetzt haben, können wir das Verfahren von § 6a wiederholen. Weil die Zahl  $m$  jetzt um eins erniedrigt ist, so wird auch die Doppelkurve einen niedrigeren Grad aufweisen als im allgemeinen Falle.

#### § 12b. Die axiale Regelfläche eines **Congruenzstrahles** in der **hyperbolischen Congruenz**.

Die singuläre Ebene, welche den Congruenzstrahl  $s$  mit  $X_1$  verbindet, enthält ein Strahlengebilde von der Klasse  $m + n$ . Sie bildet demnach ein Bestandteil vom Grade  $m + n$  der axialen Regelfläche von  $s$ . Ebenso wird dieser axialen Regelfläche  $(m + n)$  mal die Verbindungsebene  $(s, X_2)$  entnommen. Die Restfläche ist daher vom Grade  $(m + n)^2 + 2mn - 2(m + n) = (m + n)(m + n - 2) + 2mn$ .

Zu den  $(m + n)^2$  Strahlen, welche nach einem Punkte von  $s$  zielen, gehören, ausser  $s$ , noch  $m + n - 1$  Strahlen in  $(s, X_1)$  und  $m + n - 1$  Strahlen in  $(s, X_2)$ , wonach deren nur  $(m + n)^2 - 2(m + n - 1) - 1 = (m + n - 1)^2$  auf der Restfläche liegen; hierdurch erscheint  $s$  auf seiner axialen Regelfläche als eine  $(m + n - 1)^2$ -fache Gerade.

Der Schnitt der allgemeinen Regelfläche mit  $\omega_\infty$  setzt sich aus  $mn$  mal der Gerade  $AX_1$ ,  $mn$  mal der Gerade  $AX_2$ ,  $m^2$  mal der Gerade  $AX_3$  und aus einer Kurve vom Grade  $n(2m + n)$  zusammen.

Die  $(m+n)^2$  Strahlen, welche nach einem auf  $s$  in der Nähe von der Spur  $S$  in  $\omega_\infty$  liegenden Punkte  $Y$  zielen, treffen die Ebene  $\omega_0$  in  $(m+n)^2$  Punkten, deren gegenseitige Lage hierneben (für  $m=3$ ,  $n=2$ ) skizzirt ist.

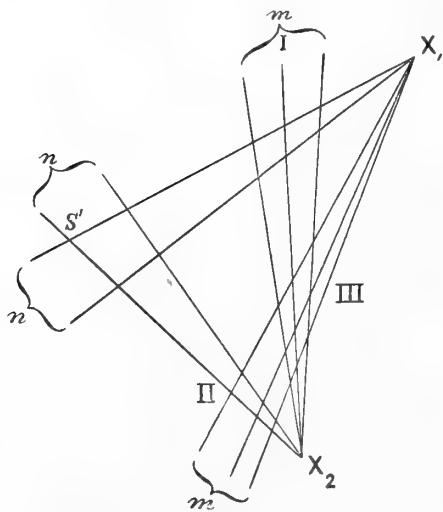


Fig. 13.

Nahe bei  $X_1$  liegen  $mn$  Punkte (I), in der Nähe von  $X_2$  befinden sich  $mn$  Punkte (II); nahe bei  $S_3$  (dem Schnittpunkte von  $X_3 S$  mit  $X_1 X_2$ ) liegen  $m^2$  Punkte (III). Ferner hat man noch  $n^2$  Punkte, welche nicht in der Nähe von  $X_1 X_2$  liegen, und denen  $S'$ , die Spur von  $s$  in  $\omega_0$ , angehört.

Wenn  $Y$  in  $S$  gelegt wird, so fallen die  $mn$  Punkte (I) mit  $X_1$ , die  $mn$  Punkte (II) mit  $X_2$  und die  $m^2$  Punkte (III) mit  $S_3$  zusammen.

Schon bevor  $Y$  mit  $S$  vereinigt wird, enthält die Ebene  $(s, X_1)$ , also die Gerade  $S' X_1$ ,  $m$  Punkte (I) und die Ebene  $(s, X_2)$ , also die Gerade  $S' X_2$ ,  $m$  Punkte (II). Die Ebene  $(s, X_1)$  trägt deshalb  $m$  Strahlen, absorbiert also  $m$  mal die in  $\omega_\infty$  liegende Gerade  $SX_1$ . Von den  $mn$  Strahlen  $SX_1$  bleiben demnach nur  $m(n-1)$  übrig. Ebenso entnimmt die Ebene  $(s, X_2)$  dem Schnitte  $m$  Strahlen  $SX_2$ , wonach von den  $mn$  Strahlen  $SX_2$  nur  $m(n-1)$  erübrigt werden.

Da die Ebene  $(s, X_1)$  im Ganzen eine  $(m+n)$ -fache ist, so wird, ausser  $m$  mal der Gerade  $SX_1$  als Ausartungselement, noch  $n$  mal diese Gerade der Restkurve entzogen; auch  $SX_2$  wird  $n$  mal von der Restkurve abgesondert.

Der Punkt  $S$ , welche auf der Restfläche ein  $(m+n-1)^2$ -facher ist, trägt noch  $m(n-1)$  Strahlen  $SX_1$ ,  $m(n-1)$  Strahlen  $SX_2$ ,  $m^2$  Strahlen  $SX_3$  und  $(n-1)^2$  Strahlen, welche  $S$  mit seinen ausserhalb  $S' X_1$  und  $S' X_2$  liegenden Bildern verbinden.

Die in  $\omega_\infty$  befindliche Restkurve ist jetzt vom Grade  $n(2m+n)-2n = n(2m+n-2)$ . Wenn wir in der entsprechenden Gleichung ((26b), S. 225) des allgemeinen Falles

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= s_1, a_2 = s_2, \\ b_1' &= s_1^{-\frac{m}{n}}, b_2' = s_2^{-\frac{m}{n}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (130b)$$

einsetzen, so folgt



$$\xi_1(\xi_1 + s_1 \xi_3)^{\frac{m}{n}} \xi_3^{\frac{m}{n}} - \xi_2(\xi_2 + s_2 \xi_3)^{\frac{m}{n}} \xi_3^{\frac{m}{n}} - \\ - (s_2)^{\frac{m}{n}} \xi_1 - s_1^{\frac{m}{n}} \xi_2)(\xi_1 + s_1 \xi_3)^{\frac{m}{n}} (\xi_2 + s_2 \xi_3)^{\frac{m}{n}} = 0. \quad (131b)$$

Indem man diese Gleichung in die Gestalt

$$s_1^{\frac{m}{n}} s_2^{\frac{m}{n}} \xi_1(\xi_1 + s_1 \xi_3)^{\frac{m}{n}} \xi_3^{\frac{m}{n}} + s_2^{\frac{m}{n}} \xi_2(\xi_1 + s_1 \xi_3)^{\frac{m}{n}} (\xi_2 + s_2 \xi_3)^{\frac{m}{n}} = \\ = s_1^{\frac{m}{n}} s_2^{\frac{m}{n}} \xi_2(\xi_2 + s_2 \xi_3)^{\frac{m}{n}} \xi_3^{\frac{m}{n}} + s_1^{\frac{m}{n}} \xi_1(\xi_1 + s_1 \xi_3)^{\frac{m}{n}} (\xi_2 + s_2 \xi_3)^{\frac{m}{n}}$$

bringt und nachher beide Seiten mit  $n$  potenzirt, erhält man

$$s_1^m s_2^m \xi_1^n (\xi_1 + s_1 \xi_3)^m \xi_3^m + n s_1^{\frac{m(n-1)}{n}} s_2^m \xi_1^{n-1} \xi_2 (\xi_1 + s_1 \xi_3)^m (\xi_2 + s_2 \xi_3)^m \xi_3^{\frac{m(n-1)}{n}} + \dots + \\ + s_2^m \xi_2^n (\xi_1 + s_1 \xi_3)^m (\xi_2 + s_2 \xi_3)^m = s_1^m s_2^m \xi_2^n (\xi_2 + s_2 \xi_3)^m \xi_3^m + \\ + n s_1^{\frac{m(n-1)}{n}} s_2^m \xi_1 \xi_2^{n-1} (\xi_1 + s_1 \xi_3)^m (\xi_2 + s_2 \xi_3)^m \xi_3^{\frac{m(n-1)}{n}} + \dots + s_1^m \xi_1^n (\xi_1 + s_1 \xi_3)^m (\xi_2 + s_2 \xi_3)^m.$$

Es erhellt, dass die Glieder mit  $\xi_1^n \xi_3^{2m}$  und  $\xi_2^n \xi_3^{2m}$  verschwinden, sodass die Gleichung durch  $\xi_1 \xi_2$  teilbar wird.

Die rationale Gleichung wird daher durch  $\xi_1^n \xi_2^n$  teilbar sein; vom der ursprünglichen Kurve ist somit  $n$  mal die Gerade  $SX_1$  und  $n$  mal die Gerade  $SX_2$  abgesondert; die Restkurve ist demnach vom Grade  $n(2m + n) - 2n = n(2m + n - 2)$ , wie auch oben gefunden ist.

Von dieser Kurve lässt sich nun bemerken, dass  $X_1$  ein  $n(m-1)$ -facher Punkt ist, von dessen Tangenten je  $n$  in einer der  $m-1$  Geraden vereinigt sind, welche  $X_1$  mit den  $(m-1)^2$  ausserhalb  $SX_1$  und  $SX_2$  liegenden Bilder von  $S'$  verbinden. Ebenso ist  $X_2$  ein  $n(m-1)$ -facher Punkt, von dessen Tangenten je  $n$  zusammengefallen sind in einer der  $m-1$  Geraden, welche  $X_2$  mit diesen  $(m-1)^2$  Bildern von  $S'$  verbinden.

Der Punkt  $S$  ist ein  $(n-1)^2$ -facher Punkt; seine Tangenten sind die axialen Projektionen aus  $s$  auf  $\omega_\infty$  der ausserhalb  $(s, X_1)$  und  $(s, X_2)$  liegenden nach  $S'$  zielenden Congruenzstrahlen.

Falls man hat  $m > n$ , besitzt die Kurve in  $S'_4$  (dem Schnittpunkte von  $X_4 S'$  mit  $X_1 X_2$ ) einen  $n^2$ -fachen Punkt, dessen sämtliche Tangenten in der Gerade  $SS'_4$  vereinigt sind; es hat diese Gerade in  $S'_4$  mit der Kurve  $mn$  Punkte gemein (siehe S. 229).

Der Punkt  $X_3$  ist, wie früher, ein  $mn$ -facher Punkt, von dessen Tangenten je  $n$  in einem der  $m$  Bilder der Gerade  $X_4 S_3$  zusammengefallen sind, die  $X_4$  mit dem Schnittpunkte  $S_3$  von  $SX_3$  und  $X_1 X_2$  verbindet.

Die Kurve in  $\omega_0$  unterscheidet sich nur im Verhalten des Punktes  $S_3$ . Es ist dieser Punkt, für  $m > n$ , ein  $mn$ -facher Punkt, dessen Tangenten alle mit  $X_1 X_2$  zusammengefallen sind; die Gerade  $X_1 X_2$  hat in  $S_3$   $m^2$  Punkte mit der in  $\omega_0$  liegenden Kurve gemein (siehe S. 231).

Die Punkte  $X_1$  und  $X_2$  sind jetzt auf der Fläche  $\{2mn - (m + n)\}$ -fache Punkte. Die Tangenten von  $X_1$  liegen in  $2mn - (m + n)$  Ebenen. Von diesen Ebenen sind  $m(n - 1)$  zu je  $m$  in einer der  $n - 1$  Ebenen

$$\frac{(x_2 - s_2 x_3)^n s_2^m - x_4^n}{x_2 - s_2 x_3 - s_2^{\frac{m}{n}} x_4} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (133b)$$

vereinigt, wo  $s_2^{\frac{m}{n}}$  die eine der beide Coordinaten von  $S'$  darstellt; von den übrigen sind je  $n$  in einer der  $m - 1$  Ebenen

$$\frac{(x_2 - s_2^{\frac{m}{n}} x_4)^m s_2^{-m} - x_3^m}{x_2 - s_2 x_3 - s_2^{\frac{m}{n}} x_4} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (133'b)$$

zusammengefallen; die Grösse  $s_2^{\frac{m}{n}}$  hat sowohl im Zähler wie im Nenner die oben erwähnte Bedeutung.

Die Tangenten von  $X_2$  befinden sich teilweise in den  $n - 1$   $m$ -fachen Ebenen, welche durch

$$\frac{(x_1 - s_1 x_3)^n s_1^m - x_4^n}{x_1 - s_1 x_3 - s_1^{\frac{m}{n}} x_4} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (134b)$$

dargestellt werden; es bedeutet  $s_1^{\frac{m}{n}}$  die andere Coordinate von  $S'$ . Der andere Teil ist in den  $m - 1$   $n$ -fachen Ebenen

$$\frac{(x_1 - s_1^{\frac{m}{n}} x_4)^m s_1^{-m} - x_3^m}{x_1 - s_1 x_3 - s_1^{\frac{m}{n}} x_4} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (134'b)$$

enthalten;  $s_1^{\frac{m}{n}}$  hat wieder dieselbe Bedeutung wie in (134b).

Ausser der  $(m + n - 1)^2$ -fachen Gerade  $s$  und der Doppelkurve vom erniedrigten Grade, hat die Regelfläche keine neuen Eigenschaften aufzuweisen.

Der Schnitt mit einer durch  $X_1 X_2$  gelegten Ebene  $\omega_\mu$  hat jetzt in  $X_1$  und  $X_2$   $\{2mn - (m + n)\}$ -fache Punkte. Von den  $2mn - (m + n)$  Tangenten in  $X_1$  sind  $m(n - 1)$  zu je  $m$  in einer der  $n - 1$  Spuren der Ebenen (133b) in  $\omega_\mu$  vereinigt, von den anderen  $n(m - 1)$  sind je  $n$  in einer der  $m - 1$  Spuren der Ebenen (133'b) in  $\omega_\mu$  zusammengefallen. Analoges gilt für die Tangenten in  $X_2$ .

Im Schnittpunkte  $S_\mu$  von  $s$  mit  $\omega_\mu$  hat die Kurve einen  $(m + n - 1)^2$ -fachen Punkt, dessen Tangenten durch die ausserhalb  $(s, X_1)$  und  $(s, X_2)$  liegenden nach  $S_\mu$  zielenden Strahlen bestimmt werden.

Die Punkte  $X_\mu$ ,  $S_3$  und  $S'_4$  verhalten sich in derselben Weise wie im allgemeinen Falle.

Die *Doppelkurve* ist auch hier von niedrigerem Grade.

Waren früher  $f_1(\pi_1) = 0$  und  $f_2(\pi_2) = 0$  vom Grade  $m + n$ , so sind nun die durch Fortschaffung der Wurzeln  $\pi_1 = 0$  und  $\pi_2 = 0$  erhaltenen Gleichungen  $s_1(\pi_1) = 0$  und  $s_2(\pi_2) = 0$  vom Grade  $m + n - 1$ .

§ 13a. *Die axiale Regelfläche eines in einer singulären Ebene  $\varepsilon_\tau$  liegenden Congruenzstrahles, in der parabolischen Congruenz.*

Der Strahl  $s$  gehört nun drei singulären Ebenen an, n.l. den Ebenen  $\varepsilon_\tau$ ,  $(s, X_1)$  und  $(s, X_2)$ . Jede dieser Ebenen enthält ein Strahlengebilde  $m^{\text{ter}}$  Klasse. Die Restfläche ist somit vom Grade  $m(m + n) - 3m = m(m + n - 3)$ .

Es liegen ausserhalb der Ebenen  $(s, X_1)$  und  $(s, X_2)$   $(m - 1)^2$  Strahlen, welche nach einem Punkte von  $s$  zielen. Von diesen befinden sich  $m - 1$  in  $\varepsilon_\tau$ ; denn durch diesen Punkt gehen  $m$  in  $\varepsilon_\tau$  liegende Strahlen, von denen  $s$  einer ist. Es liegen demnach ausserhalb der Ebenen  $(s, X_1)$ ,  $(s, X_2)$  und  $\varepsilon_\tau$   $(m - 1)^2 - (m - 1) = (m - 1)(m - 2)$  Strahlen, wonach der Congruenzstrahl  $s$  auf seiner axialen Regelfläche eine  $(m - 1)(m - 2)$ -fache Gerade ist.

Im allgemeinen Falle trägt die Ebene  $\omega_\infty$   $n(m - n)$  mal die Gerade  $AX_1$ ,  $n(m - n)$  mal die Gerade  $AX_2$ ,  $(m - n)$  mal die  $m - n$  Geraden  $AE_{\tau_{m-n}}$  und eine Kurve vom Grade  $n(m + n)$ .

Dem in § 10a und § 12a Dargelegten entsprechend, lässt sich bemerken, dass die Ebene  $(s, X_1)$   $(m - n)$  mal  $SX_1$ , die Ebene  $(s, X_2)$   $(m - n)$  mal  $SX_2$  und die Ebene  $\varepsilon_\tau$   $(m - n)$  mal die Gerade  $SE_\tau$  dem Ausartungsgebilde entnimmt, während die Ebene  $(s, X_1)$   $n$  mal  $SX_1$ , die Ebene  $(s, X_2)$   $n$  mal  $SX_2$  und die Ebene  $\varepsilon_\tau$   $n$  mal  $SE_\tau$  von der Restkurve vom Grade  $n(m + n)$  abtrennt.

Die Restfläche des in  $\varepsilon_\tau$  befindlichen Congruenzstrahles  $s$  hat also mit  $\omega_\infty$  gemein:  $(n - 1)(m - n)$  mal  $SX_1$ ,  $(n - 1)(m - n)$

mal  $SX_2$ ,  $(m-n)$  mal die  $m-n-1$  Geraden  $SE_{\tau_{m-n}}$  ( $\tau_{m-n} \neq \tau$ ) und eine Kurve vom Grade  $n(m+n-3)$ .

Auch hier wollen wir nur die Ebene  $\varepsilon$  ( $x_1 = x_2$ ) betrachten.

Die Gleichung der zu untersuchenden Kurve wird ermittelt indem wir in (26a) (S. 200)

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a_2 = s, \\ b_1' &= b_2' = s^{\frac{m}{n}} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (138a)$$

einsetzen. Wir bekommen alsdann

$$\xi_2(\xi_1 + s \xi_3)^{\frac{m}{n}} - \xi_1(\xi_2 + s \xi_3)^{\frac{m}{n}} + s^{\frac{m}{n}}(\xi_1 - \xi_2) \xi_3^{\frac{m}{n}} = 0. \quad (139a)$$

Diese Gleichung erscheint nach Rationalisierung teilbar durch  $\xi_1^{\frac{n}{n}} \xi_2^{\frac{n}{n}} (\xi_1 - \xi_2)^n$ ; auch in dieser Weise wird für den Grad der Restkurve der Wert  $n(m+n-3)$  ermittelt.

Es sind auf dieser Kurve  $X_1$  und  $X_2$   $n(n-1)$ -fache Punkte, deren sämtliche Tangenten bez. mit  $SX_1$  und  $SX_2$  zusammenfallen.

Der Punkt  $S$  ist ein  $(n-1)(n-2)$ -facher, weil von den  $(n-1)^2$  in § 12a erhaltenen Zweigen noch  $n-1$  in  $SE$  gefallen sind.

Die Tangenten werden durch die  $(n-1)(n-2)$  ausserhalb  $\varepsilon$ , ( $s, X_1$ ) und ( $s, X_2$ ) liegenden nach  $S$  zielenden Congruenzstrahlen bestimmt.

Der Punkt  $E$  gehört der Kurve *nicht* an.

Die Kurve hat in  $X_3$  noch einen  $n(n-1)$ -fachen Punkt, dessen Tangenten alle mit  $X_3 S \equiv X_3 E$  zusammenfallen.

Die in  $\omega_0$  befindliche Kurve wird ermittelt, indem man in (40a) (S. 207) die Substitution (138a) ausführt; man erhält sodann

$$\xi_2(\xi_1 + s^{\frac{m}{n}} \xi_3)^{\frac{n}{n}} - \xi_1(\xi_2 + s^{\frac{m}{n}} \xi_3)^{\frac{n}{n}} + s(\xi_1 - \xi_2) \xi_3^{\frac{n}{n}} = 0. \quad (140a)$$

Diese Gleichung weist nach Rationalisierung den Faktor  $\xi_1^m \xi_2^m (\xi_1 - \xi_2)^m$  auf, wonach die Restkurve vom Grade  $m(m+n-3)$  ist.

Auf dieser Kurve ist  $X_1$  ein  $m(n-1)$ -facher Punkt, von dessen Tangenten je  $m$  in einer der  $n-1$  Geraden vereinigt sind, welche  $X_1$  mit den  $n(n-1)$  ausserhalb  $S'X_1$  liegenden Bildern von  $S$  verbinden. Ebenso ist  $X_2$  ein  $m(n-1)$ -facher Punkt; von seinen Tangenten sind je  $m$  mit einer der  $n-1$  Geraden zusammengefallen, welche  $X_2$  mit den  $n(n-1)$  ausserhalb  $S'X_2$  liegenden Bildern von  $S$  verbinden.

Der Punkt  $S'$  ist ein  $(m-1)(m-2)$ -facher; seine Tangenten sind die axialen Projektionen aus  $s$  auf  $\omega_0$  der  $(m-1)(m-2)$



Der Grad  $(m+n)^2 + 2mn$  der allgemeinen Regelfläche wird um  $3(m+n)$  erniedrigt, weil  $s$  jetzt in drei singulären Ebenen  $\varepsilon_\tau$ ,  $(s, X_1)$  und  $(s, X_2)$  liegt, von denen jede ein Strahlengebilde von der Klasse  $m+n$  trägt. Die Restfläche ist somit vom Grade  $(m+n)(m+n-3) + 2mn$ .

Da von den  $(m+n)^2$  nach einem Punkte von  $s$  zielenden Strahlen nur  $(m+n-1)(m+n-2)$  ausserhalb der drei singulären Ebenen liegen, so ist der in  $\varepsilon_\tau$  befindliche Congruenzstrahl auf seiner axialen Regelfläche eine  $(m+n-1)(m+n-2)$ -fache Gerade.

Der Gesamtschnitt der allgemeinen Regelfläche mit  $\omega_\infty$  setzt sich aus  $mn$  mal  $AX_1$ ,  $mn$  mal  $AX_2$ ,  $m^2$  mal  $AX_3$  und einer Kurve vom Grade  $n(2m+n)$  zusammen. Dem in § 10*b* und § 12*b* Gefundenen entsprechend, erschliessen wir, dass dem Ausartungsgebilde  $m$  mal  $SX_1$  durch  $(s, X_1)$ ,  $m$  mal  $SX_2$  durch  $(s, X_2)$ ,  $m$  mal  $SX_3$  durch  $\varepsilon_\tau$  entzogen wird. Die Restkurve ist demnach hier vom Grade  $n(2m+n-3)$ .

Wir wollen auch hier nur die Ebene  $\varepsilon$  ( $x_1 = x_2$ ) betrachten und setzen dementsprechend

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a_2 = s, \\ b'_1 &= b'_2 = s^{-\frac{m}{n}} \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (138b)$$

Die Gleichung (26*b*) (S. 225) erhält sodann diese Form:

$$\begin{aligned} & \xi_1 (\xi_1 + s \xi_3)^{\frac{m}{n}} \xi_3^{\frac{m}{n}} - \xi_2 (\xi_2 + s \xi_3)^{\frac{m}{n}} \xi_3^{\frac{m}{n}} - \\ & - s^{-\frac{m}{n}} (\xi_1 - \xi_2) (\xi_1 + s \xi_3)^{\frac{m}{n}} (\xi_2 + s \xi_3)^{\frac{m}{n}} = 0. \quad (139b) \end{aligned}$$

Nach vollständiger Fortschaffung der gebrochenen Exponenten erscheint die Gleichung teilbar durch  $\xi_1^n \xi_2^n (\xi_1 - \xi_2)^n$ , sodass wir wiederum zu dem Schluss gelangen, dass der Grad der Restkurve  $n(2m+n-3)$  ist.

Es sind nun auf dieser Kurve  $X_1$  und  $X_2$   $n(m-1)$ -fache Punkte; für ihre Tangenten dürfen wir auf § 12*b* (S. 293) verweisen.

Der Punkt  $S$  ist ein  $(n-1)(n-2)$ -facher; seine Tangenten sind gleichfalls leicht zu bestimmen.

In Bezug auf die Punkte  $S'_i \equiv E$  und  $X_3$  dürfen wir das in § 10*b* Gefundene heranziehen.

Die Kurve in  $\omega_0$  bedarf jetzt keiner näheren Untersuchung. Man achte aber auf das Verhalten von  $S_3 \equiv E$ .

Auf der Fläche sind  $X_1$  und  $X_2$   $\{2mn - (m+n)\}$ -fache Punkte;

ihre Tangenten sind in § 12b (S. 294) genügend erörtert. Übrigens haben wir nur das in § 10b Darlegte zu wiederholen.

Der Schnitt mit einer durch  $X_1 X_2$  gelegten Ebene  $\omega_\mu$  ist ebenso gänzlich bekannt, wenn wir nur die Ergebnisse von § 10b und § 12b verschmelzen.

Die Doppelkurve ist auch hier von niedrigerem Grade.

Statt der Gleichung  $f(\pi) = 0$ , welche vom Grade  $m + n$  war, operieren wir jetzt mit der Gleichung  $s(\pi) = 0$ , deren Grad  $m + n - 1$  ist.

§ 14a. *Die axiale Regelfläche einer in der Ebene  $\omega_\infty$  liegenden Geraden, in der parabolischen Congruenz.*

Es gehen durch jeden Punkt  $A$  von der in  $\omega_\infty$  liegenden Geraden  $l_\infty$   $n(m - n)$  Strahlen  $AX_1$ ,  $n(m - n)$  Strahlen  $AX_2$  und  $(m - n)^2$  Strahlen  $AE_{\tau_{m-n}}$ . Die Ebene  $\omega_\infty$  wird somit als ein Bestandteil vom Grade  $2n(m - n) + (m - n)^2 = m^2 - n^2$  der axialen Regelfläche entzogen. Die Restfläche ist also vom Grade  $m(m + n) - (m^2 - n^2) = mn + n^2 = n(m + n)$ .

Die Gerade  $l_\infty$  ist auf ihrer axialen Regelfläche  $n^2$ -fach, weil in jedem Punkte  $A$   $n^2$  ausserhalb  $\omega_\infty$  liegenden Strahlen sich auf ihr stützen.

Da die Gerade  $l_\infty$  einen besonderen Fall der Geraden  $l_\mu$  bildet, welche  $X_1 X_2$  schneidet, n.l. sofern  $\mu = \infty$  zu setzen ist, so können wir unmittelbar bemerken, dass der Schnitt in  $\omega_\infty$  durch

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) \cdot x_3^{\frac{m-n}{n}} = 0$$

(siehe (99a), S. 258) dargestellt wird, welche Gleichung nach Rationalisierung lautet:

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3)^{n^2} x_3^{n(m-n)} = 0.$$

Damals (siehe S. 258) war schon  $n^2$  mal die Gerade  $X_1 X_2$  abgesondert. Jetzt wird ausserdem abermals  $n(m - n)$  mal  $X_1 X_2$  bei Seite gestellt, sodass der Gesamtschnitt aus  $mn$  mal  $X_1 X_2$  und  $n^2$  mal der gegebenen, durch

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (142)$$

dargestellten Geraden  $l_\infty$  besteht.

Der Schnitt in  $\omega_0$  war (siehe S. 259) aus  $mn$  mal der Geraden  $X_1 X_2$  und aus einer Kurve vom Grade  $m^2$  zusammengesetzt, deren Gleichung für  $\mu = \infty$  lautet:

$$(\alpha_1 x_1^{\frac{n}{m}} + \alpha_2 x_2^{\frac{n}{m}} + \alpha_3 x_3^{\frac{n}{m}}) x_4^{\frac{m-n}{m}} = 0,$$

und welche demnach aus  $m(m-n)$  mal der Gerade  $X_1 X_2$  und aus einer durch

$$\alpha_1 x_1^{\frac{n}{m}} + \alpha_2 x_2^{\frac{n}{m}} + \alpha_3 x_3^{\frac{n}{m}} = 0 \quad . \quad . \quad (143a)$$

gegebenen Kurve vom Grade  $mn$  besteht.

Der Gesamtschnitt in  $\omega_0$  ist somit aus  $m^2$  mal  $X_1 X_2$  und der Kurve (143a) vom Grade  $mn$  zusammengesetzt.

Weil aber schon  $(m^2 - n^2)$  mal  $X_1 X_2$  in der  $(m^2 - n^2)$ -fachen Ebene  $\omega_\infty$  enthalten ist, so schneidet  $\omega_0$  die Restfläche in  $n^2$  mal  $X_1 X_2$  und in der durch (143a) angewiesenen Kurve vom Grade  $mn$ . Diese Kurve ist die in  $\omega_0$  liegende *Bildkurve* der in  $\omega_\infty$  befindlichen Gerade (142).

Die Kurve (143a) schneidet  $X_1 X_2$  in den durch

$$\alpha_1 x_1^{\frac{n}{m}} + \alpha_2 x_2^{\frac{n}{m}} = 0,$$

oder

$$\alpha_1^m x_1^n = (-1)^m \alpha_2^m x_2^n$$

gegebenen Punkten. Es sind diese offenbar die  $n$  Bilder  $L_3'$  in  $\omega_0$  des Schnittpunktes  $L_3$  ( $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$ ) von  $l_\infty$  mit  $X_1 X_2$ .

In jedem dieser  $n$  Punkte hat  $X_1 X_2$   $m$  Punkte mit der Kurve gemein.

Wir wollen nunmehr das Verhalten eines solchen Punktes  $L_3'$  festzustellen versuchen.

Es ist einer der Punkte  $L_3'$  durch

$$x_2 = \left( -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^{\frac{m}{n}} x_1, \quad x_4 = 0$$

bestimmt. Wir verlegen die Coordinatenecke  $X_1$  nach diesem Punkte  $L_3'$ , indem wir

$$x_2 = \left( -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^{\frac{m}{n}} x_1 + x_2'$$

setzen und diesen Ausdruck für  $x_2$  in der folgendermassen:

$$-\alpha_2 x_2^{\frac{n}{m}} = \alpha_1 x_1^{\frac{n}{m}} + \alpha_3 x_4^{\frac{n}{m}}$$



geschriebenen Gleichung (143a) substituieren. Wir erhalten sodann

$$-\alpha_2 \left\{ \left( -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^{\frac{m}{n}} x_1 + x_2' \right\}^{\frac{n}{m}} = \alpha_1 x_1^{\frac{n}{m}} + \alpha_3 x_4^{\frac{n}{m}},$$

oder

$$(-\alpha_2)^m \left\{ \left( -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^{\frac{m}{n}} x_1 + x_2' \right\}^n = (\alpha_1 x_1^{\frac{n}{m}} + \alpha_3 x_4^{\frac{n}{m}})^m,$$

also

$$\begin{aligned} (-\alpha_2)^m \left\{ \left( -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^{\frac{m}{n}} x_1^n + n \left( -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^{\frac{m(n-1)}{n}} x_1^{n-1} x_2' + \dots + x_2'^n \right\} = \\ = \alpha_1^m x_1^n + m \alpha_1^{m-1} \alpha_3 x_1^{\frac{n(m-1)}{m}} x_4^{\frac{n}{m}} + \dots + \alpha_3^m x_4^n, \end{aligned}$$

oder

$$n(-\alpha_2)^m \left( -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right)^{\frac{m(n-1)}{n}} x_1^{n-1} x_2' + \dots = m \alpha_1^{m-1} \alpha_3 x_1^{\frac{n(m-1)}{m}} x_4^{\frac{n}{m}} + \dots$$

Es ist in dieser Gleichung  $x_1^{\frac{n(m-1)}{m}}$  die höchste Potenz von  $x_1$  (weil ja  $\frac{n}{m} < 1$ ); ihr Coefficient ist  $x_4^{\frac{n}{m}}$ , also in der rationalen Gleichung  $x_4^n$ . Die Punkte  $L_3'$  sind daher  $n$ -fache Punkte, deren sämtliche Tangenten in  $X_1 X_2$  vereinigt sind. Es hat diese Gerade in jedem Punkte  $L_3'$   $m$  Punkte mit der Kurve gemein.

In derselben Weise lässt sich zeigen, dass die Kurve die Gerade  $X_2 X_4$  (bez.  $X_1 X_4$ ) in den  $n$  Bildern  $L_1'$  (bez.  $L_2'$ ) des Schnittpunktes  $L_1$  (bez.  $L_2$ ) von  $l_\infty$  mit  $X_2 X_3$  (bez.  $X_1 X_3$ ) schneidet.

Es ist jeder der Punkte  $L_1'$  (bez.  $L_2'$ ) ein  $n$ -facher; seine sämtlichen Tangenten sind in  $X_2 X_4$  (bez.  $X_1 X_4$ ) vereinigt, welche Gerade dort  $m$  Punkte mit der Kurve gemein hat.

Auf der Fläche ist  $X_1 X_2$  eine  $n^2$ -fache Gerade. In der nicht-singulären Ebene  $\omega_0$  ist ja  $X_1 X_2$  eine  $n^2$ -fache Gerade. Dies ist in Übereinstimmung mit dem Umstande, dass durch den Punkt  $L_3$  von  $l_\infty$   $n^2$  Strahlen hindurchgehen, welche alle mit  $X_1 X_2$ , und zwar in der Ebene  $\omega_\infty$  zusammengefallen sind. Sämtliche Berührungsebenen der  $n^2$ -fache Gerade sind daher mit  $\omega_\infty$  vereinigt; es hat diese Ebene mit der axialen Regelfläche  $mn$  mal  $X_1 X_2$  gemein.

Der Schnitt der Regelfläche mit einer durch  $X_1 X_2$  gelegten Ebene  $\omega_\mu$  trägt, ausser der  $n^2$ -fachen Gerade  $X_1 X_2$ , eine Kurve

vom Grade  $mn$ , welche in den  $n$  Punkten  $L_3'$   $n$ -fache Punkte besitzt, deren Tangenten alle in  $X_1 X_2$  vereinigt sind.

Die Punkte  $L_3'$  sind auch  $n$ -fache Punkte der Fläche.

Wenn die Gerade  $l_x$  den Punkt  $X_3$  enthält, so ist sie durch

$$x_2 = kx_1$$

darzustellen.

Die Coordinaten  $p_1$  und  $p_2$  der Spur in  $\omega_x$  jedes Strahles  $p$  müssen daher der Bedingung

$$p_2 = kp_1$$

genügen. Die Gleichungen (6a),

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 x_3 + p_1^{\frac{m}{n}} x_4, \\ x_2 &= p_2 x_3 + p_2^{\frac{m}{n}} x_4, \end{aligned}$$

liefern jetzt

$$\begin{aligned} kx_1 - x_2 &= (k - k^{\frac{m}{n}}) x_4 p_1^{\frac{m}{n}}, \\ k^{\frac{m}{n}} x_1 - x_2 &= (k^{\frac{m}{n}} - k) x_3 p_1, \end{aligned}$$

wonach

$$\begin{aligned} p_1^{\frac{m}{n}} &= \frac{kx_1 - x_2}{(k - k^{\frac{m}{n}}) x_4}, \\ p_1 &= \frac{k^{\frac{m}{n}} x_1 - x_2}{-(k - k^{\frac{m}{n}}) x_3}. \end{aligned}$$

Nach Elimination von  $p_1$  ergibt sich

$$(k - k^{\frac{m}{n}})^{m-n} (kx_1 - x_2)^n x_3^m = (-1)^m (k^{\frac{m}{n}} x_1 - x_2)^m x_4^n. \quad (144a)$$

Es stellt offenbar diese Gleichung die axiale Regelfläche dar. Diese Gleichung ist aber  $n$ -deutig und vertritt demnach  $n$  verschiedene Regelflächen, von denen jede vom Grade  $m + n$  ist.

Die ursprüngliche Fläche ist also in  $n$  Regelflächen vom Grade  $m + n$  ausgeartet.

Eine solche Regelfläche enthält  $X_1 X_2$  als eine  $n$ -fache Gerade,

während sämtliche Berührungsebenen in  $\omega_x$  zusammengefallen sind.

Auch die Gerade  $X_3 X_4$  ist eine  $n$ -fache; ihre Berührungsebenen sind alle in der Ebene  $kx_1 - x_2 = 0$ , d.h. in der durch  $X_4$  und  $l_\infty$  gelegten Ebene vereinigt.

Die Doppelkurve der axialen Regelfläche einer in  $\omega_x$  liegenden Gerade kann nicht in derselben Weise untersucht werden, wie früher geschah. Es ist hier ja von einer Spur der Gerade in  $\omega_x$  gar nicht die Rede.

Wir können hier folgendermassen verfahren.

Ein Punkt  $P$  von  $l_x$  ist durch

$$x_1 = p_1 x_3, \quad x_2 = p_2 x_3$$

bestimmt. Die  $n^2$  Bildpunkte  $P'$  von  $P$  sind durch

$$x_2 = p_1' \tau_n x_4, \quad x_2 = p_2' \tau_n' x_4$$

angewiesen, wo  $p_1'$  einen der Werte  $p_1^{\frac{m}{n}}$ ,  $p_2'$  einen der Werte  $p_2^{\frac{m}{n}}$  und  $\tau_n$  und  $\tau_n'$   $n$ -te Wurzeln der Einheit darstellen.

Die Verbindungslinie zweier Punkte  $P'$  wird durch

$$\frac{x_1 - p_1' \tau_n x_4}{p_1' (\tau_n - \tau_n'')} = \frac{x_2 - p_2' \tau_n' x_4}{p_2' (\tau_n' - \tau_n''')}$$

gegeben. Wenn diese Gerade den Punkt  $L_3$  trägt, so gehen durch  $P$  zwei Strahlen, deren Verbindungsebene die Gerade  $l_\infty$  enthält.

Die Bedingung, dass diese Gerade  $L_3$  trage, findet ihren Ausdruck in

$$x_1 : x_2 = \alpha_2 : -\alpha_1, \quad x_4 = 0,$$

wonach sich diese Beziehung ergibt:

$$\frac{\alpha_2}{p_1' (\tau_n - \tau_n'')} = \frac{-\alpha_1}{p_2' (\tau_n' - \tau_n''')},$$

oder

$$\alpha_1 p_1' (\tau_n - \tau_n'') = -\alpha_2 p_2' (\tau_n' - \tau_n'''),$$

also

$$\alpha_1^n p_1'^n (\tau_n - \tau_n'')^n = (-\alpha_2)^n p_2'^n (\tau_n' - \tau_n''')^n.$$

Der Relationen

$$\begin{aligned}\tau_n - \tau_n'' &= \tau_n (1 - \bar{\tau}_n), \\ \tau_n' - \tau_n''' &= \tau_n' (1 - \bar{\tau}_n'), \\ p_1'^n &= p_1^m, \\ p_2'^n &= p_2^m\end{aligned}$$

wegen, finden wir

$$\alpha_1^n p_1^m (1 - \bar{\tau}_n)^n = (-\alpha_2)^n p_2^m (1 - \bar{\tau}_n')^n. \quad (145a)$$

Der Punkt  $P$  muss sich auf  $l_\infty$  befinden, daher

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 = 0,$$

oder

$$p_2 = -\frac{\alpha_1 p_1 + \alpha_3}{\alpha_2}.$$

Die Substitution dieses Ausdruckes in (145a) liefert

$$\alpha_1^n p_1^m (1 - \bar{\tau}_n)^n = (-\alpha_2)^n \left( \frac{\alpha_1 p_1 + \alpha_3}{-\alpha_2} \right)^m (1 - \bar{\tau}_n')^n,$$

oder

$$\alpha_1^n (-\alpha_2)^{m-n} (1 - \bar{\tau}_n)^n p_1^m = (\alpha_1 p_1 + \alpha_3)^m (1 - \bar{\tau}_n')^n. \quad (146a)$$

Weil  $(1 - \bar{\tau}_n)^n$  und  $(1 - \bar{\tau}_n')^n$  beide  $n$ -deutig sind, so stellt (146a) tatsächlich  $n^2$  verschiedene Gleichungen dar, jede vom Grade  $m$  in  $p_1$ .

Es liegen demnach auf  $l_\infty$  eine gewisse Zahl der Punkte  $P$ , welche zwei mit  $l_\infty$  in einer Ebene liegende Strahlen tragen. Diese Punkte  $P$  sind daher Schnitte von  $l_\infty$  mit der Doppelkurve.

Von den  $n^2$  verschiedenen durch (146a) vertretenen Gleichungen, ist eine identisch, n.l. diejenige, für welche  $\bar{\tau}_n = 1$  und  $\bar{\tau}_n' = 1$ . Es geschieht ferner noch  $(n-1)$  mal, das  $\bar{\tau} = \bar{\tau}_n'$ , so dass  $n-1$  Gleichungen (146a) von dieser Form sind:

$$\alpha_1^n (-\alpha_2)^{m-n} p_1^m = (\alpha_1 p_1 + \alpha_3)^m.$$

Diese Gleichung bestimmt  $m$  Punkte  $P$ , von denen jeder offenbar ein  $(n-1)$ -facher ist.

Die  $n-1$  Gleichungen, für welche  $\bar{\tau}_n = 1$ ,  $\bar{\tau}_n' \neq 1$ , ergeben

$$(\alpha_1 p_1 + \alpha_3)^m = 0,$$

oder

$$p_2^m = 0,$$

d.h. den Schnittpunkt  $L_2$  von  $l_\infty$  mit  $X_1 X_3$ , während die  $n-1$  Gleichungen, in welchen  $\bar{\tau}_n \neq 1$ ,  $\bar{\tau}_n' = 1$  ist,

$$p_1^m = 0$$

liefern, also den Schnittpunkt  $L_1$  von  $l_\infty$  mit  $X_2 X_3$ .

Ausser diesen Gleichungen giebt es noch  $n^2 - 3(n-1) - 1 = n^2 - 3n + 2 = (n-1)(n-2)$ , deren jede  $m$  verschiedene Punkte  $P$  liefert.

In dieser Weise lässt sich also die Anzahl der Schnittpunkte von  $l_\infty$  mit der Doppelkurve feststellen, daher auch der Grad der Doppelkurve, weil die Anzahl der ausserhalb  $l_\infty$  in einer durch  $l_\infty$  gelegten Ebene liegenden Doppelpunkte  $\frac{mn(mn-1)}{2}$  ist.

$$\text{Für diesen Grad finden wir } 2m(n-1) + m(n-1)(n-2) + \frac{mn(mn-1)}{2} = mn(n-1) + \frac{mn(mn-1)}{2} = \frac{mn(mn+2n-3)}{2}.$$

§ 14b. Die axiale Regelfläche einer in der Ebene  $\omega_\infty$  liegenden Gerade, in der hyperbolischen Congruenz.

Jeder auf  $l_\infty$  in  $\omega_\infty$  liegende Punkt  $A$  trägt  $mn$  Strahlen  $AX_1$ ,  $mn$  Strahlen  $AX_2$  und  $m^2$  Strahlen  $AX_3$ . Die Ebene  $\omega_\infty$  ist demnach ein Bestandteil vom Grade  $m(m+2n)$  der axialen Regelfläche. Die Restfläche ist somit vom Grade  $(m+n)^2 + 2mn - m(m+2n) = n(2m+n)$ .

Auf dieser Restfläche ist  $l_\infty$  eine  $n^2$ -fache Gerade.

Es möge  $l_\infty$  die Gerade  $X_2 X_3$  in  $L_1$ ,  $X_1 X_3$  in  $L_2$  und  $X_1 X_2$  in  $L_3$  schneiden.

Wir denken uns einen Punkt  $P$ , welcher sich längs  $l_\infty$  bewegt.

Die  $n^2$  Bilder von  $P$  werden, wenn  $P$  in  $L_1$  kommt, alle in  $X_1$ , wenn  $P$  in  $L_2$  kommt, alle in  $X_2$  vereinigt sein. Die Geraden  $L_1 X_1$  und  $L_2 X_2$  befinden sich deshalb auf der Restfläche.

Da jeder Strahl in  $\omega_\infty$  durch  $X_1$  oder durch  $X_2$  ein  $mn$ -facher ist, so sind die Geraden  $L_1 X_1$  und  $L_2 X_2$  als  $mn$ -fache Elementen des Schnittes in  $\omega_\infty$  zu betrachten.

Der Schnitt in  $\omega_\infty$  besteht daher aus  $n^2$  mal der durch

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (142)$$

angewiesenen Gerade  $l_\infty$ , und aus  $mn$  mal den Geraden  $L_1 X_1$  ( $\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$ ) und  $L_2 X_2$  ( $\alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3 = 0$ ).

Wenn der längs  $l_\infty$  bewegliche Punkt  $P$  in  $L_3$  kommt, so werden alle Bilder von  $P$  in  $X_4$  fallen. Die Gerade  $X_4 L_3$  ist demnach eine  $n^2$ -fache Gerade der Fläche.

Der Schnitt mit  $\omega_0$  enthält jetzt, ausser der  $n^2$ -fachen Gerade  $X_4 L_3$ , eine Kurve vom Grade  $2mn$ , welche die *Bildkurve* der in  $\omega_x$  liegenden Gerade  $l_x$  ist und durch

$$\alpha_1 x_1^{-\frac{n}{m}} + \alpha_2 x_2^{-\frac{n}{m}} + \alpha_3 x_4^{-\frac{n}{m}} = 0,$$

oder durch

$$\alpha_1 x_2^{\frac{n}{m}} x_4^{\frac{n}{m}} + \alpha_2 x_1^{\frac{n}{m}} x_4^{\frac{n}{m}} + \alpha_3 x_1^{\frac{n}{m}} x_2^{\frac{n}{m}} = 0 \quad . \quad (143b)$$

dargestellt wird.

Diese Gleichung würde sich auch ergeben haben, wenn in § 8b  $\mu = \infty$  eingesetzt wäre.

Es ist  $X_1$  ein  $mn$ -facher Punkt; seine Tangenten werden durch

$$\alpha_3 x_2^{\frac{n}{m}} + \alpha_2 x_4^{\frac{n}{m}} = 0,$$

oder durch

$$\frac{x_2}{x_4} = \left( -\frac{\alpha_3}{\alpha_2} \right)^{-\frac{m}{n}}$$

angewiesen; sie sind offenbar zu je  $m$  mit einem der  $n$  Bilder von  $X_1 L_1$   $\left( \frac{x_2}{x_3} = -\frac{\alpha_3}{\alpha_2} \right)$  zusammengefallen.

Der Punkt  $X_2$  ist ebenfalls ein  $mn$ -facher; von seinen Tangenten sind je  $m$  in den  $n$  Bildern von  $X_2 L_2$  vereinigt.

Auch der Punkt  $X_4$  ist ein  $mn$ -facher; von seinen Tangenten sind je  $m$  mit den  $n$  Bildern von  $X_3 L_3$  vereinigt.

Auf der Fläche sind  $X_1$  und  $X_2$   $mn$ -fache Punkte; die Tangenten befinden sich bei jedem Punkte in  $mn$  Ebenen, von denen je  $m$  in einer der  $n$  Ebenen zusammengefallen sind, welche  $X_1 L_1$  (bez.  $X_2 L_2$ ) mit ihren  $n$  Bildern  $X_1 L_1'$  (bez.  $X_2 L_2'$ ) verbinden.

Es ist  $L_3$  natürlich ein  $n^2$ -facher Punkt. Die Strahlen, welche in der Nähe von  $L_3$  ausmünden, entstammen nahe bei  $X_4$  liegenden Punkten. Die Congruenzstrahlen münden in  $\omega_x$  auf der Gerade  $l_x$  aus; sie befinden sich also fast in der Ebene  $(l_x, X_4)$ . Die Berührungsebenen des  $n^2$ -fachen Punktes  $L_3$  sind somit alle in  $(l_x, X_4)$  vereinigt.

Der Schnitt mit einer durch  $X_1 X_2$  gelegten Ebene  $\omega_\mu$  ist eine Kurve vom Grade  $n(2m+n)$ , auf welcher  $X_1$  und  $X_2$   $mn$ -fache Punkte sind und  $L_3$  ein  $n^2$ -facher Punkt ist.

Die Tangenten in  $X_1$  und  $X_2$  sind die Schnittlinien von  $\omega_\mu$  mit den oben genannten Ebenen durch  $X_1$  bez.  $X_2$ . Die Tangenten von  $L_3$  sind in der Schnittlinie von  $\omega_\mu$  mit der Ebene  $(l_\infty, X_4)$  vereinigt.

Wenn die Gerade  $l_\infty$  den Punkt  $X_3$  enthält, so zerfällt die Fläche noch weiter.

Indem wir  $l_\infty$  durch

$$x_2 = kx$$

darstellen, so muss für jeden Strahl  $p$  der Fläche der Bedingung

$$p_2 = kp_1$$

genügt werden. Die Gleichungen (6b),

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 x_3 + p_1^{-\frac{m}{n}} x_4, \\ x_2 &= p_2 x_3 + p_2^{-\frac{m}{n}} x_4, \end{aligned}$$

liefern jetzt

$$\begin{aligned} kx_1 - x_2 &= (k - k^{-\frac{m}{n}})x_3 p_1^{-\frac{m}{n}}, \\ k^{-\frac{m}{n}} x_1 - x_2 &= (k^{-\frac{m}{n}} - k)x_3 p_1, \end{aligned}$$

wonach

$$p_1^{-\frac{m}{n}} = \frac{kx_1 - x_2}{(k - k^{-\frac{m}{n}})x_3}$$

und

$$p_1 = \frac{k^{-\frac{m}{n}} x_1 - x_2}{-(k - k^{-\frac{m}{n}})x_3}.$$

Durch Elimination von  $p_1$  erhält man

$$(kx_1 - x_2)^n (k^{-\frac{m}{n}} x_1 - x_2)^m = (-1)^m (k - k^{-\frac{m}{n}})^{m+n} x_3^m x_4^n. \quad (144b)$$

Diese Gleichung ist wiederum  $n$ -deutig und vertritt daher  $n$  Regelflächen, jede vom Grade  $m+n$ .

Die Punkte  $X_1$  und  $X_2$  gehören nun der Fläche *nicht* an.

Die Ebene  $\omega_\infty$  ist der oben behandelten (allgemeineren) Fläche

$mn$  mal entnommen. Die Restfläche vom Grade  $n(m + n)$  erscheint als eine  $n$ -fache.

In Bezug auf die Erörterung der Doppelkurve auf der axialen Regelfläche einer in  $\omega_\infty$  liegenden Gerade  $l_\infty$ , genügt es auf die vollkommene Analogie mit der entsprechenden Untersuchung in der parabolischen Congruenz zu weisen, welche den Schluss von § 14a bildet.

§ 15a. *Die axiale Regelfläche einer Gerade  $X_3 E_{\tau_{m-n}}$  in der parabolischen Congruenz.*

Die Gerade  $X_3 E_{\tau_{m-n}}$  befindet sich in zwei singulären Ebenen, n.l. in den Ebenen  $\omega_\infty$  und  $\varepsilon_\tau$ . Der Grad der Regelfläche wird daher um  $m^2 - n^2 + m$  erniedrigt.

Wir haben in der Gleichung (144a) (S. 302)  $k = \tau_{m-n}$  einzusetzen. Wir wählen  $k = 1$ . Die erwähnte Gleichung lautet alsdann

$$(1 - \tau_n)^{m-n} (x_1 - x_2)^n x_3^m = (-1)^m (\tau_n x_1 - x_2)^m x_4^n. \quad (147a)$$

Eine dieser Gleichungen (n.l.  $\tau_n = 1$ ) hat die Form

$$(x_1 - x_2)^m x_4^n = 0.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass der ganzen Fläche  $m$  mal die Ebene  $\varepsilon$  angehört. Ausserdem wird die Ebene  $\omega_\infty$  noch  $n$  mal abgesondert. Wir erübrigen also  $n - 1$  Regelflächen vom Grade  $m + n$ .

Es enthält jede  $X_1 X_2$  als eine  $n$ -fache Gerade mit  $\omega_\infty$  als einziger Berührungsebene. Die Gerade  $X_3 X_4$  ist auch eine  $n$ -fache; sie hat auch nur  $\omega_\infty$  als Berührungsebene.

Die Doppelkurve wird in derselben Weise bestimmt, wie am Ende von § 14a angegeben ist. Wir haben nur zu beachten, dass  $\alpha_2 = -\alpha_1$  und  $\alpha_3 = 0$  ist, wonach (146a) übergeht in

$$p_1^m = 0.$$

Der Punkt  $X_3$  ist also der einzige, welcher einer näheren Betrachtung bedarf.

Die  $n^2$  nach  $X_3$  zielenden Strahlen fallen alle mit  $X_3 X_4$  zusammen.

§ 15b. *Die axiale Regelfläche einer Gerade  $X_3 E_{\tau_{m+n}}$  in der hyperbolischen Congruenz.*

Die axiale Regelfläche der Gerade  $X_3 E_{\tau_{m+n}}$ , z. B. der Gerade  $X_3 E$ , welche in  $\omega_\infty$  liegt und durch  $X_3$  geht, zerfällt in  $n$  Flächen vom Grade  $m + n$ , von denen jede durch die Gleichung (144b)



dargestellt wird, wenn nur  $k=1$  substituiert wird. Die Gleichung lautet deshalb:

$$(x_1 - x_2)^n (\tau_n x_1 - x_2)^m = (-1)^m (1 - \tau_n)^{m+n} x_3^m x_4^n. \quad (147b)$$

Für  $\tau_n = 1$  bekommt man

$$(x_1 - x_2)^{m+n} = 0.$$

Diese Fläche besteht aus der  $(m+n)$ -fach zu zählenden Ebene  $\varepsilon$ . Es war auch schon von vornherein klar, dass die singuläre Ebene  $(m+n)$  mal abzusondern ist.

Was aus der Doppelkurve wird, ist leicht ersichtlich, wenn wir beachten, dass nur  $X_3$  Strahlen trägt, welche mit  $X_3 E$  in einer Ebene liegen.

§ 16a. *Die Regelfläche der Strahlen, welche auf einem durch  $X_1$  und  $X_2$  gelegten Kegelschnitte ruhen, in der parabolischen Congruenz.*

Wir haben früher (§ 8a, S. 261) gefunden, dass ein in  $\omega_\infty$  liegender Strahl durch  $X_1$ , wenn er als Strahl durch  $X_1$  betrachtet wird,  $mn$ -fach zu zählen ist. Ebenso ist ein Strahl, welcher in  $\omega_\infty$  liegt und durch  $X_2$  geht, als Strahl durch  $X_2$   $mn$ -fach zu rechnen.

Die Regelfläche der Strahlen, welche auf einem durch  $X_1$  und  $X_2$  gelegten Kegelschnitte ruhen, wird somit alle Strahlen durch  $X_1$  in  $\omega_\infty$  und alle Strahlen durch  $X_2$  in  $\omega_\infty$  enthalten, wonach der Grad der Regelfläche eines willkürlichen Kegelschnittes um  $2mn$  erniedrigt werden muss.

Da die Regelfläche eines willkürlichen Kegelschnittes vom Grade  $2m(m+n)$  ist (der Kegelschnitt ist ja in seiner Ebene eine  $m^2$ -fache Kurve und jeder der  $mn$  in dieser Ebene befindlichen Strahlen ist als Bisekante des Kegelschnittes doppelt zu zählen), so wird der Grad der Regelfläche eines durch  $X_1$  und  $X_2$  gelegten Kegelschnittes  $2m(m+n) - 2mn = 2m^2$  sein.

Dieser Kegelschnitt, welcher mit  $\gamma_\mu$  bezeichnet werden soll, ist auf seiner Regelfläche eine  $m^2$ -fache Kurve. Die Ebene  $\omega_\mu$  von  $\gamma_\mu$  hat demnach ausser  $\gamma_\mu$  nichts mit der Fläche gemein.

In § 8a (S. 261) haben wir gesehen, dass von den nach einem nahe bei  $X_1$  liegenden Punkte zielenden Strahlen je  $m$  mit einer von  $m$  durch  $X_1$  in  $\omega_\infty$  gehenden Geraden zusammenfallen. Ebenso sind von den nach einem nahe bei  $X_2$  liegenden Punkte zielenden Strahlen je  $m$  in einer von  $m$  Geraden durch  $X_2$  in  $\omega_\infty$  vereinigt.

Die Strahlen, welche den  $X_1$  und  $X_2$  auf  $\gamma_\mu$  vorangehenden Punkten entstammen, bilden also ein Ausartungsgebilde vom Grade  $2m^2$

in  $\omega_x$ . Da jedoch die Ebene  $\omega_x$  schon  $2mn$  mal abgesondert ist, so enthält die Restfläche in  $\omega_x$  noch  $m(m-n)$ -fache Strahlen durch  $X_1$  und  $m(m-n)$ -fache Strahlen durch  $X_2$ , welche daher zusammen eine Figur vom Grade  $2m(m-n)$  bilden. Diese Figur wird zum vollständigen Schnitte vom Grade  $2m^2$  ergänzt durch eine Kurve vom Grade  $2mn$ .

Wir sind also zu der Einsicht gelangt, dass die Regelfläche eines durch  $X_1$  und  $X_2$  gelegten Kegelschnittes  $\mathcal{V}_\mu$  die Ebene  $\omega_x$  schneidet in einer Kurve vom Grade  $2mn$  und in  $m(m-n)$ -fachen Geraden durch  $X_1$  und  $m(m-n)$ -fachen Geraden durch  $X_2$ .

Wir wollen den Kegelschnitt  $\mathcal{V}_\mu$  durch

$$\alpha_3 \beta_3 x_1 x_2 + x_1 (\alpha_2 \beta_3 x_3 + \alpha_3 \beta_2 x_4) + x_2 (\alpha_1 \beta_3 x_3 + \alpha_3 \beta_1 x_4) + (\alpha_0 \beta_3 x_3^2 + \alpha_3 \beta_0 x_4^2) = 0, \quad (148)$$

$$x_3 = \mu x_4. \quad (149)$$

darstellen.

Die Tangente in  $X_1$  wird angewiesen durch

$$\left. \begin{aligned} \alpha_3 \beta_3 x_2 + \alpha_2 \beta_3 x_3 + \alpha_3 \beta_2 x_4 &= 0, \\ x_3 &= \mu x_4. \end{aligned} \right\}$$

Die einem nahe bei  $X_1$  liegenden Punkte entstammenden Strahlen, welche in  $\omega_x$  liegen, werden (siehe § 8a, S. 261, 262) durch

$$\alpha_3^n \beta_3^n x_2^m - (-1)^n \{ \mu \alpha_3 \beta_3 x_2 + (\mu \alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2) x_3 \}^n x_3^{m-n} = 0 \quad (150a)$$

gegeben; man erhält diese Gleichung, indem man in (103a) (S. 262)  $x_4 = 0$  einsetzt. Es bestimmt diese Gleichung die  $m(m-n)$ -fachen Geraden durch  $X_1$ , welche mit den  $m(m-n)$ -fachen Geraden durch  $X_2$  und der Kurve vom Grade  $2mn$  den Gesamtschnitt bilden.

Die  $m(m-n)$ -fachen Geraden durch  $X_2$  sind durch

$$\alpha_3^n \beta_3^n x_1^m - (-1)^n \{ \mu \alpha_3 \beta_3 x_1 + (\mu \alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1) x_3 \}^n x_3^{m-n} = 0 \quad (151a)$$

angewiesen.

Die Kurve vom Grade  $2mn$  ist der Ort der Spuren  $P(p_1, p_2)$  der Congruenzstrahlen  $p$ , welche  $\mathcal{V}_\mu$  schneiden.

Die Gleichung dieses Ortes wird ermittelt, indem man aus den Gleichungen (148), (149) und (6a) die Coordinaten  $x_1, x_2, x_3$  und  $x_4$  eliminirt. Man bekommt alsdann:

$$\begin{aligned} \alpha_3 \beta_3 (\mu p_1 + p_1^{\frac{m}{n}}) (\mu p_2 + p_2^{\frac{m}{n}}) + (\mu p_1 + p_1^{\frac{m}{n}}) (\mu \alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2) + \\ + (\mu p_2 + p_2^{\frac{m}{n}}) (\mu \alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1) + (\mu^2 \alpha_0 \beta_3 + \alpha_3 \beta_0) = 0, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} & \alpha_3 \beta_3 p_1^{\frac{m}{n}} p_2^{\frac{m}{n}} + \mu \alpha_3 \beta_3 (p_1^{\frac{m}{n}} p_2 + p_1 p_2^{\frac{m}{n}}) + \mu^2 \alpha_3 \beta_3 p_1 p_2 + \\ & + (\mu \alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2) p_1^{\frac{m}{n}} + (\mu \alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1) p_2^{\frac{m}{n}} + \\ & + \mu(\mu \alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2) p_1 + \mu(\mu \alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1) p_2 + (\mu^2 \alpha_0 \beta_3 + \alpha_3 \beta_0) = 0, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} & \gamma_0 p_1^{\frac{m}{n}} p_2^{\frac{m}{n}} + \gamma_0' (p_1^{\frac{m}{n}} p_2 + p_1 p_2^{\frac{m}{n}}) + \gamma_0'' p_1 p_2 + \gamma_1 p_1^{\frac{m}{n}} + \\ & + \gamma_2 p_2^{\frac{m}{n}} + \gamma_1' p_1 + \gamma_2' p_2 + \gamma_3 = 0, \quad . \quad . \quad (152a) \end{aligned}$$

wo also

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 &= \alpha_3 \beta_3, \gamma_0' = \mu \alpha_3 \beta_3, \gamma_0'' = \mu^2 \alpha_3 \beta_3, \\ \gamma_1 &= \mu \alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2, \gamma_2 = \mu \alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1, \\ \gamma_1' &= \mu(\mu \alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2), \gamma_2' = \mu(\mu \alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1), \\ \gamma_3 &= \mu^2 \alpha_0 \beta_3 + \alpha_3 \beta_0 \end{aligned} \right\} \quad (153)$$

ist.

Ersetzt man in (152a)  $p_1$  durch  $x_1 : x_3$  und  $p_2$  durch  $x_2 : x_3$ , so folgt

$$\begin{aligned} & \gamma_0 x_1^{\frac{m}{n}} x_2^{\frac{m}{n}} + \gamma_0' (x_1^{\frac{m}{n}} x_2 + x_1 x_2^{\frac{m}{n}}) x_3^{\frac{m-n}{n}} + \gamma_0'' x_1 x_2 x_3^{\frac{2(m-n)}{n}} + \gamma_1 x_1^{\frac{m}{n}} x_3^{\frac{m}{n}} + \\ & + \gamma_2 x_2^{\frac{m}{n}} x_3^{\frac{m}{n}} + \gamma_1' x_1 x_3^{\frac{2m-n}{n}} + \gamma_2' x_2 x_3^{\frac{2m-n}{n}} + \gamma_3 x_3^{\frac{2m}{n}} = 0. \quad (154a) \end{aligned}$$

Es stellt nun diese Gleichung die Kurve vom Grade  $2mn$  dar, welche mit den Geraden durch  $X_1$  und  $X_2$  den vollständigen Schnitt in  $\omega_\infty$  bildet.

Die Punkte  $X_1$  und  $X_2$  sind  $mn$ -fache Punkte.

Die Tangenten in  $X_1$  sind bestimmt durch

$$\gamma_0 x_2^{\frac{m}{n}} + \gamma_0' x_2 x_3^{\frac{m-n}{n}} + \gamma_1 x_3^{\frac{m}{n}} = 0, \quad . \quad . \quad (155a)$$

oder

$$\gamma_0 x_2^{\frac{m}{n}} = -(\gamma_0' x_2 + \gamma_1 x_3) x_3^{\frac{m-n}{n}},$$

also durch

$$\gamma_0^n x_2^m - (-1)^n (\gamma_0' x_2 + \gamma_1 x_3)^n x_3^{m-n} = 0.$$

Beachten wir die in (153) gegebene Bedeutung von  $\gamma_0, \gamma_0'$  und  $\gamma_1$ , so erscheinen diese Tangenten identisch mit den Geraden durch  $X_1$ , welche dem Gesamtschnitte angehören (siehe (150a)).

In derselben Weise ersehen wir, dass die genannten Geraden durch  $X_2$  (151a) auch die Tangenten in  $X_2$  an der Kurve sind. Als Tangenten in  $X_1$  und  $X_2$  sind aber die Geraden (150a) und (151a)  $n$ -fach zu rechnen.

Mit anderen Worten: die Tangenten in  $X_1$  (bez.  $X_2$ ) an der in  $\omega_\infty$  liegenden Kurve sind die Congruenzstrahlen, welche sich in dem  $X_1$  (bez.  $X_2$ ) vorangehenden Punkte auf  $\gamma_\mu$  stützen.

Wenn wir bedenken, dass

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0'' &= \mu \gamma_0' = \mu^2 \gamma_0, \\ \gamma_1' &= \mu \gamma_1, \\ \gamma_2' &= \mu \gamma_2, \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (156a)$$

so lässt sich die Gleichung (154a) folgendermassen schreiben:

$$\begin{aligned} &(\gamma_0 x_2^{\frac{m}{n}} + \gamma_0' x_2 x_3^{\frac{m-n}{n}} + \gamma_1 x_3^{\frac{m}{n}}) \left( x_1^{\frac{m}{n}} + \mu x_1 x_3^{\frac{m-n}{n}} + \frac{\gamma_2}{\gamma_0} x_3^{\frac{m}{n}} \right) + \\ &+ \left( \gamma_3 - \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_0} \right) x_3^{\frac{2m}{n}} = 0. \end{aligned}$$

Aus dieser Form erhellt, dass die Substitution (155a) den Faktor  $x_3^{\frac{2m}{n}}$ , also in der rationalen Gleichung den Faktor  $x_3^{2mn}$  absondert; die Tangenten von  $X_1$  haben daher dort  $2mn$  zusammenfallende Punkte mit der Kurve gemein, enthalten demnach ausser  $X_1$  keinen Punkt der Kurve. Ebenso lässt sich zeigen, dass von den Tangenten in  $X_2$  alle Schnittpunkte mit der Kurve in  $X_2$  vereinigt sind.

Der Schnitt der Regelfläche mit  $\omega_0$  wird ermittelt, indem wir aus den Gleichungen (148) und (149) von  $\gamma_\mu$  und aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1'^{\frac{n}{m}} x_3 + p_1' x_4, \\ x_2 &= p_2'^{\frac{n}{m}} x_3 + p_2' x_4 \end{aligned}$$

die Coordinaten  $x_1, x_2, x_3$  und  $x_4$  eliminiren. Wir finden alsdann

$$\begin{aligned} &\alpha_3 \beta_3 (p_1' + \mu p_1'^{\frac{n}{m}}) (p_2' + \mu p_2'^{\frac{n}{m}}) + (p_1' + \mu p_1'^{\frac{n}{m}}) (\mu \alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2) + \\ &+ (p_2' + \mu p_2'^{\frac{n}{m}}) (\mu \alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1) + (\mu^2 \alpha_3 \beta_0 + \alpha_0 \beta_3) = 0, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} & \alpha_3 \beta_3 p_1' p_2' + \mu \alpha_3 \beta_3 (p_1' p_2'^{\frac{n}{m}} + p_1'^{\frac{n}{m}} p_2') + \mu^2 \alpha_3 \beta_3 p_1'^{\frac{n}{m}} p_2'^{\frac{n}{m}} + \\ & + (\mu \alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2) p_1' + (\mu \alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1) p_2' + \mu (\mu \alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2) p_1'^m + \\ & + \mu (\mu \alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1) p_2'^m + (\mu^2 \alpha_0 \beta_3 + \alpha_3 \beta_0) = 0, \end{aligned}$$

also, vermöge (153),

$$\begin{aligned} & \gamma_0 p_1' p_2' + \gamma_0' (p_1' p_2'^{\frac{n}{m}} + p_1'^{\frac{n}{m}} p_2') + \gamma_0'' p_1'^{\frac{n}{m}} p_2'^{\frac{n}{m}} + \gamma_1 p_1' + \gamma_2 p_2' + \\ & + \gamma_1' p_1'^{\frac{n}{m}} + \gamma_2' p_2'^{\frac{n}{m}} + \gamma_3 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (157a) \end{aligned}$$

Wenn wir nun  $p_1'$  durch  $x_1 : x_4$  und  $p_2'$  durch  $x_2 : x_4$  ersetzen, so bekommen wir

$$\begin{aligned} & \gamma_0 x_1 x_2 + \gamma_0' (x_1 x_2^{\frac{n}{m}} + x_1^{\frac{n}{m}} x_2) x_4^{\frac{m-n}{m}} + \gamma_0'' x_1^{\frac{n}{m}} x_2^{\frac{n}{m}} x_3^{\frac{2(m-n)}{m}} + \gamma_1 x_1 x_4 + \\ & + \gamma_2 x_2 x_4 + \gamma_1' x_1^{\frac{n}{m}} x_4^{\frac{2m-n}{m}} + \gamma_2' x_2^{\frac{n}{m}} x_4^{\frac{2m-n}{m}} + \gamma_3 x_4^2 = 0. \quad (158a) \end{aligned}$$

Nach Rationalisirung bekommt diese Gleichung den Grad  $2m^2$ . Sie stellt den Gesamtschnitt der Regelfläche mit  $\omega_0$  dar. Es ist diese Kurve zugleich die Bildkurve der in  $\omega_\infty$  liegenden Kurve; man ersieht dies am leichtesten wenn man darauf achtet, dass die Gleichung (157a) aus der Gleichung (152a) ermittelt werden kann, wenn überall  $p_1$  durch  $p_1'^{\frac{n}{m}}$  und  $p_2$  durch  $p_2'^{\frac{n}{m}}$  ersetzt wird.

Die Kurve von Grade  $2m^2$  in  $\omega_0$  hat in  $X_1$  und  $X_2$   $m^2$ -fache Punkte.

Die Tangenten in  $X_1$  sind durch

$$\gamma_0 x_2 + \gamma_0' x_2^{\frac{n}{m}} x_4^{\frac{m-n}{m}} + \gamma_1 x_4 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (159a)$$

oder durch

$$(\gamma_0 x_2 + \gamma_1 x_4)^m - (-1)^m \gamma_0'^m x_2^n x_4^{m-n} = 0 \quad . \quad (160a)$$

bestimmt. Von den  $m^2$  Tangenten in  $X_1$  sind also je  $m$  in eine der  $m$  Geraden (160a) zusammengefallen.

Mit Benutzung von (153) verwandelt sich (160a) in

$$(\alpha_3 \beta_3 x_2 + (\mu \alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1) x_4)^m - (-1)^m \mu^m \alpha_3^m \beta_3^m x_2^n x_4^{m-n} = 0. \quad (161a)$$

Die Regelfläche der Strahlen, welche auf der in  $X_1$  an  $\gamma_\mu$  gelegten Tangente ruhen, besteht (siehe § 8a, S. 261, 262) aus den  $m$  Ebenen

$$\{\alpha_3 \beta_3 x_2 + (\mu \alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1) x_4\}^m - \\ - (-1)^n \alpha_3^{m-n} \beta_3^{m-n} \{\mu \alpha_3 \beta_3 x_2 + (\mu \alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1) x_3\}^n (x_3 - \mu x_4)^{m-n} = 0.$$

Der Schnitt dieser  $m$  Ebenen mit  $\omega_0$  ( $x_3 = 0$ ) erscheint gerade zusammengesetzt aus den  $m$   $m$ -fachen in  $X_1$  an der Kurve in  $\omega_0$  gelegten Tangenten.

Dieses Ergebniss ist im Einklang mit der Vorstellung, nach der die in  $\omega_0$  nahe bei  $X_1$  liegenden Punkte denjenigen Strahlen angehören, welche sich in den  $X_1$  vorangehenden Punkte auf dem Kegelschnitte  $\gamma_\mu$  stützen.

Mit Hülfe von (156a) lässt sich die Gleichung (158a) folgendermassen schreiben:

$$(\gamma_0 x_2 + \gamma_0' x_2^{\frac{n}{m}} x_4^{\frac{m-n}{m}} + \gamma_1 x_4) \left( x_1 + \mu x_1^{\frac{n}{m}} x_4^{\frac{m-n}{m}} + \frac{\gamma_2}{\gamma_0} x_4 \right) + \\ + \left( \gamma_3 - \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_0} \right) x_4^2 = 0.$$

In der rationalen Gleichung sondert daher die Substitution (159a) den Faktor  $2m^2$  ab; es erhellt somit, dass die Tangente in  $X_1$  alle ihren  $2m^2$  Schnittpunkte mit der Kurve in  $X_1$  vereinigt hat. Analoges lässt sich von den Tangenten in  $X_2$  behaupten.

Auf der Fläche sind  $X_1$  und  $X_2$   $m^2$ -fache Punkte, von deren Berührungsebenen je  $m$  in einer von  $m$  Ebenen zusammengefallen sind. Es bilden diese  $m$  Ebenen die Regelfläche der Strahlen, welche auf der in  $X_1$  (bez.  $X_2$ ) an  $\gamma_\mu$  gelegten Tangente ruhen.

Der Kegelschnitt  $\gamma_\mu$  selbst ist auf seiner Regelfläche eine  $m^2$ -fache Kurve.

Es befindet sich auf der Fläche noch eine Doppelkurve, deren Untersuchung dahingestellt bleiben möge.

§ 16b. *Die Regelfläche der Strahlen, welche auf einem durch  $X_1$  und  $X_2$  gelegten Kegelschnitte ruhen, in der hyperbolischen Congruenz.*

Die Regelfläche der Strahlen welche in der *hyperbolischen* Congruenz auf einem willkürlichen Kegelschnitte ruhen, ist vom Grade  $2(m+n)^2 + 4mn$ , weil der Kegelschnitt in seiner Ebene eine  $(m+n)^2$ -fache Kurve ist und überdies noch zweimal durch jedem der  $2mn$  in seiner Ebene liegenden Strahlen geschnitten wird.

Sobald der Kegelschnitt die Punkte  $X_1$  und  $X_2$  enthält, werden die Ebenen  $\omega_\infty$  und  $\omega_0$  abgesondert, weil jede durch  $X_1$  oder  $X_2$  in  $\omega_\infty$  oder  $\omega_0$  gelegte Gerade ein Congruenzstrahl ist.

Da eine durch  $X_1$  in  $\omega_\infty$  gehende Gerade als ein  $mn$ -facher Strahl betrachtet werden muss, auch wenn  $X_1$  als Sammelpunkt gewählt

ist, so wird die Ebene  $\omega_\infty$   $2mn$  mal abgesondert. Ebenso wird die Ebene  $\omega_0$   $2mn$  mal der Fläche entnommen.

Die Restfläche eines durch  $X_1$  und  $X_2$  gelegten Kegelschnittes ist daher vom Grade  $2(m+n)^2 + 4mn - 2 \times 2mn = 2(m+n)^2$ .

Auf dieser Restfläche ist der Kegelschnitt selbst, welche mit  $\mathcal{Y}_\mu$  bezeichnet werden soll, eine  $(m+n)^2$ -fache Kurve. Die Ebene  $\omega_\mu$  von  $\mathcal{Y}_\mu$  enthält somit ausser  $\mathcal{Y}_\mu$  keinen Bestandteil der Fläche.

Von den  $(m+n)^2$  einem nahe bei  $X_1$  liegenden Punkte  $Y$  entstammenden Strahlen befinden sich  $m(m+n)$  in  $\omega_\infty$  und  $n(m+n)$  in  $\omega_0$ .

Wenn  $Y$  sich längs der Gerade

$$\left. \begin{aligned} \rho_2 x_2 + \rho_3 x_3 + \rho_4 x_4 &= 0, \\ x_3 &= \mu x_4 \end{aligned} \right\}$$

dem Punkte  $X_1$  nähert, so sind (siehe § 8b, S. 267) von den Geraden in  $\omega_\infty$  je  $m$  in einer der  $m+n$  Geraden

$$x_2^m \{ \mu \rho_2 x_2 + (\mu \rho_3 + \rho_4) x_3 \}^n - (-1)^n \rho_2^n x_3^{m+n} = 0$$

zusammengefallen, während von den Strahlen in  $\omega_0$  je  $n$  in den  $m+n$  Geraden

$$x_2^n \{ \mu \rho_2 x_2 + (\mu \rho_3 + \rho_4) x_3 \}^m - (-1)^m \rho_2^m \mu^m x_4^{m+n} = 0$$

vereinigt sind.

Wenn wir  $Y$  auf den Kegelschnitt  $\mathcal{Y}_\mu$ , also auf die Tangente in  $X_1$  legen, so haben wir (siehe § 16a, S. 310)

$$\left. \begin{aligned} \rho_2 &= \alpha_3 \beta_3, \\ \rho_3 &= \alpha_2 \beta_3, \\ \rho_4 &= \alpha_3 \beta_2 \end{aligned} \right\}$$

zu setzen, wonach die sich auf dem nahe bei  $X_1$  auf  $\mathcal{Y}_\mu$  stützenden Strahlen, wofern sie in  $\omega_\infty$  liegen, durch

$$x_2^m \{ \mu \alpha_3 \beta_3 x_2 + (\mu \alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2) x_3 \}^n - (-1)^n \alpha_3^n \beta_3^n x_3^{m+n} = 0, (150b)$$

und, wofern sie in  $\omega_0$  liegen, durch

$$x_2^n \{ \alpha_3 \beta_3 x_2 + (\mu \alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2) x_3 \}^m - (-1)^m \mu^m \alpha_3^m \beta_3^m x_4^{m+n} = 0 (150'b)$$

bestimmt sind.

Die Strahlen welche dem nahe bei  $X_2$  auf  $\mathcal{Y}_\mu$  liegenden Punkte entstammen, sind natürlich durch Gleichungen bestimmt, welche wir erhalten, indem wir in (150b) und (150'b) die Indices 1 und 2 vertauschen.

Der Schnitt in  $\omega_\infty$  wird offenbar die Geraden (150b) und die entsprechenden Geraden durch  $X_2$  enthalten. Von diesen  $2(m+n)$  Geraden ist jede eine  $m$ -fache, wonach das Ausartungsgebilde des Schnittes in  $\omega_\infty$  vom Grade  $2m(m+n)$  ist. Man erübrigt also eine Kurve vom Grade  $2(m+n)^2 - 2m(m+n) = 2n(m+n)$ .

Es sei  $A$  ein Schnittpunkt dieser Restkurve mit  $X_2 X_3$ , so liegt das Bild von  $A$  in  $X_1$ ; die Gerade  $AX_1$  ist daher ein Congruenzstrahl, welcher sich in einem Punkte von  $\omega_\infty$  auf der Kurve stützt, also eine Erzeugende der Regelfläche. Er muss aber alsdann mit einer der Geraden (150b) identisch sein. Die  $m+n$  Schnittpunkte der  $m+n$   $m$ -fachen Geraden (150b) mit  $X_2 X_3$  sind demnach gleichfalls die Schnittpunkte dieser Gerade  $X_2 X_3$  mit der in  $\omega_\infty$  liegenden Restkurve. Letztere schneidet somit  $X_2 X_3$ , ausser  $X_1$ ,  $n$  mal in jedem jener  $m+n$  Punkte.

Dasselbe gilt offenbar auch von den Geraden durch  $X_2$ .

Der Schnitt in  $\omega_0$  enthält jetzt eine Kurve vom Grade  $2m(m+n)$  nebst den Geraden welche  $X_1$  (bez.  $X_2$ ) verbinden mit den  $m+n$  ausserhalb  $X_2$  (bez.  $X_1$ ) liegenden Schnittpunkten von  $X_2 X_3$  (bez.  $X_1 X_2$ ) mit der Restkurve; als Ausartungsbestandteil ist jede Gerade  $n$ -fach zu zählen.

Wir wollen jetzt die Gleichung der in  $\omega_\infty$  liegenden Kurve herleiten. Sie wird am leichtesten ermittelt, indem wir in der Gleichung (152a) überall das Vorzeichen des Exponenten  $\frac{m}{n}$  umkehren, wonach sich ergibt:

$$\gamma_0 p_1^{-\frac{m}{n}} p_2^{-\frac{m}{n}} + \gamma_0' (p_1^{-\frac{m}{n}} p_2 + p_1 p_2^{-\frac{m}{n}}) + \gamma_0'' p_1 p_2 + \gamma_1 p_1^{-\frac{m}{n}} + \\ + \gamma_2 p_2^{-\frac{m}{n}} + \gamma_1' p_1 + \gamma_2' p_2 + \gamma_3 + 0,$$

oder

$$\gamma_0'' p_1^{\frac{m+n}{n}} p_2^{\frac{m+n}{n}} + \gamma_1' p_1^{\frac{m+n}{n}} p_2^{\frac{m}{n}} + \gamma_2' p_1^{\frac{m}{n}} p_2^{\frac{m+n}{n}} + \gamma_3 p_1^{\frac{m}{n}} p_2^{\frac{m}{n}} + \\ + \gamma_0' (p_1^{\frac{m+n}{n}} + p_2^{\frac{m+n}{n}}) + \gamma_2 p_1^{\frac{m}{n}} + \gamma_1 p_2^{\frac{m}{n}} + \gamma_0 = 0, \quad (152b)$$

wo die Grössen  $\gamma$  durch (153) bestimmt sind.

Wenn wir jetzt  $p_1$  durch  $x_1 : x_3$  und  $p_2$  durch  $x_2 : x_3$  ersetzen, so finden wir

$$\gamma_0'' x_1^{\frac{m+n}{n}} x_2^{\frac{m+n}{n}} + \gamma_1' x_1^{\frac{m+n}{n}} x_2^{\frac{m}{n}} x_3 + \gamma_2' x_1^{\frac{m}{n}} x_2^{\frac{m+n}{n}} x_3 + \\ + \gamma_3 x_1^{\frac{m}{n}} x_2^{\frac{m}{n}} x_3^2 + \gamma_0' (x_1^{\frac{m+n}{n}} + x_2^{\frac{m+n}{n}}) x_3^{\frac{m}{n}} + \gamma_2 x_1^{\frac{m}{n}} x_3^{\frac{m+2n}{n}} + \\ + \gamma_1 x_2^{\frac{m}{n}} x_3^{\frac{m+2n}{n}} + \gamma_0 x_3^{\frac{2(m+n)}{n}} = 0. \quad (154b)$$



Diese Gleichung stellt die fragliche Kurve vom Grade  $2n(m+n)$  dar.  
Die Tangenten in  $X_1$  sind durch

$$\gamma_0'' x_2^{\frac{m+n}{n}} + \gamma_1' x_2^{\frac{m}{n}} x_3 + \gamma_0' x_3^{\frac{m+n}{n}} = 0$$

angewiesen. Die Schnittpunkte mit  $X_2 X_3$  sind durch  $x_3^{\frac{m+n}{n}} = 0$  und

$$\gamma_0' x_2^{\frac{m+n}{n}} + \gamma_1 x_2^{\frac{m}{n}} x_3 + \gamma_0 x_3^{\frac{m+n}{n}} = 0 \quad . \quad (155b)$$

bestimmt. Vermöge der Relationen (153) sind diese Gleichungen abhängig, woraus wir schliessen, dass die Tangenten in  $X_1$  die Gerade  $X_2 X_3$  in denselben Punkten treffen wie die Kurve.

Es ist  $X_1$  ein  $n(m+n)$ -facher Punkt. Von seinen Tangenten sind je  $n$  zusammengefallen in einer der  $m+n$  Geraden, welche durch (155b) bestimmt werden. Letztere Gleichung verwandelt sich nach Rationalisirung in die Form (150b).

Die Gleichung (154b) lässt sich auch folgendermassen umstalten:

$$\begin{aligned} & (\gamma_0' x_2^{\frac{m+n}{n}} + \gamma_1 x_2^{\frac{m}{n}} x_3 + \gamma_0 x_3^{\frac{m+n}{n}}) (\gamma_0' x_1^{\frac{m+n}{n}} + \gamma_2 x_1^{\frac{m}{n}} x_3 + \gamma_0 x_3^{\frac{m+n}{n}}) + \\ & + (\gamma_0 \gamma_3 - \gamma_1 \gamma_2) x_1^{\frac{m}{n}} x_2^{\frac{m}{n}} x_3^2 = 0, \end{aligned}$$

oder

$$\gamma_0' x_2^{\frac{m+n}{n}} + \gamma_1 x_2^{\frac{m}{n}} x_3 = - \left[ \gamma_0 x_3^{\frac{m+n}{n}} + \frac{(\gamma_0 \gamma_3 - \gamma_1 \gamma_2) x_1^{\frac{m}{n}} x_2^{\frac{m}{n}} x_3^2}{\gamma_0' x_1^{\frac{m+n}{n}} + \gamma_2 x_1^{\frac{m}{n}} x_3 + \gamma_0 x_3^{\frac{m+n}{n}}} \right],$$

oder endlich

$$(\gamma_0' x_2 + \gamma_1 x_3) x_2^{\frac{m}{n}} = - \left[ \gamma_0 x_3^{\frac{m+n}{n}} + x_1^{\frac{m}{n}} \varphi \right],$$

wenn

$$\varphi = \frac{(\gamma_0 \gamma_3 - \gamma_1 \gamma_2) x_2^{\frac{m}{n}} x_3^2}{\gamma_0' x_1^{\frac{m+n}{n}} + \gamma_2 x_1^{\frac{m}{n}} x_3 + \gamma_0 x_3^{\frac{m+n}{n}}}$$

gesetzt wird.

Durch Potenzirung mit  $n$  bekommen wir

$$\begin{aligned} & (\gamma_0' x_2 + \gamma_1 x_3)^n x_3^m = \\ & = (-1)^n [\gamma_0^n x_3^{m+n} + n \gamma_0^{n-1} x_1^{\frac{m}{n}} x_3^{\frac{(m+n)(n-1)}{n}} \varphi + \dots + x_1^m \varphi^n], \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} & (\gamma_0' x_2 + \gamma_1 x_3)^n x_2^m - (-1)^n \gamma_0^n x_3^{m+n} = \\ & = (-1)^n [n \gamma_0^{n-1} x_1^n x_3^{\frac{m}{n} \frac{(m+n)(n-1)}{n}} \varphi + \dots + x_1^m \varphi^n]. \end{aligned}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ergibt, wenn gleich Null gesetzt, die  $m+n$  Tangenten in  $X_1$ , welche ausserdem die Gerade  $X_2 X_3$  ( $x_1=0$ ) in denselben Punkten wie die Kurve schneiden.

Wenn man die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Kurve verlangt, und dementsprechend die linke Seite gleich Null setzt,

so wird in der rechten Seite ein Faktor  $x_1^{\frac{m}{n}}$  und eine in  $x_2$  und  $x_3$  homogene Form vom Grade  $m+n+1$  abgetrennt.

In der rationalen Gleichung vom Grade  $n(m+n)$  würde alsdann der Faktor  $x_1^m$  und eine in  $x_2$  und  $x_3$  homogene Form vom Grade  $n(m+n+1)$  abgesondert sein. Es hat demnach jede Tangente in  $X_1$  daselbst  $n(m+n+1)$  Punkte mit der Kurve gemein, und in ihrem Schnittpunkte mit  $X_2 X_3$   $m$  Punkte.

Die Gerade  $X_2 X_3$  dagegen hat in  $X_2$   $n(m+n)$  Punkte und in sämtlichen übrigen  $m+n$  Schnittpunkten  $n(m+n)$  Punkte, also in jedem Schnittpunkte  $n$  Punkte mit der Kurve gemein. Hieraus geht hervor, dass die Schnittpunkte von  $X_2 X_3$  mit der Kurve  $n$ -fache Punkte sind, deren sämtliche Tangenten nach  $X_1$  convergieren, und dass diese Gerade  $X_2 X_3$  in einem solchen Schnittpunkte  $m$  Punkte mit der Kurve gemein hat.

Der Zustand auf  $X_1 X_3$  und in  $X_2$  ist dem oben Dargelegten völlig ähnlich.

Die Kurve in  $\omega_0$  unterscheidet sich, nach der Vertauschung von  $m$  mit  $n$ , der Indices 3 und 4, und von  $\mu$  mit  $1:\mu$ , nur in sofern von der in  $\omega_x$  liegenden Kurve, dass jede der in  $X_1$  gelegten Tangenten jetzt in ihrem Schnittpunkte mit  $X_2 X_4$   $n$  Punkte mit der Kurve gemein hat, während die Gerade  $X_2 X_4$  in einem solchen Punkte  $m$  Punkte der Kurve trägt. Ein solcher Schnittpunkt ist also wiederum ein  $n$ -facher Punkt, dessen Tangenten aber nunmehr alle mit  $X_2 X_4$  zusammenfallen, welche Gerade dort  $m$  Punkte mit der Kurve gemein hat.

$X_1$  und  $X_2$  sind auf der Fläche  $(m+n)^2$ -fache Punkte. Die Tangenten von  $X_1$  befinden sich alle in den  $m+n$  Ebenen, welche die axiale Regelfläche der in  $X_1$  an  $\mathcal{V}_\mu$  gelegten Tangente bilden. Diese Ebenen (siehe § 8b, S. 267) entsprechen der Gleichung

$$\begin{aligned} & \{\alpha_3 \beta_3 x_2 + (\mu \alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2) x_4\}^m \{\mu \alpha_3 \beta_3 x_2 + (\mu \alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2) x_3\}^n - \\ & - (-1)^n \alpha_3^{m+n} \beta_3^{m+n} (x_3 - \mu x_4)^{m+n} = 0. \end{aligned}$$

Wenn man die Indices 1 und 2 vertauscht, so bekommt man die Gleichung der  $m+n$  Berührungsebenen von  $X_2$ .

Der Kegelschnitt  $\gamma_\mu$  ist auf seiner Regelfläche eine  $(m+n)^2$ -fache Kurve.

Es liegt auf der Fläche noch eine Doppelkurve, welche hier nicht untersucht werden soll.

§ 17a. *Die Regelfläche der Strahlen, welche ruhen auf einem durch  $X_1$  und  $X_2$  gelegten Kegelschnitte, in Bezug auf welchen der Pol von  $X_1 X_2$  sich auf  $X_3 X_4$  befindet, in der parabolischen Congruenz.*

In dem vorliegenden Falle hat man

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 0, \alpha_2 = 0, \\ \beta_1 &= 0, \beta_2 = 0,\end{aligned}$$

wonach die Gleichungen des Kegelschnittes lauten:

$$\alpha_3 \beta_3 x_1 x_2 + \alpha_3 \beta_3 x_3^2 + \alpha_3 \beta_3 x_4^2 = 0, \quad . \quad . \quad (162)$$

$$x_3 = \mu x_4, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (163)$$

Die Gleichung (150a) der in  $X_1$  an der Kurve in  $\omega_\infty$  gelegten Tangenten verwandelt sich daher in

$$x_2^n \{x_2^{m-n} - (-1)^n x_3^{m-n}\} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (164a)$$

Die Tangenten in  $X_2$  sind jetzt durch

$$x_1^n \{x_1^{m-n} - (-1)^n x_3^{m-n}\} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (165a)$$

bestimmt.

Weil die Grössen  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_1'$  und  $\gamma_2'$  hier Null sind, während man  $\gamma_0'' = \mu \gamma_0' = \mu^2 \gamma_0$  hat, so wird die in  $\omega_\infty$  liegende Kurve durch

$$x_1^{\frac{m}{n}} x_2^{\frac{m}{n}} + \mu (x_1^{\frac{m}{n}} x_2 + x_1 x_2^{\frac{m}{n}}) x_3^{\frac{m-n}{n}} + \mu^2 x_1 x_2 x_3^{\frac{2(m-n)}{n}} + \frac{\gamma_3}{\gamma_0} x_3^{\frac{2m}{n}} = 0 \quad (166a)$$

dargestellt. Es sind hier von den  $m$  verschiedenen in  $X_1$  gelegten Tangenten  $n$  mit  $X_1 X_3$  und von den  $m$  in  $X_2$  gelegten Tangenten  $n$  mit  $X_2 X_3$  zusammengefallen. Die Gerade  $X_1 X_3$  (bez.  $X_2 X_3$ ) hat jetzt in  $X_1$  (bez.  $X_2$ ) mit der Kurve  $2mn$  Punkte gemein.

Die in  $\omega_0$  befindliche Kurve hat nun die Gleichung

$$x_1 x_2 + \mu (x_1 x_2^{\frac{n}{m}} + x_1^{\frac{n}{m}} x_2) x_4^{\frac{m-n}{m}} + \mu^2 x_1^{\frac{n}{m}} x_2^{\frac{n}{m}} x_4^{\frac{2(m-n)}{n}} + \frac{\gamma_3}{\gamma_0} x_4^2 = 0. \quad (167a)$$

Von den  $m$  verschiedenen in  $X_1$  (bez.  $X_2$ ) gelegten Tangenten sind jetzt  $n$  mit  $X_1 X_4$  (bez.  $X_2 X_4$ ) zusammengefallen. Die Gerade  $X_1 X_4$  (bez.  $X_2 X_4$ ) hat in  $X_1$  (bez.  $X_2$ )  $2m^2$  Punkte mit der Kurve gemein.

Von den  $m$  verschiedenen Berührungsebenen des Punktes  $X_1$  (bez.  $X_2$ ), als Punkt der Fläche betrachtet, sind  $n$  in  $X_1 X_3 X_4$  (bez.  $X_2 X_3 X_4$ ) vereinigt. Ubrigens ist kein Unterschied zu erwähnen.

§ 17b. *Die Regelfläche der Strahlen, welche ruhen auf einem durch  $X_1$  und  $X_2$  gelegten Kegelschnitte, in Bezug auf welchen der Pol von  $X_1 X_2$  sich auf  $X_3 X_4$  befindet, in der hyperbolischen Congruenz.*

Auch hier hat man

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0, \quad \alpha_2 = 0, \\ \beta_1 &= 0, \quad \beta_2 = 0; \end{aligned}$$

der Kegelschnitt ist demnach wiederum durch die Gleichungen (162) und (163) angewiesen.

Die in  $X_1$  an der Kurve in  $\omega_\infty$  gelegten Tangenten sind jetzt durch

$$\mu^n x_2^{m+n} - (-1)^n x_3^{m+n} = 0 \quad . \quad . \quad (164b)$$

bestimmt, während die in  $X_1$  an der Kurve in  $\omega_0$  gelegten Tangenten durch

$$x_2^{m+n} - (-1)^m \mu^m x_4^{m+n} = 0 \quad . \quad . \quad (164'b)$$

dargestellt werden.

Übrigens behalten die Darlegungen von § 16b ihre volle Gültigkeit.

§ 18a. *Die Regelfläche der Strahlen, welche ruhen auf einem durch  $X_1$  und  $X_2$  gelegten Kegelschnitte, welcher  $X_3 X_4$  schneidet, in der parabolischen Congruenz.*

Wenn  $\gamma_\mu$  die Gerade  $X_3 X_4$  schneidet, so gilt

$$\alpha_0 = 0, \quad \beta_0 = 0,$$

also

$$\gamma_3 = 0.$$

Der Kegelschnitt ist jetzt durch

$$\alpha_3 \beta_3 x_1 x_2 + x_1 (\alpha_2 \beta_3 x_3 + \alpha_3 \beta_2 x_4) + x_2 (\alpha_1 \beta_3 x_3 + \alpha_3 \beta_1 x_4) = 0, \quad (168)$$

$$x_3 = \mu x_4 \quad (169)$$

angewiesen.

Diese besondere Lage hat auf die Gleichungen der Berührungsebenen in den Punkten  $X_1$  und  $X_2$  keinen Einfluss. Sie macht sich nur darin bemerklich, dass  $X_3 X_4$  jetzt eine  $n^2$ -fache Gerade der Regelfläche ist.

Die in  $\omega_\infty$  liegende Kurve wird jetzt durch

$$\gamma_0 x_1^{\frac{m}{n}} x_2^{\frac{m}{n}} + \gamma_0' (x_1^{\frac{m}{n}} x_2 + x_1 x_2^{\frac{m}{n}}) x_3^{\frac{m}{n}} + \gamma_0'' x_1 x_2 x_3^{\frac{2(m-n)}{n}} + \\ + \gamma_1 x_1^{\frac{m}{n}} x_3^{\frac{m}{n}} + \gamma_2 x_2^{\frac{m}{n}} x_3^{\frac{m}{n}} + \gamma_1' x_1 x_3^{\frac{2m-n}{n}} + \gamma_2' x_2 x_3^{\frac{2m-n}{n}} = 0 \quad (170a)$$

bestimmt. Es hat diese Kurve in  $X_3$  einen  $n^2$ -fachen Punkt, dessen Tangenten durch

$$\gamma_1' x_1 + \gamma_2' x_2 = 0,$$

oder

$$(\mu \alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2) x_1 + (\mu \alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1) x_2 = 0 \quad (171a)$$

gegeben sind. Sämmtliche  $n^2$  Tangenten sind also in der Gerade (171a) vereinigt, welche die Spur in  $\omega_\infty$  ist der Ebene, die  $X_3 X_4$  verbindet mit der im Schnittpunkte  $X_\mu$  von  $X_3 X_4$  mit  $\gamma_\mu$  an dieser gelegten Tangente.

Die in  $\omega_0$  liegende Kurve hat nun die Gleichung

$$\gamma_0 x_1 x_2 + \gamma_0' (x_1 x_2^{\frac{n}{m}} + x_1^{\frac{n}{m}} x_2) x_4^{\frac{m-n}{m}} + \gamma_0'' x_1^{\frac{n}{m}} x_2^{\frac{n}{m}} x_4^{\frac{2(m-n)}{m}} + \\ + \gamma_1 x_1 x_4 + \gamma_2 x_2 x_4 + \gamma_1' x_1^{\frac{n}{m}} x_4^{\frac{2m-n}{m}} + \gamma_2' x_2^{\frac{n}{m}} x_4^{\frac{2m-n}{m}} = 0. \quad (172a)$$

Sie hat in  $X_4$  einen  $mn$ -fachen Punkt, von dessen Tangenten je  $m$  vereinigt sind in einer der  $n$  Geraden

$$\gamma_1' x_1^{\frac{n}{m}} + \gamma_2' x_2^{\frac{n}{m}} = 0,$$

d. h. in den Bildern der in  $X_3$  an der Kurve in  $\omega_\infty$  gelegten Tangente.

Die Berührungsebenen der  $n^2$ -fachen Gerade  $X_3 X_4$  sind alle mit der durch  $X_3 X_4$  und die Tangente in  $X_4$  an  $\gamma_\mu$  gelegten Ebene zusammengefallen. Nur in  $\omega_0$  bilden, den obigen Betrachtungen entsprechend, die Tangenten in  $X_4$  eine Ausnahme.

§ 18b. *Die Regelfläche der Strahlen welche ruhen auf einem durch  $X_1$  und  $X_2$  gelegten Kegelschnitte, welcher  $X_3 X_4$  schneidet, in der hyperbolischen Congruenz.*

Auch hier gilt

$$\alpha_0 = 0, \quad \beta_0 = 0,$$

also

$$\gamma_3 = 0,$$

wonach der Kegelschnitt durch die Gleichungen (168) und (169) vertreten wird.

Wie bei der *parabolischen* Congruenz, hat diese besondere Lage keinen Einfluss auf die Berührungsebenen in den Punkten  $X_1$  und  $X_2$ . Sogar die Gerade  $X_3 X_4$  giebt in ihrem Verhalten zu keinen Singularitäten Veranlassung.

Die in  $\omega_\infty$  liegende Kurve, welche jetzt durch

$$\begin{aligned} & \gamma_0'' x_1^{\frac{m+n}{n}} x_2^{\frac{m+n}{n}} + \gamma_1' x_1^{\frac{m+n}{n}} x_2^{\frac{m}{n}} x_3 + \gamma_2' x_1^{\frac{m}{n}} x_2^{\frac{m+n}{n}} x_3 + \\ & + \gamma_0' (x_1^{\frac{m+n}{n}} + x_2^{\frac{m+n}{n}}) x_3^{\frac{m+n}{n}} + \gamma_2 x_1^{\frac{m}{n}} x_3^{\frac{m+2n}{n}} + \gamma_1 x_2^{\frac{m}{n}} x_3^{\frac{m+2n}{n}} + \\ & + \gamma_0 x_3^{\frac{2(m+n)}{n}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (170b) \end{aligned}$$

dargestellt wird, unterscheidet sich auch nicht wesentlich von derjenigen im allgemeinen Falle.

§ 19a. *Die Regelfläche der Strahlen, welche auf einem durch  $X_1$  und  $X_2$  gelegten, in  $\omega_\infty$  befindlichen Kegelschnitte ruhen, in der parabolischen Congruenz.*

Wir dürfen die obigen Bezeichnungen benutzen, wenn nur

$$\mu = \infty$$

gesetzt wird.

Der Kegelschnitt, welcher mit  $\gamma_\infty$  angedeutet werden soll, hat die Gleichungen

$$\alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_2 x_1 x_3 + \alpha_1 x_2 x_3 + \alpha_0 x_3^2 = 0, \quad . \quad . \quad (173)$$

$$x_4 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (174)$$

Zuerst bemerken wir, dass die Fläche dieses Kegelschnittes noch weiter ausartet ist.

Da jede in  $\omega_\infty$  durch  $X_1$  oder  $X_2$  verlaufende Gerade jetzt  $\gamma_\infty$

zum zweiten Male schneidet, und als ein  $n(m-n)$ -facher Strahl zu betrachten ist, so wird die Ebene  $\omega_\infty$  aufs Neue  $2n(m-n)$  mal abgesondert. Ausserdem schneidet jede  $(m-n)$ -fache durch einen der  $m-n$  Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$  gehende Gerade den Kegelschnitt zweimal, wonach aus diesem Grunde die Ebene wiederum  $2(m-n)^2$  mal der Fläche entzogen wird. Im ganzen wird die Ebene  $\omega_\infty$  also  $2n(m-n) + 2(m-n)^2 = 2m(m-n)$  mal von der Fläche abgetrennt.

Die Restfläche ist somit vom Grade  $2m^2 - 2m(m-n) = 2mn$ .

Es ist auf dieser Fläche  $\mathcal{V}_\infty$  eine  $n^2$ -fache Kurve.

Die Schnittkurve in  $\omega_\infty$  wird zu einer Figur vom Grade  $2mn$  durch ein Ausartungsgebilde vom Grade  $2n(m-n)$  ergänzt. Es besteht dieses aus  $n(m-n)$  durch  $X_1$  und  $n(m-n)$  durch  $X_2$  gehenden Geraden. Die  $n(m-n)$  durch  $X_1$  (bez.  $X_2$ ) gehenden Geraden sind alle in die in  $X_1$  (bez.  $X_2$ ) an  $\mathcal{V}_\infty$  gelegte Tangente zusammengefallen.

Die in  $\omega_0$  liegende Kurve ist die Bildkurve des Kegelschnittes  $\mathcal{V}_\infty$ .

Ihre in den Coordinaten  $p_1'$  und  $p_2'$  geschriebene Gleichung lautet:

$$\alpha_3 p_1^{\frac{n}{m}} p_2^{\frac{n}{m}} + \alpha_2 p_1^{\frac{n}{m}} + \alpha_1 p_2^{\frac{n}{m}} + \alpha_0 = 0,$$

also in den Coordinaten  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_4$  ausgedrückt:

$$\alpha_3 x_1^{\frac{n}{m}} x_2^{\frac{n}{m}} + \alpha_2 x_1^{\frac{n}{m}} x_4^{\frac{n}{m}} + \alpha_1 x_2^{\frac{n}{m}} x_4^{\frac{n}{m}} + \alpha_0 x_4^{\frac{2n}{m}} = 0. \quad (175a)$$

Es hat diese Kurve in  $X_1$  einen  $mn$ -fachen Punkt, dessen Tangenten durch

$$\alpha_3 x_2^{\frac{n}{m}} + \alpha_2 x_4^{\frac{n}{m}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (176a)$$

bestimmt und demnach zu je  $m$  mit einem der  $n$  Bilder der in  $X_1$  an  $\mathcal{V}_\infty$  gelegten Tangente identisch sind.

Analoges gilt von den Tangenten in  $X_2$ .

Die Schnittpunkte mit  $X_2 X_4$  werden durch die Gleichung

$$(\alpha_1 x_2^{\frac{n}{m}} + \alpha_0 x_4^{\frac{n}{m}}) x_4^{\frac{n}{m}} = 0$$

geliefert. Die Gerade  $X_2 X_4$  schneidet also die Kurve  $mn$  mal im  $mn$ -fachen Punkte  $X_2$  und noch  $m$  mal in jedem der  $n$  Bilder  $M_1'$  des Schnittpunktes  $M_1$  von  $\mathcal{V}_\infty$  mit  $X_2 X_3$ .

Diese  $n$  Punkte  $M_1'$  sind  $n$ -fache Punkte, deren sämtliche Tangenten mit  $X_2 X_4$  zusammengefallen sind. Der Punkt  $M_1$  trägt ja  $n^2$  Strahlen, welche zu je  $n$  die Ebene  $\omega_0$  in den  $n$  Bildern  $M_1'$

treffen. In der Nähe der Punkte  $M_1'$  befinden sich also  $n$  Punkte der Kurve; m. a. W. diese Punkte sind  $n$ -fache.

Es sind auf der Fläche  $X_1$  und  $X_2$   $mn$ -fache Punkte. Von den Berührungsebenen im  $X_1$  (bez.  $X_2$ ) sind je  $m$  vereinigt in einer der  $n$  Ebenen, welche die in  $X_1$  (bez.  $X_2$ ) an  $\mathcal{V}_\infty$  gelegte Tangente mit ihren  $n$  Bildern in  $\omega_0$  verbinden.

Die  $n$  Geraden, welche den Punkt  $M_1$  (bez.  $M_2$ ) mit seinen  $n$  verschiedenen Bildern  $M_1'$  (bez.  $M_2'$ ) verbinden, sind  $n$ -fache Geraden der Fläche, deren Berührungsebenen alle in der Ebene  $X_2 X_3 X_4$  (bez.  $X_1 X_3 X_4$ ) vereinigt sind.

Der Schnitt der Regelfläche mit einer durch  $X_1 X_2$  gelegten Ebene  $\omega_\mu$  ist eine Kurve vom Grade  $2mn$ , welche in  $X_1$  und  $X_2$   $mn$ -fache Punkte hat, deren Tangenten die Spuren in  $\omega_\infty$  der Berührungsebenen in  $X_1$  und  $X_2$  sind.

Die Punkte, wo die Ebene  $\omega_\mu$  die Geraden  $M_1 M_1'$  (bez.  $M_2 M_2'$ ) schneidet, sind  $n$ -fache Punkte, deren Tangenten in der Gerade  $X_2 X_\mu$  (bez.  $X_1 X_\mu$ ) vereinigt sind.

Auch hier wollen wir die Untersuchung der Doppelkurve unterlassen.

§ 19b. *Die Regelfläche der Strahlen, welche auf einem durch  $X_1$  und  $X_2$  gelegten, in  $\omega_\infty$  befindlichen Kegelschnitte ruhen, in der hyperbolischen Congruenz.*

Auch hier ist einzusetzen

$$\mu = \infty,$$

wonach der Kegelschnitt  $\mathcal{V}_\infty$  durch die Gleichungen (173) und (174) vertreten wird.

Die Fläche ist auch hier weiter ausgeartet.

Jede in  $\omega_\infty$  durch  $X_1$  gehende Gerade schneidet ja  $\mathcal{V}_\infty$  zum zweiten Male und zwar als ein  $mn$ -facher Strahl. Ebenso ist jede in  $\omega_\infty$  durch  $X_1$  gehende Gerade nochmals als  $mn$ -facher Strahl zu rechnen.

Ausserdem ist jede durch  $X_3$  in  $\omega_\infty$  gehende Gerade ein  $m^2$ -facher Strahl; sie schneidet  $\mathcal{V}_\infty$  zweimal. Die Ebene  $\omega_\infty$  ist also im Ganzen abermals  $2mn + 2m^2 = 2m(m + n)$  mal abzusondern; die Restfläche ist somit vom Grade  $2(m + n)^2 - 2m(m + n) = 2n(m + n)$ .

Es ist auf dieser Fläche  $\mathcal{V}_\infty$  eine  $n^2$ -fache Kurve.

Es möge  $\mathcal{V}_\infty$  die Gerade  $X_2 X_3$  in  $M_1$  und die Gerade  $X_1 X_3$  in  $M_2$  schneiden.

Die Geraden  $M_1 X_1$  und  $M_2 X_2$  sind Erzeugende der Regelfläche, weil sie Punkte von  $\mathcal{V}_\infty$  mit ihren Bildern verbinden. Da  $M_1 X_1$



und  $M_2 X_2$  als Geraden durch  $X_1$  und  $X_2$  in  $\omega_\infty$   $mn$ -fache Strahlen sind, so wird der  $n^2$ -fache Kegelschnitt  $\mathcal{V}_\infty$  zum vollständigen Schnitte vom Grade  $2n(m+n)$  durch die  $mn$ -fachen Geraden  $X_1 M_1$  und  $X_2 M_2$  ergänzt.

Der Schnitt in  $\omega_0$  besteht aus der Bildkurve vom Grade  $2mn$  von  $\mathcal{V}_\infty$  und aus  $n$   $n$ -fachen, durch jeden der Punkte  $X_1$  und  $X_2$  gelegten Geraden, welche nachher bestimmt werden sollen.

Die in  $\omega_0$  liegende Bildkurve hat in  $p_1'$  und  $p_2'$  die Gleichung

$$\alpha_3 p_1'^{-\frac{n}{m}} p_2'^{-\frac{n}{m}} + \alpha_2 p_1'^{-\frac{n}{m}} + \alpha_1 p_2'^{-\frac{n}{m}} + \alpha_0 = 0,$$

oder

$$\alpha_0 p_1'^{\frac{n}{m}} p_2'^{\frac{n}{m}} + \alpha_1 p_1'^{\frac{n}{m}} + \alpha_2 p_2'^{\frac{n}{m}} + \alpha_3 = 0,$$

also in den Coordinaten  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_4$ :

$$\alpha_0 x_1^{\frac{n}{m}} x_2^{\frac{n}{m}} + \alpha_1 x_1^{\frac{n}{m}} x_4^{\frac{n}{m}} + \alpha_2 x_2^{\frac{n}{m}} x_4^{\frac{n}{m}} + \alpha_3 x_4^{\frac{2n}{m}} = 0. \quad (175b)$$

Die Tangenten im  $mn$ -fachen Punkte  $X_1$  sind durch

$$\alpha_0 x_2^{\frac{n}{m}} + \alpha_1 x_4^{\frac{n}{m}} = 0$$

angewiesen; von ihnen sind offenbar je  $m$  in einem der  $n$  Bilder der Gerade  $X_1 M_1$  (siehe oben) vereinigt.

Ebenso sind von den Tangenten in  $X_2$  je  $m$  in ein der  $n$  Bilder von  $X_2 M_2$  zusammengefallen.

Die in  $\omega_0$  liegende Kurve schneidet  $X_2 X_4$ , ausser  $mn$  mal in  $X_2$ ,  $m$  mal in jedem der  $n$  Punkte

$$\alpha_2 x_2^{\frac{n}{m}} + \alpha_3 x_4^{\frac{n}{m}} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (176b)$$

Die  $n$  Geraden, welche diese Punkte mit  $X_1$  verbinden, sind Congruenzstrahlen und befinden sich auf der Fläche. Sie sind die  $n$ -fachen Geraden, welche dem Gesamtschnitte in  $\omega_0$  angehören. Ausserdem sind sie als die  $n$  Bilder der in  $X_1$  an  $\mathcal{V}_\infty$  gelegten Tangente zu betrachten.

Ebenso sind die  $n$  Geraden, welche  $X_2$  verbinden mit den  $n$   $m$ -fachen Schnittpunkten von  $X_1 X_4$  mit der Kurve in  $\omega_0$ ,  $n$ -fache Geraden der Fläche; sie sind auch die  $n$  Bilder der in  $X_2$  an  $\mathcal{V}_\infty$  gelegten Tangente.

Der Gesamtschnitt in  $\omega_0$  besteht deshalb aus der Kurve vom

Grade  $2mn$ , den  $n$   $n$ -fachen Geraden (176b) durch  $X_1$  und den  $n$  entsprechenden  $n$ -fachen Geraden durch  $X_2$ .

Die Schnittpunkte der in  $\omega_0$  liegenden Kurve mit  $X_2 X_4$  und  $X_1 X_4$  sind  $n$ -fache Punkte, deren Tangenten bez. mit  $X_2 X_4$  und  $X_1 X_4$  zusammenfallen. Es hat jede dieser Geraden in einem Berührungspunkte  $m$  Punkte mit der Kurve gemein.

Auf der Fläche sind  $X_1$  und  $X_2$   $n(m+n)$ -fache Punkte. Ihre Berührungsebenen sind in zwei Gruppen verteilt; die erste Gruppe enthält  $mn$  Ebenen, deren je  $m$  vereinigt sind in einer der  $n$  Ebenen, welche die Gerade  $X_1 M_1$  (bez.  $X_2 M_2$ ) mit ihren  $n$  Bildern verbinden; die zweite Gruppe enthält  $n^2$  Ebenen, deren je  $n$  zusammenfallen mit einer der  $n$  Ebenen, welche die an  $\gamma_\infty$  in  $X_1$  (bez.  $X_2$ ) gelegte Tangente mit ihren  $n$  Bildern in  $\omega_0$  verbinden.

Der Schnitt der Regelfläche mit einer durch  $X_1 X_2$  gelegten Ebene ist eine Kurve vom Grade  $2n(m+n)$ , welche in  $X_1$  und  $X_2$   $n(m+n)$ -fache Punkte hat. Die Tangenten in diesen Punkten sind die Schnittlinien von  $\omega_\mu$  mit den Berührungsebenen von  $X_1$  (bez.  $X_2$ ).

Auch hier möge die Doppelkurve ausser Betracht bleiben.

§ 20a. *Die Regelfläche der Strahlen, welche ruhen auf einem durch  $X_1$  und  $X_2$  gelegten, in  $\omega_\infty$  befindlichen Kegelschnitte, in Bezug auf welchen  $X_3$  der Pol von  $X_1 X_2$  ist, in der parabolischen Congruenz.*

Es gilt hier

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0.$$

Die Gleichungen von  $\gamma_\infty$  sind

$$\alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_0 x_3^2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (177)$$

$$x_4 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (178)$$

Die Regelfläche ist wiederum vom Grade  $2mn$  und trägt  $\gamma_\infty$  als eine  $n^2$ -fache Kurve.

Die in  $\omega_0$  liegende Kurve wird durch

$$\alpha_3 x_1^{\frac{n}{m}} x_2^{\frac{n}{m}} + \alpha_0 x_4^{\frac{2n}{m}} = 0,$$

oder

$$\alpha_3^{\frac{m}{n}} x_1 x_2 - (-1)^{\frac{m}{n}} \alpha_0^{\frac{m}{n}} x_4^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (179a)$$

dargestellt, und besteht demnach aus  $n$   $m$ -fachen durch  $X_1$  und  $X_2$  gelegten Kegelschnitten, in Bezug auf welche  $X_4$  der Pol von  $X_1 X_2$  ist.

Die Punkte  $M_1$  und  $M_2$  sind jetzt bez. in  $X_1$  und  $X_2$  gelangt; so auch die Bildpunkte  $M_1'$  und  $M_2'$ . Die Verbindungslinien  $M_1 M_1'$  und  $M_2 M_2'$  sind also mit den Geraden  $X_2 X_3$  und  $X_1 X_3$  identisch geworden. Diese Geraden ergänzen, als  $n(m-n)$ -fache Strahlen, den  $n^2$ -fachen Kegelschnitt  $\mathcal{V}_\infty$  zu einem Gebilde vom Grade  $2mn$ .

Die Fläche hat in  $X_1$  und  $X_2$   $mn$ -fache Punkte, deren Berührungsebenen alle in  $X_1 X_3 X_4$  (bez.  $X_2 X_3 X_4$ ) gefallen sind.

Der Schnitt der Fläche mit einer durch  $X_1 X_2$  gelegten Ebene  $\omega_\mu$  ist eine Kurve vom Grade  $2mn$ , welche in  $X_1$  und  $X_2$   $mn$ -fache Punkte hat; ihre Tangenten sind in  $X_1 X_3 X_4$  (bez.  $X_2 X_3 X_4$ ) zusammengefallen.

§ 20b. *Die Regelfläche der Strahlen, welche ruhen auf einem durch  $X_1$  und  $X_2$  gelegten, in  $\omega_\infty$  befindlichen Kegelschnitte, in Bezug auf welchen  $X_3$  der Pol von  $X_1 X_2$  ist, in der hyperbolischen Congruenz.*

Wiederum hat man

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0,$$

und für  $\mathcal{V}_\infty$  die Gleichungen (177) und (178).

Die Regelfläche ist vom Grade  $2n(m+n)$  und enthält  $\mathcal{V}_\infty$  als eine  $n^2$ -fache Kurve.

Die in  $\omega_0$  befindliche Kurve wird durch

$$\alpha_0 x_1^{\frac{n}{m}} x_2^{\frac{n}{m}} + \alpha_3 x_4^{2n} = 0,$$

oder

$$\alpha_0^{\frac{m}{n}} x_1 x_2 - (-1)^n \alpha_3^{\frac{m}{n}} x_4^2 = 0 \quad . \quad . \quad (179b)$$

dargestellt. Auch hier ist diese Kurve in  $n$   $m$ -fache durch  $X_1$  und  $X_2$  gelegte Kegelschnitte zerfallen, in Bezug auf welche  $X_4$  der Pol von  $X_1 X_2$  ist.

Diese Kurve wird durch die  $2n^2$ -fache Gerade  $X_1 X_2$  zu einem Gebilde vom Grade  $2n(m+n)$  ergänzt.

Die Gerade  $X_1 X_2$  ergänzt,  $2mn$ -fach gezählt, den  $n^2$ -fachen Kegelschnitt  $\mathcal{V}_\infty$  zum vollständigen Schnitte in  $\omega_\infty$ .

Die Gerade  $X_1 X_2$  ist auf der Fläche eine  $2n^2$ -fache Gerade mit  $\omega_\infty$  als Berührungsebene.

Die Fläche hat in  $X_1$  und  $X_2$   $n(m+n)$ -fache Punkte, von deren Berührungsebenen  $mn$  mit  $\omega_0$  und  $n^2$  mit  $\omega_\infty$  zusammengefallen sind.

§ 21a. *Die Regelfläche der Strahlen, welche auf einem durch  $X_1$ ,  $X_2$  und  $X_3$  gelegten Kegelschnitte ruhen, in der parabolischen Congruenz.*

In diesem Falle gilt

$$\alpha_0 = 0,$$

wonach  $\gamma_\infty$  durch

$$\alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_2 x_1 x_3 + \alpha_1 x_2 x_3 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (180)$$

$$x_4 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (181)$$

angewiesen ist.

Die Regelfläche ist vom Grade  $2mn$  und trägt  $\gamma_\infty$  als eine  $n^2$ -fache Kurve.

Der in  $\omega_\infty$  liegende Schnitt ist, ausser dem  $n^2$ -fachen Kegelschnitte  $\gamma_\infty$ , aus den  $n(m-n)$ -fachen in  $X_1$  und  $X_2$  an  $\gamma_\infty$  gelegten Tangenten zusammengesetzt.

Die in  $\omega_0$  liegende Bildkurve hat nun die Gleichung

$$\alpha_3 x_1^{\frac{n}{m}} x_2^{\frac{n}{m}} + \alpha_2 x_1^{\frac{n}{m}} x_4^{\frac{n}{m}} + \alpha_1 x_2^{\frac{n}{m}} x_4^{\frac{n}{m}} = 0. \quad . \quad . \quad (182a)$$

Sie hat ausserdem in  $X_4$  einen  $mn$ -fachen Punkt, von dessen Tangenten je  $m$  in ein der  $n$  Bilder der in  $X_3$  an  $\gamma_\infty$  gelegten Tangente zusammengefallen sind.

Die  $n$  Punkte  $M_1'$  und die  $n$  Punkte  $M_2'$  sind jetzt alle in  $X_4$  gefallen, weil die beiden Punkte  $M_1$  und  $M_2$  in  $X_3$  gelangt sind.

Es ist  $X_3 X_4$  jetzt eine  $n^2$ -fache Gerade auf der Fläche. Alle Berührungsebenen sind in der durch  $X_3 X_4$  und die in  $X_3$  an  $\gamma_\infty$  gelegte Tangente bestimmten Ebene vereinigt.

Der Schnitt der Regelfläche mit einer durch  $X_1 X_2$  gelegten Ebene  $\omega_\mu$  ist jetzt eine Kurve vom Grade  $2mn$ , welche, ausser den oben erwähnten  $mn$ -fachen Punkten in  $X_1$  und  $X_2$ , in  $X_\mu$  einen  $n^2$ -fachen Punkt hat, dessen sämtliche Tangenten vereinigt sind in der Schnittlinie von  $\omega_\mu$  mit der Ebene, welche  $X_3 X_4$  und die in  $X_3$  an  $\gamma_\infty$  gelegte Tangente enthält.

§ 21b. *Die Regelfläche der Strahlen welche auf einem durch  $X_1$ ,  $X_2$  und  $X_3$  gelegten Kegelschnitte ruhen, in der hyperbolischen Congruenz.*

Wie in § 21a, hat man auch hier

$$\alpha_0 = 0.$$

Da der Kegelschnitt  $\gamma_\infty$  jetzt den Punkt  $X_3$  enthält, so ist jede durch  $X_1$  in  $\omega_\infty$  verlaufende Gerade nochmals ein  $mn$ -facher Strahl (siehe S. 254) welcher den Kegelschnitt schneidet. Die Ebene  $\omega_\infty$  wird somit  $mn$  mal abgesondert, wonach man eine Fläche vom Grade  $2n(m+n) - mn = n(m+2n)$  erübrigt. Daher verschwinden die  $mn$ -fachen Geraden  $X_1 X_3$  und  $X_2 X_3$  im vollständigen Schnitte

von  $\omega_\infty$ . An deren Stelle tritt die Gerade, welche den  $X_3$  auf  $\mathcal{V}_\infty$  vorangehenden Punkt mit seinem Bilde vereinigt,  $mn$ -fach gezählt, weil jeder Strahl durch  $X_3$  in  $\omega_\infty$   $mn$ -fach zu rechnen ist.

Der Schnitt in  $\omega_\infty$  enthält somit den  $n^2$ -fachen Kegelschnitt  $\mathcal{V}_\infty$  und die  $mn$ -fache Gerade, welche  $X_3$  verbindet mit dem Bilde des  $X_3$  auf  $\mathcal{V}_\infty$  vorangehenden Punktes.

Die Bildkurve in  $\omega_0$  wird ermittelt, indem man in (175b)  $\alpha_0 = 0$  einsetzt und nachher durch  $x_4^{\frac{n}{m}}$  teilt. Man findet alsdann

$$\alpha_1 x_1^{\frac{n}{m}} + \alpha_2 x_2^{\frac{n}{m}} + \alpha_3 x_3^{\frac{n}{m}} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (182b)$$

Diese Kurve vom Grade  $mn$  geht weder durch  $X_1$ , noch durch  $X_2$ , noch durch  $X_4$ . Sie berührt  $X_2 X_4$  (bez.  $X_1 X_3$ ) in den  $n$   $n$ -fachen Punkten, deren Verbindungslinien mit  $X_1$  (bez.  $X_2$ ) die Bilder der in  $X_1$  (bez.  $X_2$ ) an  $\mathcal{V}_\infty$  gelegten Tangente sind. Diese Verbindungslinien, jede  $n$ -fach gerechnet, gehören auch dem Gesamtschnitte in  $\omega_0$  an.

Es sind auf der Fläche  $X_1$  und  $X_2$  nun  $n^2$ -fache Punkte. Die Berührungsebenen bilden jetzt nur die zweite Gruppe des allgemeinen Falles (siehe S. 326).

Der Schnitt der Regelfläche mit einer durch  $X_1 X_2$  gelegten Ebene  $\omega_\mu$  ist jetzt eine Kurve vom Grade  $n(m + 2n)$ , welche sowohl in  $X_1$  wie in  $X_2$  einen  $n^2$ -fachen Punkt hat. Die Tangenten in diesen Punkten sind die Spuren in  $\omega_\mu$  der Berührungsebenen.

§ 22. In Bezug auf die Regelfläche der Strahlen, welche einen durch  $X_1$  und  $X_2$  gelegten, in  $\omega_0$  befindlichen Kegelschnitt schneiden, dürfen wir, für die *parabolische* Congruenz, auf den allgemeinen Fall hinweisen, während in der *hyperbolischen* Congruenz die Ergebnisse von §§ 19b, 20b und 21b nur durch Vertauschung von  $m$  mit  $n$  und der Indices 3 und 4 abzuändern sind.

§ 23. Wir wollen nunmehr eine kurze Übersicht über die in diesem Abschnitte erhaltenen Resultate geben, und zwar so, dass die Bedeutung der Punkte  $X_1$  und  $X_2$  als Kreispunkte dabei hervortritt.

Zuerst möge aber betont werden, dass von den  $m^2$  Strahlen, welche in der parabolischen Congruenz nach einem *reellen* Punkte zielen, nur  $m$  reell sind, während von den  $(m + n)^2$  Strahlen, welche sich in der hyperbolischen Congruenz in einem reellen Punkte treffen, deren  $m + n$  reell sind.

Ein Strahl, welcher einem reellen Punkte entstammt, ist selber reell, wenn er die Ebene  $\omega_\infty$  ebenfalls in einem *reellen* Punkte trifft.

Soll ein Punkt  $(x, y)$  in der Ebene  $\omega_\infty$  oder  $[w]$  reell sein, so müssen die Coordinaten  $p_1 = (x + iy) : c$  und  $p_2 = (x - iy) : c$  *conjugirt complex* sein.

Die Strahlen, welche nach einem reellen Punkte  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  zielen, werden durch ihre Spuren in  $\omega_\infty$  bestimmt, deren Coordinaten  $p_1$  und  $p_2$  in der *parabolischen* Congruenz den Beziehungen

$$x_4^n p_1^m - (x_1 - x_3 p_1)^n = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (183a)$$

$$x_4^n p_2^m - (x_2 - x_3 p_2)^n = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (184a)$$

und in der *hyperbolischen* Congruenz den Bedingungen

$$p_1^m (x_1 - x_3 p_1)^n - x_4^n = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (183b)$$

$$p_2^m (x_2 - x_3 p_2)^n - x_4^n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (184b)$$

genügen. In diesen beiden Fällen sind  $x_1$  und  $x_2$ , weil der Sammel-punkt reell ist, *conjugirt complex*; die Coefficienten der Gleichung (184a) (bez. (184b)) sind also *conjugirt complex* in Bezug auf die entsprechenden Coefficienten der Gleichung (183a) (bez. (183b)).

Wir wollen die Gleichungen (183a) und (183b) in der Form

$$f_1 \left( \overset{N}{p_1} \right) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (185)$$

und die Gleichungen (184a) und (184b) in der Form

$$f_2 \left( \overset{N}{p_2} \right) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (186)$$

zusammenfassen.

Wir erschen daher in den Gleichungen (185) und (186) zwei Gleichungen vom Grade  $N$ , während die Coefficienten von (186) den entsprechenden Coefficienten von (185) *conjugirt* sind.

Aus Letzterem geht hervor, dass auch die Wurzeln von (186) den Wurzeln von (185) *conjugirt* sind.

Indem wir nun die Wurzeln von (185) durch

$$\gamma_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \gamma_2 = \alpha_2 + i\beta_2, \dots \gamma_N = \alpha_N + i\beta_N$$

darstellen, müssen wir diejenigen von (186) mit

$$\delta_1 = \alpha_1 - i\beta_1, \delta_2 = \alpha_2 - i\beta_2, \dots \delta_N = \alpha_N - i\beta_N$$

bezeichnen; in diesen Ausdrücken sind die Grössen  $\alpha_k$  und  $\beta_k$  offenbar reell.

Es giebt nur  $N$  reelle Combinationen  $(\gamma_k, \delta_l)$  oder  $(p_1, p_2)$ , n.l. diejenigen, für welche  $l = k$ . Die  $N$  Wurzelpaaren  $(p_1, p_2)$ , welche in  $\omega_\infty$  *reelle* Punkte anweisen, sind demnach

$$(\gamma_1, \delta_1), (\gamma_2, \delta_2), (\gamma_3, \delta_3), \dots (\gamma_N, \delta_N).$$

Wenn es noch eine solche Combination, z. B.  $(\gamma_k, \delta_l)$  gäbe, so würde man haben

$$\alpha_l - i\beta_l = \alpha_k - i\beta_k,$$

wonach

$$\begin{aligned}\alpha_l &= \alpha_k, \\ \beta_l &= \beta_k,\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\gamma_l &= \gamma_k, \\ \delta_l &= \delta_k;\end{aligned}$$

jede der Gleichungen (185) und (186) würde alsdann zwei gleiche Wurzeln haben. In Folge dessen würde aber die Anzahl der *verschiedenen* Combinationen nicht vergrößert werden. Denn hat  $f_1(\overset{N}{p}_1) = 0$ , also auch  $f_2(\overset{N}{p}_2) = 0$ ,  $k$  gleiche Wurzeln, so giebt es ausserdem noch  $N - k$  andere Wurzelpaare, welche einen reellen Punkt anweisen. Die  $k$  gleichen Wurzeln bestimmen alsdann nur einen einzigen reellen Punkt.

Wir können somit Folgendes behaupten:

*Von den  $N^2$  Strahlen, welche durch die Gleichungen (185) und (186) angewiesen werden, sind, falls der Sammelpunkt reell ist, nur  $N$  reell.*

Wir haben also nur  $N = m$  bei der *parabolischen* und  $N = m + n$  bei der *hyperbolischen* Congruenz zu setzen, um den vorliegenden Satz zu beweisen.

Dieses Resultat entspricht der Tatsache, dass die Beziehung

$$w'^n = c^{n-m} w^m$$

einem Punkte  $w' = u' + iv'$  in  $[w']$   $m$  Punkte  $w = u + iv$  in  $[w]$  zuordnet, während mit einem Punkte  $w = u + iv$  in  $[w]$  deshalb nur  $n$  Punkte  $w' = u' + iv'$  in  $[w']$  übereinstimmen, weil von den  $m$  reellen durch den Punkt  $w$  gehenden Strahlen  $m - n$  in der Ebene  $[w]$  liegen.

Ebenso liegen bei der hyperbolischen Congruenz, welche der Beziehung

$$w'^n w^m = c^{m+n}$$

angehört, von den  $m+n$  einem reellen Punkte  $w$  von  $[w]$  entstammenden reellen Strahlen  $m$  in  $[w]$ , wonach der Punkt  $w$  nur mit  $m$  reellen Punkten der Ebene  $[w']$  verbunden wird; diese Beziehung ordnet ja einem Werte von  $w$   $n$  Werte von  $w'$  zu. Von den  $m+n$  reellen Strahlen, welche nach einem reellen Punkte  $w'$  von  $[w']$  zielen, befinden sich  $n$  in  $[w']$ ; der Punkt  $w'$  wird also nur mit  $m$  reellen Punkten der Ebene  $[w]$  vereinigt; auch dieses Ergebniss entspricht der gegebenen algebraischen Gleichung.

Die Sammelpunkte, welche sowohl zu gleichen Wurzeln von  $f_1(p_1)=0$  wie zu gleichen Wurzeln von  $f_2(p_2)=0$  Veranlassung geben, tragen zwei zusammenfallende Berührungsebenen an dem Fokalkegel  $F_1$  und ebenfalls zwei zusammenfallende Berührungsebenen an dem Fokalkegel  $F_2$ , sodass sie sich auf der Schnittkurve dieser Fokalkegel befinden müssen. Die auf der Schnittkurve der Fokalkegel liegenden Punkte sind also als Verzweigungspunkte zu betrachten. In einem solchen Punkte werden eine gewisse Anzahl von reellen Strahlen sich durch stetigen Übergang nach ihrer Coincidenz in eine gleiche Anzahl imaginärer Strahlen verwandeln, und umgekehrt.

Der Axengrad der *parabolischen* und *hyperbolischen* Congruenzen ist die Anzahl der Schnittpunkte einer willkürlichen Gerade mit der auf der axialen Regelfläche dieser Gerade liegenden Doppelkurve.

Es sei  $\mu$  der Bündelgrad,  $\nu$  der Feldgrad der zu betrachtenden Congruenz.

In einer durch  $l$  gelegten Ebene  $V$  liegen  $\nu$  Strahlen, welche  $l$  in  $\nu$  Punkten  $P$  schneiden. Durch jeden Punkt  $P$  gehen noch  $(\mu-1)$  andere Strahlen, welche mit  $l$   $(\mu-1)$  Ebenen  $W$  bestimmen. Der Ebene  $V$  werden also  $\nu(\mu-1)$  Ebenen  $W$  zugeordnet. Es liegen in einer durch  $l$  gelegten Ebene  $V$  zwei Strahlen die sich auf  $l$  schneiden, wenn eine Ebene  $W$  mit einer entsprechenden Ebene  $V$  zusammenfällt. Da die Verwandtschaft  $(\nu(\mu-1), \nu(\mu-1))$  der Ebenen  $V, W$   $2\nu(\mu-1)$  Coincidenzen aufweist, so geschieht es  $2\nu(\mu-1)$  mal, dass eine Gerade  $l$  mit zwei Strahlen zu einem Strahlenbüschel gehört.

Unter diesen  $2\nu(\mu-1)$  Fällen giebt es aber noch, welche für unseren Zweck keine Bedeutung haben.



In den beiden Arten von Congruenzen ist der Bündelgrad das Quadrat der Zahl  $M$ , welche sowohl den Grad wie die Klasse eines Fokalkegels anweist.

Die beiden Fokalkegel werden durch  $l$  in  $2M$  Punkten  $R$  geschnitten. In einem solchen Punkte  $R$  sind  $2M$  Strahlen  $s_1 \dots s_{2M}$  paarweise zusammengefallen.

Die Ebene  $V$  welche  $l$  mit  $s_1$  verbindet, bestimmt eine Ebene  $W$  welche auch  $s_1$  liefert, also eine Coincidenz der Verwandtschaft der Ebenen  $V, W$ . Diese Coincidenz ist aber für uns von keiner Bedeutung, da die Verbindungsebene der beiden zusammenfallenden Strahlen  $s_1$ , d. h. die Berührungsebene an dem Fokalkegel, die Gerade  $l$  nicht enthält.

In jedem Punkte  $R$  müssen also  $M$  Coincidenzen, und daher im Ganzen  $2M^2 = 2\mu$  Coincidenzen gestrichen werden.

Wir erübrigen also  $2\nu(\mu - 1) - 2\mu = 2(\mu\nu - \mu - \nu)$  Coincidenzen.

Da von diesen jede doppelt in Betracht kommt, so geschieht es in der Tat nur  $(\mu\nu - \mu - \nu)$  mal, dass  $l$  mit zwei Strahlen einem Strahlenbüschel angehört, m. a. W.: der *Axengrad* der Congruenz ist

$$N = \mu\nu - \mu - \nu.$$

Bei der *parabolischen* Congruenz hat man also

$$N = m^2 \cdot mn - m^2 - mn,$$

bei der *hyperbolischen* Congruenz aber

$$N = (m + n)^2 \cdot 2mn - (m + n)^2 - 2mn.$$


---

## DIE PARABOLISCHE CONGRUENZ

$$w'^n = c^{n-m} w^m$$


---

Der *Bündelgrad* ist  $m^2$ .

Von den  $m^2$  nach einem *reellen* Punkte zielenden Strahlen sind nur  $m$  *reell*.

Der *Feldgrad* ist  $mn$ .

Der *Axengrad* ist  $N = mn \cdot m^2 - mn - m^2$ .

Die *Fokalfläche* besteht aus zwei Cylindern  $F_1$  und  $F_2$ , deren Spitzen in den *Kreispunkten* der Abbildungsebenen  $[w]$  und  $[w']$  liegen.

Von diesen Cylindern ist sowohl der *Grad* wie die *Klasse*  $m$ .

Die Congruenzstrahlen sind die gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Fokalcylinder  $F_1$  und  $F_2$ .

Die Fokalcylinder haben mit der Ebene  $[w]$   $m$  mal die unendlich ferne Gerade gemein. Es ist diese unendlich ferne Gerade eine  $n$ -fache Kante der beiden Cylinder, die also  $mn$  mal die unendlich ferne Gerade gemein haben.

Von den isotropen Geraden durch den Nullpunkt  $O'$  von  $[w']$  ist jede eine  $(m - n)$ -fache Kante auf einem der beiden Cylinder. Die Fokalcylinder haben in  $O'$   $m$  Punkte mit der Gerade  $OO'$  gemein.

Die Fokalcylinder durchbohren sich noch in  $m - n$  Plankurven vom Grade  $m$  und von der Klasse  $m$ , welche in den  $m - n$  Ebenen  $\varepsilon_{\tau_{m-n}}$  liegen; zu diesen Ebenen gehört immer die Ebene der reellen Axen.

*Singuläre Ebenen* sind:

1° jede Ebene, welche einen Congruenzstrahl mit einem der Kreispunkte verbindet; sie enthält ein Strahlengebilde von der Klasse  $m$ ;

2° jede der Ebenen  $\varepsilon_{\tau_{m-n}}$  mit einem Strahlengebilde von der Klasse  $m$ ;

## DIE HYPERBOLISCHE CONGRUENZ

$$w'^n w^m = c^{m+n}.$$


---

Der *Bündelgrad* ist  $(m + n)^2$ .

Von den  $(m + n)^2$  sich in einem *reellen* Punkte treffenden Strahlen sind nur  $m + n$  reell.

Der *Feldgrad* ist  $2mn$ .

Der *Axengrad* ist  $N = 2mn \cdot (m + n)^2 - 2mn - (m + n)^2$ .

Die *Fokalfläche* ist aus zwei Cylindern  $F_1$  und  $F_2$  zusammengesetzt, deren Spitzen sich in den *Kreispunkten* der Ebenen  $[w]$  und  $[w']$  befinden.

Von diesen Cylindern ist sowohl der *Grad* wie die *Klasse*  $m + n$ .

Die Congruenzstrahlen sind die gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Fokalcyliner  $F_1$  und  $F_2$ .

Von den durch den Nullpunkt  $O'$  von  $[w']$  gehenden isotropen Geraden ist jede eine  $m$ -fache Kante auf einem der beiden Cylinder. Von den durch den Nullpunkt  $O$  von  $[w]$  verlaufenden isotropen Geraden ist jede eine  $n$ -fache Kante auf einem der beiden Cylinder.

Die durch die Gerade  $OO'$  gelegten isotropen Ebenen haben mit den Fokalcylinndern bez.  $(m + n)$  mal die isotropen Geraden durch  $O$  und  $(m + n)$  mal die isotropen Geraden durch  $O'$  gemein.

Die Fokalcyliner schneiden sich in  $m + n$  Plankurven, deren *Grad* und *Klasse*  $m + n$  ist, und welche sich in den  $m + n$  Ebenen  $\varepsilon_{\tau_{m+n}}$  befinden; zu diesen Ebenen gehört stets die Ebene der reellen Axen.

*Singuläre Ebenen* sind:

1° jede Ebene, welche einen Congruenzstrahl mit einem der Kreispunkte verbindet; sie enthält ein Strahlengebilde von der Klasse  $m + n$ ;

2° jede der Ebenen  $\varepsilon_{\tau_{m+n}}$  mit einem Strahlengebilde von der Klasse  $m + n$ ;

3° die Abbildungsebene  $[w]$  mit  $n(m-n)$ -fachen Strahlenbüscheln in den beiden Kreispunkten und  $(m-n)$ -fachen Strahlenbüscheln in jedem der  $m-n$  Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$ , wo die Ebenen  $\varepsilon_{\tau_{m-n}}$  die unendlich ferne Gerade treffen.

*Singuläre Punkte* sind:

1° die Kreispunkte in den Abbildungsebenen mit  $n(m-n)$ -fachen Strahlenbüscheln in der Ebene  $[w]$ ;

2° die  $m-n$  unendlich fernen Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$  mit  $(m-n)$ -fachen Strahlenbüscheln in der Ebene  $[w]$ .

Die *axiale Regelfläche* einer durchaus *willkürlichen Gerade*  $l$ .

Der *Grad* ist  $m(m+n)$ .

Die Gerade  $l$  ist eine  $m^2$ -fache Gerade.

Die Kreispunkte in  $[w]$  und  $[w']$  sind  $mn$ -fache Punkte; ihre Tangentenkegel sind völlig in Ebenen zerfallen. In jedem der Kreispunkte sind von den  $mn$  Berührungsebenen je  $m$  in einer der Ebenen (45a), bez. (46a) (siehe S. 211) vereinigt.

Die  $m-n$  Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$  sind alle  $n$ -fache Punkte; die Tangenten befinden sich in  $n$  Ebenen, welche alle in die Ebene  $[w]$  zusammengefallen sind.

Für die in  $E_{\tau_{m-n}}$  an der in  $[w]$  befindlichen Schnittkurve gelegten Tangenten verweisen wir auf diese Kurve.

3° die Abbildungsebene  $[w]$  mit  $mn$ -fachen Strahlenbüscheln in den beiden Kreispunkten und einem  $m^2$ -fachen Strahlenbüschel in dem Nullpunkte  $O$ ;

4° die Abbildungsebene  $[w]$  mit  $mn$ -fachen Strahlenbüscheln in den Kreispunkten und einem  $n^2$ -fachen Strahlenbüschel in dem Nullpunkte  $O'$ .

*Singuläre Punkte* sind:

1° die Kreispunkte der Abbildungsebenen mit  $mn$ -fachen Strahlenbüscheln in  $[w]$  und  $mn$ -fachen Strahlenbüscheln in  $[w']$ ;

2° der Nullpunkt  $O$  von  $[w]$  mit einem  $m^2$ -fachen Strahlenbüschel in  $[w]$ ;

3° der Nullpunkt  $O'$  von  $[w']$  mit einem  $n^2$ -fachen Strahlenbüschel in  $[w']$ .

Die *axiale Regelfläche* einer durchaus *willkürlichen Gerade*  $l$ .

Der Grad ist  $(m+n)^2 + 2mn$ .

Es ist  $l$  eine  $(m+n)^2$ -fache Gerade.

Die Kreispunkte in  $[w]$  und  $[w']$  sind  $2mn$ -fache Punkte; die Tangenten jedes dieser Punkte sind über  $2mn$  Ebenen verteilt, von denen  $mn$  zu je  $m$  in einer der  $n$  Ebenen (45*b*), bez. (46*b*) (siehe S. 232), und  $mn$  zu je  $n$  in einer der  $m$  Ebenen (45'*b*), bez. (46'*b*) vereinigt sind.

Der Nullpunkt  $O$  von  $[w]$  ist ein  $mn$ -facher Punkt, dessen sämtliche Tangenten sich in der Ebene  $[w]$  befinden.

Für die in  $O$  an die in  $[w]$  liegende Schnittkurve gelegten Tangenten verweisen wir auf die für diese Kurve erhaltenen Resultaten.

Der Nullpunkt  $O'$  von  $[w']$  ist ebenfalls ein  $mn$ -facher Punkt; alle Tangenten befinden sich in der Ebene  $[w']$ .

Für die in  $O'$  an die in  $[w']$  selbst liegende Kurve gelegten Tangenten verweisen wir auf hierunten.

Der unendlich ferne Punkt  $A_3$ , wo die durch  $O$  und  $l$  gelegte Ebene die unendlich ferne Gerade von  $[w]$  schneidet, ist, unter der Voraussetzung  $m > n$ , ein  $mn$ -facher Punkt, dessen Tangenten alle in  $[w]$  liegen, während der Schnitt in  $[w]$  selbst die Gerade  $OA_3$  enthält.

Der unendlich ferne Punkt  $B_4'$ , wo die durch  $O'$  und  $l$  gelegte Ebene die unendlich ferne Gerade von  $[w]$  trifft, ist, falls  $m > n$ , ein  $n^2$ -facher Punkt, dessen sämtliche Tangenten sich in der durch  $O'$  und  $l$  gelegten Ebene befinden.

Die Doppelkurve ist vom Grade  $N + \frac{mn(mn-1)}{2}$ , wenn  $N$  die Anzahl der Schnittpunkte mit  $l$ , also den Axengrad andeutet.

Der Schnitt der Regelfläche mit der Ebene  $[w]$  besteht aus einer Kurve vom Grade  $n(m+n)$ , aus den durch die Spur  $A$  von  $l$  in  $[w]$  gehenden isotropen Geraden, jede  $n(m-n)$ -fach gezählt, und schliesslich aus den  $m-n$  Geraden, welche  $A$  mit den Punkten  $E_{\tau_{m-n}}$  verbinden, jede  $(m-n)$ -fach gerechnet.

Die in  $[w]$  liegende Kurve hat

1° in den Kreispunkten  $n^2$ -fache Punkte, deren Tangenten alle nach  $A$  convergiren;

2° im Punkte  $A$  einen  $n^2$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $l$  auf  $[w]$  der  $n^2$  Bilder von  $A$  sind;

3° in den  $m-n$  Punkten  $E_{\tau_{m-n}}$   $n$ -fache Punkte, deren sämtliche Tangenten vereinigt sind in den  $m-n$  Geraden, welche diese Punkte mit dem auf  $OA$  liegenden Punkte  $T$  (32a) (S. 205) verbinden.

Der Schnitt der Regelfläche mit der Ebene  $[w']$  ist eine Kurve vom Grade  $m(m+n)$ .

Diese Kurve hat

1° in den Kreispunkten  $mn$ -fache Punkte, von deren Tangenten je  $m$  zusammengefallen sind in eine der  $n$  Geraden, welche diese Kreispunkte bez. mit den  $n^2$  Bildern von  $A$  verbinden;

2° im Schnittpunkte  $B'$  von  $l$  mit  $[w']$  einen  $m^2$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $l$  auf  $[w']$  der  $m^2$  in  $[w]$  liegenden Bilder von  $B'$  sind;

3° in den  $m-n$  Punkten  $E_{\tau_{m-n}}$   $n$ -fache Punkte, deren sämtliche Tangenten mit der unendlich fernen Gerade vereinigt sind; es hat diese Gerade in jedem Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$   $m$  Punkte mit der Kurve gemein.

Es liegen auf der Gerade  $OO'$  noch  $m+n$  durch (60b) (S. 236) bestimmte  $(m+n)$ -fache Punkte.

Die Doppelkurve ist vom Grade  $N + \frac{2mn(2mn-1)}{2}$ , wenn  $N$  die Anzahl der Schnittpunkte mit  $l$ , also den Axengrad anweist.

Der Schnitt der Regelfläche mit der Ebene  $[w]$  besteht aus einer Kurve vom Grade  $n(2m+n)$ , aus den durch die Spur  $A$  von  $l$  in  $[w]$  verlaufenden isotropen Geraden, jede  $mn$ -fach gezählt, und endlich aus der Gerade  $OA (= OA_3)$ ,  $m^2$ -fach gerechnet.

Die in  $[w]$  liegende Kurve hat

1° in den Kreispunkten  $mn$ -fache Punkte, von deren Tangenten je  $n$  in einer der  $m$  Geraden vereinigt sind, welche die Kreispunkte bez. mit den  $m^2$  Bildern  $B$  der Spur  $B'$  von  $l$  in  $[w']$  verbinden;

2° im Punkte  $A$  einen  $n^2$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $l$  auf  $[w]$  der  $n^2$  Bilder von  $A$  sind;

3° im Punkte  $O$  einen  $mn$ -fachen Punkt, von dessen Tangenten je  $n$  vereinigt sind in einem der  $m$  Bilder der Gerade, welche  $O'$  mit dem unendlich fernen Punkte  $A_3$  verbindet;

4° im unendlich fernen Punkte  $B_4'$  einen  $n^2$ -fachen Punkt, dessen sämtliche Tangenten in  $A$  convergiren; die Gerade  $AB_4'$  hat in  $B_4'$   $mn$  Punkte mit der Kurve gemein (vorausgesetzt:  $m > n$ ).

Der Schnitt der Regelfläche mit der Ebene  $[w']$  besteht aus einer Kurve vom Grade  $m(m+2n)$ , aus den durch die Spur  $B'$  von  $l$  in  $[w']$  gehenden isotropen Geraden, jede  $mn$ -fach gezählt und schliesslich aus der Gerade  $O'B' (\equiv O'B_4')$ ,  $n^2$ -fach gerechnet.

Die in  $[w']$  befindliche Kurve hat

1° in den Kreispunkten  $mn$ -fache Punkte, von deren Tangenten je  $m$  vereinigt sind in einer der  $n$  Geraden, welche die Kreispunkte bez. mit den  $n^2$  Bildern  $A'$  der Spur  $A$  von  $l$  in  $[w]$  verbinden;

2° im Punkte  $B'$  einen  $m^2$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $l$  auf  $[w']$  der  $m^2$  in  $[w]$  liegenden Bilder von  $B'$  sind;

3° im Punkte  $O'$  einen  $mn$ -fachen Punkt, von dessen Tangenten je  $m$  zusammengefallen sind in ein der  $n$  Bilder der Gerade, welche  $O'$  mit dem unendlich fernen Punkte  $B_4'$  verbindet;

4° im Punkte  $A_3$  einen  $mn$ -fachen Punkt, dessen sämtliche Tangenten in der unendlich fernen Gerade vereinigt sind; es hat diese Gerade in  $A_3$   $m^2$  Punkte mit der Kurve gemein (vorausgesetzt ist  $m > n$ ).

Der Schnitt der Regelfläche mit einer zu den *Abbildungsebenen* parallelen Ebene  $\omega_\mu$  ist vom Grade  $m(m+n)$  und hat

1° in den Kreispunkten  $mn$ -fache Punkte, deren Tangenten die Spuren in  $\omega_\mu$  der Berührungsebenen der Kreispunkte sind;

2° im Schnittpunkte  $C_\mu$  von  $\omega_\mu$  mit  $l$  einen  $m^2$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $l$  auf  $\omega_\mu$  der  $m^2$  nach  $C_\mu$  zielenden Congruenzstrahlen sind;

3° in den  $m-n$  Punkten  $E_{\tau_{m-n}}$   $n$ -fache Punkte, deren Tangenten alle in der unendlich fernen Gerade vereinigt sind (Ausnahme in  $[w]$ );

4° Doppelpunkte in den Schnittpunkten von  $\omega_\mu$  mit der Doppelkurve.

Die *axiale Regelfläche* einer Gerade  $l$ , welche  $OO'$  schneidet.

Ausser den Eigenschaften, welche die Regelfläche der willkürlichen Gerade  $l$  aufzuweisen hat, können wir noch Folgendes erwähnen:

Die Gerade  $OO'$  ist auf der Regelfläche eine  $n^2$ -fache Gerade, deren sämtliche Berührungsebenen vereinigt sind in der Ebene, welche  $OO'$  mit  $l$  verbindet.

Für die in  $O'$  an die in  $[w']$  liegende Kurve gelegten Tangente verweisen wir auf hierunten.

Die in  $[w]$  befindliche Kurve hat ausserdem

in  $O$  einen  $n^2$ -fachen Punkt, dessen Tangenten alle in  $OA$  vereinigt sind; diese Gerade hat in  $O$   $mn$  Punkte mit der Kurve gemein.

Die in  $[w']$  liegende Kurve hat noch

in  $O'$  einen  $mn$ -fachen Punkt, von dessen Tangenten je  $m$  vereinigt sind in einem der  $n$  Bilder von  $OA$ . Jede dieser Tangenten hat in  $O'$   $m^2$  Punkte mit der Kurve gemein.

Der Schnitt in einer zu den *Abbildungsebenen* parallelen Ebene  $\omega_\mu$  hat im Schnittpunkte  $X_\mu$  von  $\omega_\mu$  mit  $OO'$  einen  $n^2$ -fachen Punkt, dessen Tangenten alle in  $X_\mu C_\mu$  vereinigt sind (Ausnahme in  $[w']$ ).



Der Schnitt der Regelfläche mit einer *zu den Abbildungsebenen parallelen* Ebene  $\omega_\mu$  ist vom Grade  $(m+n)^2 + 2mn$  und hat

1° in den Kreispunkten  $2mn$ -fache Punkte, deren Tangenten die Schnittlinien von  $\omega_\mu$  mit den Berührungsebenen der Kreispunkte sind;

2° im Schnittpunkte  $C_\mu$  von  $\omega_\mu$  mit  $l$  einen  $(m+n)^2$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $l$  auf  $\omega_\mu$  der  $(m+n)^2$  sich in  $C_\mu$  treffenden Congruenzstrahlen sind;

3° im Punkte  $A_3$  einen  $mn$ -fachen Punkt, dessen sämtliche Tangenten in der unendlich fernen Gerade vereinigt sind (vorausgesetzt ist  $m > n$ ; Ausnahme in  $[w]$ );

4° im Punkte  $B_4'$  einen  $n^2$ -fachen Punkt, dessen Tangenten alle zusammengefallen sind in die Schnittlinie von  $\omega_\mu$  mit der durch  $O'$  und  $l$  gelegten Ebene (vorausgesetzt ist  $m > n$ );

5° Doppelpunkte in den Schnittpunkten von  $\omega_\mu$  mit der Doppelkurve.

Wenn  $\omega_\mu$  mit einer der  $m+n$  durch (60b) (S 236) bestimmten Ebenen zusammenfällt, so hat die Schnittkurve noch einen  $(m+n)$ -fachen Punkt in der Spur  $X_\mu$  von  $OO'$  in  $\omega_\mu$ .

Die *axiale Regelfläche* einer Gerade  $l$ , welche  $OO'$  schneidet.

Neben den Eigenschaften der Regelfläche der willkürlichen Gerade lässt sich noch Folgendes bemerken:

Der Punkt  $A_3 \equiv B_4'$  ist ein  $n(m+n)$ -facher Punkt. Von den  $mn+n^2$  Berührungsebenen, in welche der Tangentenkegel ausgeartet ist, fallen  $mn$  mit der Ebene  $[w]$  und  $n^2$  mit der durch  $OO'$  und  $l$  gelegten Ebene zusammen.

Die unendlich ferne Gerade hat in  $A_3 \equiv B_4'$  mit der Fläche  $m^2+n^2$  Punkte gemein.

Die  $m+n$   $(m+n)$ -fachen Punkte auf  $OO'$  sind jetzt in dem  $(m+n)^2$ -fachen Schnittpunkte  $S$  von  $l$  mit  $OO'$  vereinigt.

Die in  $[w]$  liegende Kurve hat jetzt

in  $A_3 \equiv B_4'$  einen  $n^2$ -fachen Punkt, dessen sämtliche Tangenten in  $AA_3 \equiv AB_4'$  zusammengefallen sind; diese Gerade hat in  $A_3 \equiv B_4'$  mit der Kurve  $mn$  Punkte gemein.

Die in  $[w']$  befindliche Kurve hat nun

in  $A_3 \equiv B_4'$  einen  $mn$ -fachen Punkt, dessen Tangenten alle in der unendlich fernen Gerade vereinigt sind; diese Gerade hat in  $A_3 \equiv B_4'$   $mn$  Punkte mit der Kurve gemein.

Der Schnitt in einer *zu den Abbildungsebenen parallelen* Ebene  $\omega_\mu$  hat in  $A_3 \equiv B_4'$  einen  $n(m+n)$ -fachen Punkt, von dessen Tangenten  $mn$  in der unendlich fernen Gerade vereinigt sind und  $n^2$

Die *axiale Regelfläche* einer durch  $O$  gehenden Gerade  $l$ .

Wir haben hier die folgenden Eigentümlichkeiten zu erwähnen:

Die Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$  sind jetzt  $n$ -fache Punkte auf der Fläche.

Die Tangenten befinden sich alle in den Ebenen, welche die Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$  mit der Gerade  $t$  (95a) (S. 251) verbinden.

Die in  $[w]$  liegende Kurve hat nun

in  $O$  einen  $n^2$ -fachen Punkt, dessen sämtliche Tangenten mit der Spur der durch  $l$  und  $OO'$  gelegten Ebene in  $[w]$  zusammengefallen sind.

Die in  $[w']$  befindliche Kurve ist in eine  $m$ -fache Kurve vom Grade  $m + n$  ausgeartet. Diese hat

1° in den Kreispunkten  $n$ -fache Punkte, deren Tangenten alle in den durch  $O'$  gehenden isotropen Geraden vereinigt sind;

2° im Punkte  $B'$  einen  $m$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $l$  auf  $[w']$  der  $m$  Geraden  $OB$  sind, welche  $O$  mit den in  $[w]$  liegenden Bildern von  $B'$  verbinden;

3° in den Punkten  $E_{\tau_{m-n}}$  *gewöhnliche* Punkte, deren Tangenten convergiren in den Punkt  $T_0$  (95a) (S. 251);

4° im Punkte  $O'$  einen  $n$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die Bilder der Gerade  $OB_4'$  sind.

Der Schnitt mit einer zu den *Abbildungsebenen* parallelen Ebene  $\omega_\mu$  hat in den Punkten  $E_{\tau_{m-n}}$   $n$ -fache Punkte, deren sämtliche Tangenten mit den Spuren der Ebenen ( $E_{\tau_{m-n}}$ ,  $t$ ) in  $\omega_\mu$  zusammengefallen sind.

Übrigens sind keine Abweichungen vom vorhergehenden Falle zu erwähnen.

Die *axiale Regelfläche* einer durch  $O'$  gehenden Gerade  $l$ .

Der einzige Unterschied mit der Regelfläche einer willkürlichen,  $OO'$  schneidenden Gerade ist, dass die in  $[w]$  liegende Schnittkurve jetzt in eine  $n$ -fache Kurve vom Grade  $m + n$  zerfallen ist.

mit der Gerade, welche  $A_3 \equiv B'_4$  mit dem Schnittpunkte  $C_\mu$  von  $\omega_\mu$  mit  $l$  verbindet (Ausnahme in  $[w]$ ).

Die *axiale Regelfläche* einer *durch  $O$  gehenden Gerade  $l$* .

Von der allgemeinen Regelfläche wird jetzt die Abbildungsebene  $[w]$   $mn$  mal abgetrennt. Es erübrigt eine Fläche vom Grade  $(m+n)^2 + mn$ .

Die Gerade  $OO'$  schneidet nun die Fläche  $(m+n)^2$  mal in  $O$  und  $mn$  mal in  $O'$ .

Die Kreispunkte sind jetzt  $mn$ -fache Punkte; ihre Berührungsebenen sind zu je  $n$  zusammengefallen.

Die in  $[w]$  liegende Kurve hat nun

in  $O$  einen  $n(m+n)$ -fachen Punkt, von dessen Tangenten je  $n$  vereinigt sind in einer der  $m+n$  Geraden welche  $O$  mit den  $m+n$  Punkten  $E_{\tau_{m+n}}$  verbinden.

Die in  $[w']$  befindliche Kurve ist in eine  $m$ -fache Kurve vom Grade  $m+n$  zerfallen.

Diese Kurve enthält jetzt *nicht* die Kreispunkte, wohl aber die  $m+n$  Punkte  $E_{\tau_{m+n}}$ ; die Tangenten dieser Punkte convergiren alle nach dem Punkte  $T'_0$  (95b) (S. 255).

Die Kurve hat ferner

1° in  $B'$  einen  $m$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $l$  auf  $[w']$  sind der  $m^2$  (zu je  $m$  mit  $O$  geradlinig liegenden) in  $[w]$  befindlichen Bilder von  $B'$ ;

2° in  $O'$  einen  $n$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die  $n$  Bilder der Gerade  $OB'_4$  sind.

Der Schnitt mit einer *zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene*  $\omega_\mu$  ist eine Kurve vom Grade  $(m+n)^2 + mn$  und hat in den Kreispunkten  $mn$ -fache Punkte, deren Tangenten zu je  $n$  zusammengefallen sind.

Im Übrigen haben wir, im Vergleich mit dem vorhergehenden Falle, in Bezug auf die Singularitäten keine Abweichungen zu constatiren.

Die *axiale Regelfläche* einer *durch  $O'$  gehenden Gerade  $l$* .

Die Ebene  $[w']$  wird jetzt  $mn$  mal abgesondert. Es erübrigt somit eine Fläche vom Grade  $(m+n)^2 + mn$ .

Die Gerade  $OO'$  schneidet die Fläche  $(m+n)^2$  mal in  $O'$  und  $mn$  mal in  $O$ .

Die Kreispunkte sind nun  $mn$ -fache Punkte; die  $mn$  Berührungsebenen sind zu je  $m$  in  $n$  Ebenen zusammengefallen.

Diese Kurve hat

1° in den Kreispunkten  $n$ -fache Punkte, deren Tangenten alle durch  $A$  hindurchgehen;

2° im Punkte  $A$  einen  $n$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $l$  auf  $[w]$  der  $n$  Geraden  $O'A'$  sind;

3° in den  $m - n$  Punkten  $E_{\tau_{m-n}}$  *gewöhnliche* Punkte, deren Tangenten alle in  $T'$  (32a) (S. 205) convergiren;

4° im Punkte  $O$  einen  $m$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die  $m$  Bilder von  $O'A_3$  sind.

Die in  $[w']$  liegende Kurve hat

in  $O'$  einen  $m^2$ -fachen Punkt, dessen sämtliche Tangenten in  $O'A_3$  vereinigt sind.

Die *axiale Regelfläche* einer zu den Abbildungsebenen parallelen Gerade  $l_\mu$ .

Diese Regelfläche enthält die unendlich ferne Gerade der Abbildungsebenen als eine  $mn$ -fache Gerade, deren Berührungsebenen alle in  $[w]$  vereinigt sind.

Der Schnitt in  $[w]$  besteht aus der  $m^2$ -fachen unendlich fernen Gerade und aus einer Kurve vom Grade  $mn$ .

Diese Kurve schneidet die unendlich ferne Gerade  $n$  mal in jedem der  $m$  Bilder des unendlich fernen Punktes  $L_\mu$  auf  $l_\mu$ , als ein Punkt von  $[w']$  betrachtet.

Die in  $[w']$  befindliche Kurve ist aus  $mn$  mal der unendlich fernen Gerade und aus einer Kurve vom Grade  $m^2$  zusammengesetzt.

Diese Kurve hat mit der unendlich fernen Gerade nur den Punkt  $L_\mu$  gemein. Dieser Punkt  $L_\mu$  ist ein  $m(m - n)$ -facher; sämt-

Die in  $[w]$  befindliche Kurve ist in eine  $n$ -fache Kurve vom Grade  $m + n$  ausgeartet. Die Eigenschaften dieser Kurve entsprechen völlig denjenigen der  $m$ -fachen in  $[w']$  liegenden Kurve vom vorigen Falle.

Die in  $[w']$  liegende Kurve hat nun in  $O'$  einen  $m(m + n)$ -fachen Punkt.

Sie entspricht übrigens der in  $[w]$  befindlichen Kurve des vorigen Falles.

Die *axiale Regelfläche* einer zu den Abbildungsebenen parallelen Gerade  $l_\mu$ .

Diese Regelfläche hat in den Kreispunkten  $2mn$ -fache Punkte, von denen  $mn$  Berührungsebenen mit  $[w]$  und die  $mn$  übrigen mit  $[w']$  zusammengefallen sind.

Der unendlich ferne Punkt  $L_\mu$  auf  $l_\mu$  ist ein  $(m + n)^2$ -facher Punkt, von dem  $m^2$  Berührungsebenen in der Ebene  $(O, l_\mu)$ ,  $n^2$  in der Ebene  $(O', l_\mu)$  und  $2mn$  in der zu den Abbildungsebenen parallelen, die Gerade  $l_\mu$  enthaltenden Ebene  $\omega_\mu$  vereinigt sind.

Übrigens hat man keinen Unterschied mit dem allgemeinen Falle aufzuweisen.

Die in  $[w]$  liegende Kurve hat

1° in den Kreispunkten  $mn$ -fache Punkte, deren Tangenten alle in die durch  $O$  gehenden isotropen Geraden zusammengefallen sind; diese isotropen Asymptoten haben in den Kreispunkten  $n(m + n)$  Punkte mit der Kurve gemein;

2° im Punkte  $L_\mu$  einen  $n^2$ -fachen Punkt, dessen Tangenten alle in der Projektion von  $l_\mu$  aus  $O'$  auf  $[w]$  vereinigt sind; diese Tangente hat in  $L_\mu$   $n(m + n)$  Punkte mit der Kurve gemein;

3° im Punkte  $O$  einen  $mn$ -fachen Punkt, von dessen Tangenten je  $n$  in ein der  $m$  Bilder von  $O'L_\mu$  zusammengefallen sind.

Die Kurve wird zum vollständigen Schnitte ergänzt durch  $2mn$  mal die unendlich ferne Gerade und  $m^2$  mal die Gerade  $OL_\mu$ .

Die in  $[w']$  befindliche Kurve hat

1° in den Kreispunkten  $mn$ -fache Punkte, deren Tangenten alle in die durch  $O'$  verlaufenden isotropen Geraden zusammengefallen sind; diese isotropen Asymptoten haben in den Kreispunkten  $m(m + n)$  Punkte mit der Kurve gemein;

liche Tangenten sind mit der unendlich fernen Gerade zusammengefallen, welche in  $L_\mu$  mit der Kurve  $m^2$  Punkte gemein hat.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega$ , besteht aus der unendlich fernen Gerade und aus einer Kurve vom Grade  $m^2$ , welche in  $L_\mu$  einen  $m(m-n)$ -fachen Punkt hat; sämtliche Tangenten von  $L_\mu$  sind in der unendlich fernen Gerade vereinigt, welche in  $L_\mu$   $m^2$  Punkte mit der Kurve gemein hat (Ausnahme in  $[w]$ ).

Die *axiale Regelfläche* einer durch einen der Kreispunkte gehenden Gerade.

Diese Regelfläche ist ausgeartet in  $mn$  mal die Abbildungsebene  $[w]$  und  $m$  mal die  $m$  Berührungsebenen, welche durch die gegebene Gerade an den zu ihr parallelen Fokalcyllinder gelegt werden können (siehe (103a), S. 262).

Die *axiale Regelfläche* einer in der Abbildungsebene  $[w']$  liegenden Gerade.

Es ist diese Gerade ein besonderer Fall von  $l_\mu$ , nl  $l_0$ .

Die Kurve in  $[w]$  ist jetzt die *Bildkurve* der in  $[w']$  gegebenen Gerade.

Die in  $[w']$  liegende Kurve ist in die  $m^2$ -fache gegebene Gerade ausgeartet.

Die *axiale Regelfläche* einer zu den Abbildungsebenen parallelen Gerade  $l_\mu$ , welche die Gerade  $OO'$  schneidet.

Ausser den Eigenschaften der allgemeinen Regelfläche, lässt sich Folgendes erwähnen:

Die Gerade  $OO'$  ist auf der Fläche eine  $n^2$ -fache, deren sämtliche Berührungsebenen in der durch  $OO'$  und  $l_\mu$  gelegten Ebene vereinigt sind (Ausnahme in  $[w]$ ).

Die Regelfläche enthält noch die unendlich ferne Gerade der Abbildungsebenen als eine  $mn$ -fache Gerade, deren Berührungsebenen alle in  $[w]$  zusammengefallen sind.

Der Schnitt in  $[w]$  besteht aus  $2mn$  mal der unendlich fernen

2° im Punkte  $L_\mu$  einen  $m^2$ -fachen Punkt, dessen Tangenten alle in der Projektion von  $l_\mu$  aus  $O$  auf  $[w']$  vereinigt sind; diese Tangente hat in  $L_\mu$   $m(m+n)$  Punkte mit der Kurve gemein;

3° im Punkte  $O'$  einen  $mn$ -fachen Punkt, von dessen Tangenten je  $m$  in ein der  $n$  Bilder von  $OL_\mu$  zusammengefallen sind.

Die Kurve wird zum Gesamtschnitte ergänzt durch  $2mn$  mal die unendlich ferne Gerade und  $n^2$  mal die Gerade  $O'L_\mu$ .

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_v$  hat in  $L_\mu$  einen  $(m+n)^2$ -fachen Punkt; von den  $m^2 + 2mn + n^2$  Tangenten in  $L_\mu$  fallen  $m^2$  mit der Spur der Ebene  $(O, l_\mu)$  in  $\omega_v$ ,  $n^2$  mit der Spur der Ebene  $(O', l_\mu)$  in  $\omega_v$  und  $2mn$  mit der unendlich fernen Gerade zusammen.

Die *axiale Regelfläche* einer durch einen der Kreispunkte gehenden Gerade.

Diese Regelfläche ist zusammengesetzt aus  $mn$  mal der Ebene  $[w]$ ,  $mn$  mal der Ebene  $[w']$  und  $(m+n)$ -mal den  $m+n$  Berührungsebenen, welche durch die gegebene Gerade an dem zu ihr parallelen Fokalcyylinder zu legen sind (siehe (103b), S. 267).

Die *axiale Regelfläche* einer in der Abbildungsebene  $[w']$  liegenden Gerade.

Weil die Abbildungsebene  $[w']$  in dieser Congruenz singulär ist, so wird die axiale Regelfläche zerfallen. Wir wollen daher die Untersuchung verschieben.

Die *axiale Regelfläche* einer zu den Abbildungsebenen parallelen Gerade  $l_\mu$ , welche die Gerade  $OO'$  schneidet.

Die Regelfläche hat, ausser den allgemeinen Eigenschaften, noch diese, dass von den  $2mn$  Berührungsebenen der Kreispunkte  $mn$  in  $[w]$  und  $mn$  in  $[w']$  fallen.

Es ist  $L_\mu$  ein  $(m+n)^2$ -facher Punkt;  $m^2 + n^2$  Berührungsebenen sind in der durch  $l_\mu$  und  $OO'$  gelegten Ebene vereinigt,  $2mn$  in der zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$ , welche die Gerade  $l_\mu$  enthält.

Die  $m+n$   $(m+n)$ -fachen Punkte auf  $OO'$  sind wiederum im  $(m+n)^2$ -fachen Schnittpunkte  $S$  von  $l_\mu$  mit  $OO'$  vereinigt.

Der Schnitt in  $[w]$  besteht aus der  $m^2$ -fachen unendlich fernen

Gerade und aus einer Kurve vom Grade  $mn$ , welche die unendlich ferne Gerade  $n$  mal in jedem der  $m$  Bilder von  $L_\mu$  (als Punkt von  $[w']$  betrachtet) schneidet.

Die Kurve hat weiter in  $O$  einen  $n^2$ -fachen Punkt, dessen Tangenten alle in  $OL_\mu$  vereinigt sind; diese Gerade hat in  $O$   $mn$  Punkte mit der Kurve gemein.

Der Schnitt in  $[w']$  ist aus der  $mn$ -fachen unendlich fernen Gerade und aus einer Kurve vom Grade  $m^2$  zusammengesetzt. Letztere hat

in  $L_\mu$  einen  $m(m-n)$ -fachen Punkt, dessen Tangenten alle in der unendlich fernen Gerade vereinigt sind; diese hat in  $L_\mu$   $m^2$  Punkte mit der Kurve gemein.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_v$  besteht aus der  $mn$ -fachen unendlich fernen Gerade und aus einer Kurve vom Grade  $m^2$ , die in  $L_\mu$  einen  $m(m-n)$ -fachen Punkt hat; sämtliche Tangenten von  $L_\mu$  sind in der unendlich fernen Gerade vereinigt, welche in  $L_\mu$   $m^2$  Punkte mit der Kurve gemein hat (Ausnahme in  $[w]$ ).

Der Schnittpunkt  $X_v$  der Ebene  $\omega_v$  mit  $OO'$  ist ein  $n^2$ -facher Punkt, dessen sämtliche Tangenten mit der Gerade  $X_v L_\mu$  zusammengefallen sind (Ausnahme in  $[w']$ ).

Die axiale Regelfläche einer in der Ebene  $\varepsilon$  der reellen Axen liegenden Gerade  $l$ .

Die allgemeine Regelfläche ist zerfallen in die  $m$ -fache Ebene  $\varepsilon$  und eine Restfläche vom Grade  $m(m+n-1)$ .

Es ist  $l$  auf der Restfläche eine  $m(m-1)$ -fache Gerade.

Die Kreispunkte sind  $mn$ -fache Punkte; von ihren  $mn$  Berührungsebenen sind je  $m$  in  $n$  Ebenen ((113a), bez. (114a), S. 271, 272) vereinigt.



Gerade, aus  $m^2$  mal der Gerade  $OL_\mu$  und aus einer Kurve vom Grade  $n(2m+n)$ . Diese hat

1° in den Kreispunkten  $mn$ -fache Punkte, deren Tangenten alle in den durch  $O$  gehenden isotropen Geraden vereinigt sind; diese isotropen Asymptoten haben in den Kreispunkten  $n(m+n)$  Punkte mit der Kurve gemein;

2° im Punkte  $L_\mu$  einen  $n^2$ -fachen Punkt, dessen sämtliche Tangenten in  $OL_\mu$  zusammengefallen sind; diese Tangente hat in  $L_\mu$   $n(m+n)$  Punkte mit der Kurve gemein;

3° im Punkte  $O$  einen  $mn$ -fachen Punkt, von dessen Tangenten je  $n$  in einem der  $m$  Bilder von  $O'L_\mu$  vereinigt sind.

Der Schnitt in  $[w']$  besteht aus  $2mn$  mal der unendlich fernen Gerade, aus  $n^2$  mal der Gerade  $O'L_\mu$  und aus einer Kurve vom Grade  $m(m+2n)$ . Letztere hat

1° in den Kreispunkten  $mn$ -fache Punkte, deren Tangenten alle in den durch  $O'$  gelegten isotropen Geraden vereinigt sind; diese isotropen Asymptoten haben in den Kreispunkten  $n(m+n)$  Punkte mit der Kurve gemein;

2° im Punkte  $L_\mu$  einen  $m^2$ -fachen Punkt, deren Tangenten alle in  $O'L_\mu$  zusammengefallen sind; diese Gerade hat in  $L_\mu$   $m(m+n)$  Punkte mit der Kurve gemein;

3° in  $O'$  einen  $mn$ -fachen Punkt, von dessen Tangenten je  $m$  in einem der  $n$  Bilder von  $OL_\mu$  vereinigt sind.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_v$  hat in  $L_\mu$  einen  $(m+n)^2$ -fachen Punkt. Von den  $m^2+2mn+n^2$  Tangenten in  $L_\mu$  fallen  $m^2+n^2$  mit  $X_v L_\mu$  und  $2mn$  mit der unendlich fernen Gerade zusammen.

Die axiale Regelfläche einer in der Ebene  $\varepsilon$  der reellen Axen liegenden Gerade  $l$ .

Die allgemeine Regelfläche ist in die  $(m+n)$ -fache Ebene  $\varepsilon$  und eine Restfläche vom Grade  $(m+n)(m+n-1)+2mn$  ausgeartet.

Es ist  $l$  auf der Restfläche eine  $(m+n)(m+n-1)$ -fache Gerade.

Die Kreispunkte sind  $2mn$ -fache Punkte. Von den  $2mn$  Berührungsebenen sind  $mn$  zu je  $m$  in  $n$  Ebenen ((113*b*), bez. (114*b*), S. 284) und  $mn$  zu je  $n$  in  $m$  Ebenen ((113'*b*), bez. (114'*b*), S. 284) vereinigt.

Die  $m - n - 1$  Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$  ( $\tau_{m-n} \neq 1$ ) sind  $n$ -fache, deren Berührungsebenen mit  $[w]$  zusammengefallen sind.

Die Gerade  $OO'$  ist eine  $n(n-1)$ -fache, deren sämtliche Berührungsebenen in  $\varepsilon$  vereinigt sind (Ausnahme in  $[w']$ ).

Der Schnittpunkt  $S$  von  $l$  mit  $OO'$  ist ein  $m(m-1)$ -facher Punkt.

Der Schnitt in  $[w]$  besteht aus den zwei  $n(m-n)$ -fachen durch die Spur  $A$  von  $l$  in  $[w]$  gelegten isotropen Geraden, aus den  $m-n-1$   $(m-n)$ -fachen Geraden  $AE_{\tau_{m-n}}$  ( $\tau_{m-n} \neq 1$ ) und aus einer Kurve vom Grade  $n(m+n-1)$ . Diese hat

1° in den Kreispunkten  $n^2$ -fache Punkte, deren Tangenten alle nach  $A$  convergiren;

2° in  $A$  einen  $n(n-1)$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $l$  auf  $[w]$  der  $n(n-1)$  ausserhalb  $\varepsilon$  liegenden Bilder  $A'$  von  $A$  sind;

3° in den  $m-n-1$  Punkten  $E_{\tau_{m-n}}$  ( $\tau_{m-n} \neq 1$ )  $n$ -fache Punkte, deren Tangenten zusammenfallen mit den  $m-n-1$  Geraden, welche diese Punkte mit dem auf  $A$  liegenden Punkte  $T$  ((32a), S. 205) verbinden;

der Punkt  $E$  gehört jetzt der Kurve *nicht* an;

4° im Punkte  $O$  einen  $n(n-1)$ -fachen Punkt, dessen Tangenten alle in der reellen Axe vereinigt sind.

Der Schnitt in  $[w']$  ist eine Kurve vom Grade  $m(m+n-1)$ . Sie hat

1° in den Kreispunkten  $mn$ -fache Punkte, von deren Tangenten je  $m$  vereinigt sind in den  $n$  Geraden, welche die Kreispunkte bez. mit den  $n^2$  Bildern von  $A$  verbinden;

2° im Schnittpunkte  $B'$  von  $[w']$  mit  $l$  einen  $m(m-1)$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $l$  auf  $[w']$  der  $m(m-1)$  ausserhalb  $\varepsilon$  liegenden Bilder  $B$  von  $B'$  sind;

3° im Punkte  $O'$  einen  $m(n-1)$ -fachen Punkt, von dessen Tangenten je  $m$  mit einem der  $n-1$  ausserhalb  $\varepsilon$  liegenden Bilder der zu  $[w]$  gehörenden reellen Axe vereinigt sind;

4° in den Punkten  $E_{\tau_{m-n}}$  ( $\tau_{m-n} \neq 1$ )  $n$ -fache Punkte, deren

Der Punkt  $O$  ist ein  $n(m-1)$ -facher, dessen Berührungsebenen alle in  $[w]$  vereinigt sind.

Es ist  $O'$  ein  $m(n-1)$ -facher Punkt, dessen Tangenten sich alle in  $[w']$  befinden.

Der Punkt  $E$  ist ein  $(m+n)(n-1)$ -facher; von seinen Berührungsebenen liegen  $m(n-1)$  in  $[w]$  und  $n(n-1)$  in  $\varepsilon$  vereinigt.

Der Schnittpunkt  $S$  von  $l$  mit  $OO'$  ist ein  $(m+n)(m+n-1)$ -facher Punkt.

Der Schnitt in  $[w]$  besteht aus den zwei  $mn$ -fachen durch die Spur  $A$  von  $l$  in  $[w]$  gelegten isotropen Geraden, aus der  $m(m-1)$ -fachen reellen Axe und aus einer Kurve vom Grade  $n(2m+n-1)$ . Diese hat

1° in den Kreispunkten  $mn$ -fache Punkte, von deren Tangenten je  $n$  vereinigt sind in einer der  $m$  Geraden, welche die Kreispunkte bez. mit den  $m^2$  Bildern  $B$  der Spur  $B'$  von  $l$  in  $[w]$  verbinden;

2° in  $A$  einen  $n(n-1)$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $l$  auf  $[w]$  der  $n(n-1)$  ausserhalb  $\varepsilon$  liegenden Bilder  $A'$  von  $A$  sind;

3° in  $O$  einen  $n(m-1)$ -fachen Punkt, von dessen Tangenten je  $n$  in einem der  $m-1$  ausserhalb  $\varepsilon$  liegenden Bilder der zu  $[w']$  gehörenden reellen Axe vereinigt sind;

4° in  $E$  einen  $n(n-1)$ -fachen Punkt, dessen sämtliche Tangenten in der reellen Axe vereinigt sind; diese Gerade hat im unendlich fernen Punkte  $E$   $m(n-1)$  Punkte mit der Kurve gemein.

Der Schnitt in  $[w']$  besteht aus den zwei  $mn$ -fachen durch die Spur  $B'$  von  $l$  in  $[w']$  verlaufenden isotropen Geraden, aus der  $n(n-1)$ -fachen reellen Axe und aus einer Kurve vom Grade  $m(m+2n-1)$ . Letztere hat

1° in den Kreispunkten  $mn$ -fache Punkte, von deren Tangenten je  $m$  in einer der  $n$  Geraden vereinigt sind; welche die Kreispunkte bez. mit den  $n^2$  Bildern  $A'$  von  $A$  verbinden;

2° in  $B'$  einen  $m(m-1)$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $l$  auf  $[w']$  der  $m(m-1)$  ausserhalb  $\varepsilon$  liegenden Bilder  $B$  von  $B'$  sind;

3° in  $O'$  einen  $m(n-1)$ -fachen Punkt, von dessen Tangenten je  $m$  in einem der  $n-1$  ausserhalb  $\varepsilon$  liegenden Bilder der zu  $[w]$  gehörenden reellen Axe vereinigt sind;

4° in  $E$  einen  $m(n-1)$ -fachen Punkt, dessen Tangenten alle

Tangenten mit der unendlich fernen Gerade zusammengefallen sind; diese Gerade hat in jedem Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$   $m$  Punkte mit der Kurve gemein.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  ist eine Kurve vom Grade  $m(m+n-1)$  und hat

1° in den Kreispunkten  $mn$ -fache Punkte, dessen Tangenten die Schnittlinien von  $\omega_\mu$  mit den Berührungsebenen der Kreispunkte sind;

2° im Schnittpunkte  $C_\mu$  von  $\omega_\mu$  mit  $l$  einen  $m(m-1)$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $l$  auf  $\omega_\mu$  der  $m(m-1)$  ausserhalb  $\varepsilon$  liegenden nach  $C_\mu$  zielenden Congruenzstrahlen sind;

3° in den  $m-n-1$  Punkten  $E_{\tau_{m-n}}$  ( $\tau_{m-n} \neq 1$ )  $n$ -fache Punkte, deren sämtliche Tangenten in die unendlich ferne Gerade zusammengefallen sind (Ausnahme in  $[w]$ );

4° im Schnittpunkte  $X_\mu$  von  $\omega_\mu$  mit  $OO'$  einen  $n(n-1)$ -fachen Punkt, dessen Tangenten alle zu den reellen Axen parallel sind;

5° Doppelpunkte in den Schnittpunkten von  $\omega_\mu$  mit der Doppelkurve, für deren Erörterung wir auf das in § 10a (S. 272 u. f.) Dargelegte verweisen.

Die *axiale Regelfläche* einer in der Ebene  $\varepsilon$  der reellen Axen liegenden, durch  $O$  gehenden Gerade  $l$ .

Der Unterschied mit der unmittelbar vorangehenden Regelfläche ist zunächst, dass alle Berührungsebenen der  $m-n-1$  Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$  ( $\tau_{m-n} \neq 1$ ) diese Punkte mit der Gerade  $OT_0$  (siehe S. 251) verbinden.

Die in  $[w]$  liegende Kurve hat in  $O$  einen  $n(n-1)$ -fachen Punkt.

Die in  $[w']$  befindliche Kurve ist in eine  $m$ -fache Kurve vom Grade  $m+n-1$  ausgeartet. Diese hat

mit der unendlich fernen Gerade zusammengefallen sind; diese Gerade hat in  $E$   $m(m-1)$  Punkte mit der Kurve gemein.

Der Schnitt mit einer *zu den Abbildungsebenen parallelen* Ebene  $\omega_\mu$  ist eine Kurve vom Grade  $(m+n)(m+n-1) + 2mn$  und hat

1° in den Kreispunkten  $2mn$ -fache Punkte, deren Tangenten die Schnittlinien von  $\omega_\mu$  mit den Berührungsebenen der Kreispunkte sind;

2° im Schnittpunkte  $C_\mu$  von  $l$  mit  $\omega_\mu$  einen  $(m+n)(m+n-1)$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $l$  auf  $\omega_\mu$  der  $(m+n)(m+n-1)$  ausserhalb  $\varepsilon$  liegenden nach  $C_\mu$  zielenden Congruenzstrahlen sind;

3° im Punkte  $E$  einen  $(m+n)(n-1)$ -fachen Punkt, von dem  $m(n-1)$  Tangenten in der unendlich fernen Gerade und  $n(n-1)$  in der Schnittlinie von  $\omega_\mu$  und  $\varepsilon$  vereinigt sind;

4° Doppelpunkte in den Schnittpunkten von  $\omega_\mu$  mit der Doppelkurve, für welche wir auf § 10a (S. 272 u. f.) hinweisen.

Die *axiale Regelfläche* einer *in der Ebene  $\varepsilon$  der reellen Axen liegenden, durch  $O$  gehenden Gerade  $l$* .

Von der vorhergehenden Regelfläche wird jetzt  $mn$  mal die Ebene  $[w]$  abgesondert. Wir erübrigen alsdann eine Fläche vom Grade  $(m+n)(m+n-1) + mn$ . Auf dieser Fläche sind die Kreispunkte  $mn$ -fache.

Die Gerade  $OO'$  schneidet die Fläche  $m(n-1)$  mal in  $O'$ ,  $(m+n)(m+n-1)$  mal in  $O$  und *einmal* in den  $m$  Schnittpunkten  $X_e$  der Tangenten, welche man in den ausserhalb  $O$  liegenden Schnittpunkten von  $l$  mit der Fokalkurve  $e$  an letztere legen kann.

Die in  $[w]$  liegende Kurve hat in  $O$  einen  $n(m+n-1)$ -fachen Punkt; seine Tangenten verbinden  $O$  mit den  $m+n-1$  Punkten  $E_{\tau_{m+n}}$  ( $\tau_{m+n} \neq 1$ ); diese Tangenten haben in  $O$   $n(2m+n-1)$  Punkte mit der Kurve gemein.

Die in  $[w']$  befindliche Kurve besteht aus einer  $m$ -fachen Kurve vom Grade  $m+n-1$ . Diese schneidet die unendlich ferne Gerade in den  $m+n-1$  Punkten  $E_{\tau_{m+n}}$  ( $\tau_{m+n} \neq 1$ ); die Tangenten dieser Punkte convergiren alle nach dem Punkte  $T'_0$  ((95b), S. 255). Die Kurve hat noch

1° in den Kreispunkten  $n$ -fache Punkte, deren Tangenten in den durch  $O'$  gehenden isotropen Geraden vereinigt sind;

2° im Punkte  $B'$  einen  $(m-1)$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $l$  auf  $[w']$  der  $m(m-1)$  ausserhalb  $\varepsilon$  liegenden Bilder von  $B'$  sind;

3° in  $O'$  einen  $(n-1)$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die ausserhalb  $\varepsilon$  liegenden Bilder der zu  $[w]$  gehörenden reellen Axe sind.

Der Schnitt in einer *zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene*  $\omega_\mu$  zeigt nur einen Unterschied in den Tangenten der  $m-n-1$  Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$  ( $\tau_{m-n} \neq 1$ ), welche jetzt alle nach der Spur der Gerade  $OT_0$  in  $\omega_\mu$  convergiren.

Die *axiale Regelfläche* einer *in der Ebene  $\varepsilon$  der reellen Axen liegenden, durch  $O'$  gehenden Gerade  $l$* .

Diese Regelfläche weicht nur ab in dem Schnitte mit  $[w]$ , welcher in eine  $n$ -fache Kurve vom Grade  $m+n-1$  ausgeartet ist.

Diese in  $[w]$  liegende Kurve hat

1° in den Kreispunkten  $n$ -fache Punkte, deren Tangenten in den durch  $O$  verlaufenden isotropen Geraden vereinigt sind;

2° in  $A$  einen  $(n-1)$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $l$  auf  $[w]$  der  $n(n-1)$  ausserhalb  $\varepsilon$  liegenden Bilder von  $A$  sind;

3° in  $O$  einen  $(m-1)$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die ausserhalb  $\varepsilon$  liegenden Bilder der zu  $[w']$  gehörenden reellen Axe sind.

4° in den Punkten  $E_{\tau_{m-n}}$  ( $\tau_{m-n} \neq 1$ ) *gewöhnliche* Punkte, deren Tangenten sich alle in einem Punkte auf der reellen Axe treffen; der Punkt  $E$  gehört der Kurve *nicht* an.

Die in  $[w']$  liegende Kurve hat einen  $m(m-1)$ -fachen Punkt in  $O'$ , dessen Tangenten in der reellen Axe vereinigt sind.

1° in  $B'$  einen  $(m-1)$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $l$  auf  $[w']$  der  $m(m-1)$  ausserhalb  $\varepsilon$  liegenden Bilder von  $B'$  sind;

2° in  $O'$  einen  $(n-1)$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die  $n-1$  ausserhalb  $\varepsilon$  liegenden Bilder der zu  $[w]$  gehörenden reellen Axe sind.

Der Schnitt in einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  ist eine Kurve vom Grade  $(m+n)(m+n-1)+mn$ . Sie hat in den Kreispunkten  $mn$ -fache Punkte.

Die axiale Regelfläche einer in der Ebene  $\varepsilon$  der reellen Axen liegenden, durch  $O'$  gehenden Gerade  $l$ .

Von der allgemeinen Regelfläche wird nun  $mn$  mal die Ebene  $[w']$  abgesondert. Es erübrigt eine Fläche vom Grade  $(m+n)(m+n-1)+mn$ .

Auf dieser sind die Kreispunkte  $mn$ -fache Punkte; ihre  $mn$  Berührungsebenen fallen zu je  $m$  zusammen.

Die Gerade  $OO'$  schneidet die Fläche  $n(m-1)$  mal in  $O$ ,  $(m+n)(m+n-1)$  mal in  $O'$  und  $n$  mal in den  $n$  Schnittpunkten  $X_e$  der Tangenten, welche man in den  $n$  ausserhalb  $O'$  liegenden Schnittpunkten von  $l$  mit der Fokalkurve  $e$  an letztere legen kann.

Die in  $[w]$  liegende Kurve besteht aus einer  $n$ -fachen Kurve vom Grade  $m+n-1$ . Diese schneidet die unendlich ferne Gerade in den  $m+n-1$  Punkten  $E_{\tau_{m+n}}$  ( $\tau_{m+n} \neq 1$ ); die Tangenten convergiren nach einem Punkte. Die Kurve hat noch

1° in  $A$  einen  $(n-1)$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $l$  auf  $[w]$  der  $n(n-1)$  ausserhalb  $\varepsilon$  liegenden Bilder von  $A$  sind;

2° in  $O$  einen  $(m-1)$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die  $m-1$  ausserhalb  $\varepsilon$  liegenden Bilder der zu  $[w']$  gehörenden reellen Axe sind.

Die in  $[w']$  liegende Kurve hat in  $O'$  einen  $m(m+n-1)$ -fachen Punkt, dessen Tangenten  $O'$  mit den  $m+n-1$  Punkten  $E_{\tau_{m+n}}$

Der Schnitt in einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  zeigt keine Abweichungen.

Die *axiale Regelfläche* einer in der Ebene  $\varepsilon$  der reellen Axen liegenden und zu diesen parallelen Gerade  $l_\mu$ .

Von der allgemeinen Regelfläche von  $l$  in  $\varepsilon$  wird jetzt  $n$  mal die Ebene  $[w]$  abgetrennt, wonach eine Fläche vom Grade  $m(m+n-1)-n = (m+n)(m-1)$  erübrigt wird.

Die unendlich ferne Gerade der Abbildungsebenen ist jetzt eine  $n(m-1)$ -fache Gerade, deren sämtliche Berührungsebenen in  $[w]$  vereinigt sind.

Die in  $[w]$  befindliche Kurve besteht aus der  $n(m-1)$ -fachen unendlich fernen Gerade und aus einer Kurve vom Grade  $n(m-1)$ . Diese hat in  $O$  einen  $n(n-1)$ -fachen Punkt, dessen sämtliche Tangenten in der reellen Axe zusammengefallen sind; diese Gerade hat ausser  $O$  keinen Punkt mit der Kurve gemein. Der Punkt  $E$  gehört der Kurve *nicht* an.

Der Schnitt in  $[w']$  ist aus der  $n(m-1)$ -fachen unendlich fernen Gerade und aus einer Kurve vom Grade  $m(m-1)$  zusammengesetzt. Diese hat in  $E$  einen  $(m-1)(m-n)$ -fachen Punkt, dessen Tangenten alle in der unendlich fernen Gerade vereinigt sind; diese Gerade hat in  $E$   $m(m-1)$  Punkte mit der Kurve gemein.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_v$  besteht aus der  $n(m-1)$ -fachen unendlich fernen Gerade und aus einer Kurve vom Grade  $m(m-1)$ , welche in  $E$  einen  $(m-n)(m-1)$ -fachen Punkt hat. Sämtliche Tangenten von  $E$  sind mit der unendlich fernen Gerade zusammengefallen; letztere hat in  $E$   $m(m-1)$  Punkte mit der Kurve gemein.

Die *axiale Regelfläche* eines *Congruenzstrahles*  $s$ .

Die allgemeine Regelfläche ist zerfallen in die zwei  $m$ -fachen Ebenen, welche  $s$  mit den Kreispunkten verbinden, und in eine Restfläche vom Grade  $m(m+n-2)$ .

Es ist  $s$  auf der Restfläche eine  $(m-1)^2$ -fache Gerade.

Die Kreispunkte sind jetzt  $m(n-1)$ -fache Punkte; von ihren Berührungsebenen sind je  $m$  mit einer der  $n-1$  durch (133a), bez. (134a) (S. 290) bestimmten Ebenen vereinigt.



( $\tau_{m+n} \neq 1$ ) verbinden; diese Tangenten haben in  $O'$   $m(m+n-1)$  Punkte mit der Kurve gemein.

Der Schnitt in einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  ist eine Kurve vom Grade  $(m+n)(m+n-1) + mn$ . Die Kreispunkte sind  $mn$ -fache Punkte.

Die axiale Regelfläche einer in der Ebene  $\varepsilon$  der reellen Axen liegenden und zu diesen parallelen Gerade  $l_\mu$ .

Auf dieser Regelfläche ist  $E$  jetzt ein  $(m+n)(m+n-1)$ -facher Punkt, von dem  $m(m-1) + n(n-1)$  Berührungsebenen mit  $\varepsilon$  vereinigt sind und  $2mn$  mit der Ebene  $\omega_\mu$ , welche  $l_\mu$  enthält.

Von den  $2mn$  Berührungsebenen in jedem der Kreispunkte sind  $mn$  in  $[w]$  und  $mn$  in  $[w']$  vereinigt.

Die in  $[w]$  liegende Kurve hat in  $E$  einen  $n(n-1)$ -fachen Punkt, dessen sämtliche Tangenten in der reellen Axe vereinigt sind.

Die in  $[w']$  befindliche Kurve hat in  $E$  einen  $m(m-1)$ -fachen Punkt, dessen Tangenten alle in der reellen Axe vereinigt sind.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\nu$  hat in  $E$  einen  $(m+n)(m+n-1)$ -fachen Punkt. Von diesem fallen  $m(m-1) + n(n-1)$  Tangenten mit  $X_\nu E$  und  $2mn$  mit der unendlich fernen Gerade zusammen.

Die axiale Regelfläche eines Congruenzstrahles  $s$ .

Die allgemeine Regelfläche ist ausgeartet in die zwei  $(m+n)$ -fachen Ebenen, welche  $s$  mit den Kreispunkten verbinden, und in eine Restfläche vom Grade  $(m+n)(m+n-2) + 2mn$ .

Der Strahl  $s$  ist auf der Restfläche eine  $(m+n-1)^2$ -fache Gerade.

Die Kreispunkte sind hier  $\{2mn - (m+n)\}$ -fache Punkte; von ihren Berührungsebenen fallen  $m(n-1)$  zu je  $m$  in  $n-1$  Ebenen ((133b), bez. (134b), S. 294) und  $n(m-1)$  zu je  $n$  in  $m-1$  Ebenen ((133'b), bez. (134'b), S. 294) zusammen.

Übrigens weicht diese Regelfläche von der allgemeinen nicht ab. Nur die Doppelkurve ist von niedrigerem Grade (siehe S. 291).

Der Schnitt mit  $[w]$  ist ausgeartet in die  $(n-1)(m-n)$ -fachen durch die Spur  $S$  von  $s$  in  $[w]$  gehenden isotropen Geraden, in die  $m-n$   $(m-n)$ -fachen Geraden  $S E_{\tau_{m-n}}$  und in eine Kurve vom Grade  $n(m-n-2)$ . Diese hat

1° in den Kreispunkten  $n(n-1)$ -fache Punkte, deren Tangenten mit den durch  $S$  gelegten isotropen Geraden identisch sind;

2° im Punkte  $S$  einen  $(n-1)^2$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $s$  auf  $[w]$  der  $(n-1)^2$  ausserhalb der durch  $S'$  in  $[w']$  gehenden isotropen Geraden liegenden Bilder von  $S$  sind;

3° in den  $m-n$  Punkten  $E_{\tau_{m-n}}$   $n$ -fache Punkte, deren Tangenten alle zusammengefallen sind in den  $m-n$  Geraden, welche diese Punkte mit dem auf  $OS$  befindlichen Punkte  $T$  ((32a), S. 205) verbinden.

Der Schnitt in  $[w']$  ist eine Kurve vom Grade  $m(m+n-2)$ . Sie hat

1° in den Kreispunkten  $m(n-1)$ -fache Punkte, von deren Tangenten je  $m$  die Kreispunkte mit den  $n(n-1)$  ausserhalb der durch  $S'$  gehenden isotropen Geraden liegenden Bildern von  $S$  verbinden;

2° im Punkte  $S'$  einen  $(m-1)^2$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $s$  auf  $[w']$  der  $(m-1)^2$  ausserhalb der singulären Ebenen liegenden Bilder von  $S'$  sind;

3° in den  $m-n$  Punkten  $E_{\tau_{m-n}}$   $n$ -fache Punkte, deren sämtliche Tangenten in der unendlich fernen Gerade zusammengefallen sind, welche in jedem der Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$   $m$  Punkte mit der Kurve gemein hat.

Übrigens sind keine Abweichungen zu constataren.

Nur von der Doppelkurve ist der Grad erniedrigt worden (siehe S. 291, 295).

Der Schnitt in  $[w]$  besteht aus den  $m(n-1)$ -fachen durch die Spur  $S$  von  $s$  in  $[w]$  gelegten isotropen Geraden, aus der  $m^2$ -fachen Gerade  $OS$  und aus einer Kurve vom Grade  $n(2m+n-2)$ .

Diese hat

1° in den Kreispunkten  $n(m-1)$ -fache Punkte, von deren Tangenten je  $n$  vereinigt sind in einer der  $m-1$  Geraden, welche die Kreispunkte mit den ausserhalb der singulären Ebenen liegenden Bildern von  $S'$  verbinden;

2° im Punkte  $S'$  einen  $(n-1)^2$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $s$  auf  $[w]$  der  $(n-1)^2$  ausserhalb den durch  $S'$  in  $[w']$  gelegten isotropen Geraden liegenden Bilder von  $S$  sind;

3° im Punkte  $O$  einen  $mn$ -fachen Punkt, von dessen Tangenten je  $n$  vereinigt sind in den  $m$  Bildern der Gerade  $O'S_3$ , welche  $O'$  mit dem unendlich fernen Punkte der Gerade  $OS$  verbindet;

4° im Punkte  $S'_4$  (Schnittpunkte von  $O'S'$  mit der unendlich fernen Gerade) einen  $n^2$ -fachen Punkt, dessen sämtliche Tangenten in der Gerade  $SS'_4$  zusammengefallen sind; diese Gerade hat in  $S'_4$   $mn$  Punkte mit der Kurve gemein (Voraussetzung ist  $m > n$ ).

Der Schnitt in  $[w']$  besteht aus den  $n(m-1)$ -fachen durch die Spur  $S'$  von  $s$  in  $[w']$  gehenden isotropen Geraden, aus der  $n^2$ -fachen Gerade  $O'S'$  und aus einer Kurve vom Grade  $m(m+2n-2)$ . Diese hat

1° in den Kreispunkten  $m(n-1)$ -fache Punkte, von deren Tangenten je  $m$  vereinigt sind in einer der  $n-1$  Geraden, welche die Kreispunkte mit den ausserhalb der singulären Ebenen liegenden Bildern von  $S$  verbinden;

2° im Punkte  $S'$  einen  $(m-1)^2$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $s$  auf  $[w']$  der  $(m-1)^2$  ausserhalb den durch  $S$  gezogenen isotropen Geraden liegenden Bilder von  $S'$  sind;

3° im Punkte  $O'$  einen  $mn$ -fachen Punkt, von dessen Tangenten je  $m$  vereinigt sind in einer der  $n$  Bilder der Gerade  $OS'_4$ , welche  $O$  mit dem unendlich fernen Punkte  $S'_4$  der Gerade  $O'S'$  verbindet;

4° im Punkte  $S_3$  (unendlich fernen Punkte auf  $OS$ ) einen  $mn$ -fachen Punkt, dessen sämtliche Tangenten mit der unendlich fernen Gerade zusammengefallen sind; diese Gerade hat in  $S_3$   $m^2$  Punkte mit der Kurve gemein (vorausgesetzt ist  $m > n$ ).

Der Schnitt mit einer zu den *Abbildungsebenen* parallelen Ebene  $\omega_\mu$  ist eine Kurve vom Grade  $m(m + n - 2)$ . Diese hat

1° in den Kreispunkten  $m(n - 1)$ -fache Punkte, deren Tangenten die Schnittlinien von  $\omega_\mu$  mit den Berührungsebenen an der Fläche sind; sie sind zu je  $m$  in  $n - 1$  Geraden vereinigt;

2° im Schnittpunkte  $S_\mu$  von  $s$  mit  $\omega_\mu$  einen  $(m - 1)^2$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $s$  auf  $\omega_\mu$  der  $(m - 1)^2$  nach  $S_\mu$  zielenden, ausserhalb der singulären Ebenen liegenden Congruenzstrahlen sind;

3° in den  $m - n$  Punkten  $E_{\tau_{m-n}}$   $n$ -fache Punkte, dessen Tangenten mit der unendlich fernen Gerade zusammengefallen sind (Ausnahme in  $[w]$ );

4° Doppelpunkte in den Schnittpunkten von  $\omega_\mu$  mit der Doppelkurve, welche auch hier von niedrigerem Grade ist als im allgemeinen Falle, und für deren Erledigung wir auf S. 291 verweisen.

Die *axiale Regelfläche* eines in der Ebene  $\varepsilon$  der reellen Axen liegenden Congruenzstrahles  $s$ .

Die Regelfläche der willkürlichen Gerade ist jetzt zerfallen in die zwei  $m$ -fachen Ebenen, welche  $s$  mit den Kreispunkten verbinden, in die  $m$ -fache Ebene  $\varepsilon$ , und in eine Restfläche, welche offenbar vom Grade  $m(m + n - 3)$  ist.

Auf der Restfläche ist  $s$  eine  $(m - 1)(m - 2)$ -fache Gerade.

Die Kreispunkte sind  $m(n - 1)$ -fache Punkte; ihre Berührungsebenen sind bei der vorhergehenden Regelfläche beschrieben.

Die  $m - n - 1$  Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$  ( $\tau_{m-n} \neq 1$ ) sind  $n$ -fache; ihre Berührungsebenen sind in  $[w]$  zusammengefallen.

Die Gerade  $OO'$  ist eine  $n(n - 1)$ -fache Gerade, deren Berührungsebenen alle in  $\varepsilon$  vereinigt sind (Ausnahme in  $[w']$ ).

Der Schnittpunkt  $S_0$  von  $s$  mit  $OO'$  ist ein  $(m - 1)(m - 2)$ -facher Punkt.

Die Doppelkurve ist wieder von niedrigerem Grade als im vorigen Falle (siehe S. 297).

Der Schnitt in  $[w]$  ist zerfallen in die  $(n - 1)(m - n)$ -fachen, durch

Der Schnitt in einer zu den *Abbildungsebenen* parallelen Ebene  $\omega_\mu$  ist eine Kurve vom Grade  $(m+n)(m+n-2) + 2mn$ . Diese hat

1° in den Kreispunkten  $\{2mn - (m+n)\}$ -fache Punkte, von denen  $m(n-1)$  Tangenten zu je  $m$  in  $n-1$  Geraden und  $n(m-1)$  zu je  $n$  in  $m-1$  Geraden vereinigt sind; diese Tangenten sind die Schnittlinien von  $\omega_\mu$  mit den an der Fläche gelegten Berührungsebenen;

2° im Schnittpunkte  $S_\mu$  von  $s$  mit  $\omega_\mu$  einen  $(m+n-1)^2$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $s$  auf  $\omega_\mu$  der  $(m+n-1)^2$  nach  $S_\mu$  zielenden, ausserhalb der singulären Ebenen liegenden Congruenzstrahlen sind;

3° im Punkte  $S_3$  einen  $mn$ -fachen Punkt, dessen Tangenten, für  $m > n$ , alle mit der unendlich fernen Gerade zusammengefallen sind;

4° im Punkte  $S'_4$  einen  $n^2$ -fachen Punkt, dessen sämtliche Tangenten in der Schnittlinie von  $\omega_\mu$  mit der durch  $O'$  und  $s$  gelegten Ebene zusammengefallen sind (vorausgesetzt ist  $m > n$ );

5° Doppelpunkte in den Schnittpunkten von  $\omega_\mu$  mit der Doppelkurve, welche auch hier von niedrigerem Grade ist als im allgemeinen Falle. Auch hier verweisen wir auf S. 291, 295.

Die *axiale Regelfläche* eines in der Ebene  $\varepsilon$  der reellen Axen liegenden Congruenzstrahles  $s$ .

Die Regelfläche der willkürlichen Gerade ist jetzt ausgeartet in die zwei  $(m+n)$ -fachen Ebenen, welche  $s$  mit den Kreispunkten verbinden, in die  $(m+n)$ -fache Ebene  $\varepsilon$  und in eine Restfläche, welche demnach vom Grade  $(m+n)(m+n-3) + 2mn$  ist.

Auf der Restfläche ist  $s$  eine  $(m+n-1)(m+n-2)$ -fache Gerade.

Die Kreispunkte sind  $\{2mn - (m+n)\}$ -fache Punkte; für ihre Berührungsebenen verweisen wir auf die vorige Regelfläche.

Der Punkt  $O$  ist ein  $n(m-1)$ -facher Punkt, dessen Berührungsebenen alle in  $[w]$  vereinigt sind.

Der Punkt  $O'$  ist ein  $m(n-1)$ -facher Punkt, dessen Tangenten sich alle in  $[w']$  befinden.

Der Punkt  $E (\equiv S_3 \equiv S'_4)$  ist ein  $(m+n)(n-1)$ -facher; von seinen Berührungsebenen sind  $m(n-1)$  in  $[w]$  und  $n(n-1)$  in  $\varepsilon$  vereinigt.

Der Schnittpunkt  $S_0$  von  $s$  mit  $OO'$  ist ein  $(m+n-1)(m+n-2)$ -facher Punkt.

Die Doppelkurve ist von noch niedrigerem Grade als im vorigen Falle (Siehe S. 297, 299).

Der Schnitt in  $[w]$  besteht aus den  $m(n-1)$ -fachen, durch die

die Spur  $S$  von  $s$  in  $[w]$  gelegten isotropen Geraden, in die  $m-n-1$  ( $m-n$ )-fachen Geraden  $SE_{\tau_{m-n}}$  ( $\tau_{m-n} \neq 1$ ) und in eine Kurve vom Grade  $n(m+n-3)$ . Diese hat

1° in den Kreispunkten  $n(n-1)$ -fache Punkte, deren Tangenten alle in den durch  $S$  gehenden isotropen Geraden vereinigt sind;

2° im Punkte  $S$  einen  $(n-1)(n-2)$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $s$  auf  $[w]$  der  $(n-1)(n-2)$  ausserhalb der singulären Ebenen liegenden Bilder von  $S$  sind;

3° in den Punkten  $E_{\tau_{m-n}}$  ( $\tau_{m-n} \neq 1$ )  $n$ -fache Punkte, deren Tangenten alle nach dem Punkt  $T$  ((32a), S. 205) convergiren; der Punkt  $E$  gehört der Kurve nicht an;

4° in  $O$  einen  $n(n-1)$ -fachen Punkt, dessen sämtliche Tangenten mit der reellen Axe zusammengefallen sind.

Der Schnitt in  $[w']$  ist eine Kurve vom Grade  $m(m+n-3)$ . Diese hat

1° in den Kreispunkten  $m(n-1)$ -fache Punkte, von deren Tangenten je  $m$  in einem der  $n-1$  ausserhalb der singulären Ebenen liegenden Bilder von  $S$  vereinigt sind;

2° in  $S'$  einen  $(m-1)(m-2)$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $s$  auf  $[w]$  der  $(m-1)(m-2)$  ausserhalb der singulären Ebenen liegenden Bilder von  $S'$  sind;

3° in den Punkten  $E_{\tau_{m-n}}$  ( $\tau_{m-n} \neq 1$ )  $n$ -fache Punkte; ihre Tangenten sind zusammengefallen in der unendlich fernen Gerade, welche in jedem Punkte  $E_{\tau_{m-n}}$   $m$  Punkte mit der Kurve gemein hat; der Punkt  $E$  gehört der Kurve nicht an;

4° in  $O'$  einen  $m(n-1)$ -fachen Punkt, von dessen Tangenten je  $m$  in einem der  $n-1$  ausserhalb  $\varepsilon$  liegenden Bilder der zu  $[w]$  gehörenden reellen Axe vereinigt sind.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  ist eine Kurve vom Grade  $m(m+n-3)$ . Diese hat

1° in den Kreispunkten  $m(n-1)$ -fache Punkte, dessen Tangenten die Schnittlinien von  $\omega_\mu$  mit den Berührungsebenen dieser Punkte sind;

2° im Schnittpunkte  $S_\mu$  von  $s$  mit  $\omega_\mu$  einen  $(m-1)(m-2)$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $s$  auf

Spur  $S$  von  $s$  in  $[w]$  gehenden isotropen Geraden, aus der  $m(m-1)$ -fachen reellen Axe und aus einer Kurve vom Grade  $n(2m+n-3)$ .

Diese hat

1° in den Kreispunkten  $n(m-1)$ -fache Punkte, von deren Tangenten je  $n$  vereinigt sind in den  $m-1$  Geraden, welche die Kreispunkte mit den ausserhalb der singulären Ebenen liegenden Bildern von  $S'$  verbinden;

2° im Punkte  $S$  einen  $(n-1)(n-2)$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $s$  auf  $[w]$  der  $(n-1)(n-2)$  ausserhalb der singulären Ebenen liegenden Bilder von  $S'$  sind;

3° im Punkte  $O$  einen  $n(m-1)$ -fachen Punkt, von dessen Tangenten je  $n$  in einem der  $m-1$  ausserhalb der singulären Ebenen liegenden Bilder der zu  $[w']$  gehörenden reellen Axe vereinigt sind;

4° in  $E$  einen  $n(n-1)$ -fachen Punkt, dessen Tangenten alle mit der reellen Axe zusammengefallen sind; diese Gerade hat in  $E$   $m(n-1)$  Punkte mit der Kurve gemein.

Der Schnitt in  $[w']$  besteht aus den  $n(m-1)$ -fachen durch die Spur  $S'$  von  $s$  in  $[w']$  gelegten isotropen Geraden, aus der  $n(n-1)$ -fachen reellen Axe und aus einer Kurve vom Grade  $m(m+2n-3)$ . Diese hat

1° in den Kreispunkten  $m(n-1)$ -fache Punkte, von deren Tangenten je  $m$  vereinigt sind in den  $n-1$  Geraden, welche die Kreispunkte mit den ausserhalb der singulären Ebenen liegenden Bildern von  $S$  verbinden;

2° im Punkte  $S'$  einen  $(m-1)(m-2)$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $s$  auf  $[w']$  der  $(m-1)(m-2)$  ausserhalb der singulären Ebenen liegenden Bilder von  $S'$  sind;

3° im Punkte  $O'$  einen  $m(n-1)$ -fachen Punkt, von dessen Tangenten je  $m$  in einem der  $n-1$  ausserhalb  $\varepsilon$  liegenden Bilder der zu  $[w]$  gehörenden reellen Axe vereinigt sind;

4° in  $E$  einen  $m(n-1)$ -fachen Punkt, dessen sämtliche Tangenten mit der unendlich fernen Gerade zusammengefallen sind; diese Gerade hat in  $E$   $m(m-1)$  Punkte mit der Kurve gemein.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  ist eine Kurve vom Grade  $(m+n)(m+n-3)+2mn$ . Diese hat

1° in den Kreispunkten  $\{2mn-(m+n)\}$ -fache Punkte, deren Tangenten die Schnittlinien von  $\omega_\mu$  mit den Berührungsebenen dieser Punkte sind;

2° im Schnittpunkte  $S_\mu$  von  $s$  mit  $\omega_\mu$  einen  $(m+n-1)(m+n-2)$ -fachen Punkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $s$  auf

$\omega_\mu$  der  $(m-1)(m-2)$  ausserhalb der singulären Ebenen liegenden nach  $S_\mu$  zielenden Congruenzstrahlen sind;

3° im Schnittpunkte  $X_\mu$  von  $\omega_\mu$  mit  $OO'$  einen  $n(n-1)$ -fachen Punkt, dessen Tangenten alle in die Gerade  $X_\mu E$  zusammengefallen sind (Ausnahme in  $[w']$ );

4° in den  $m-n-1$  Punkten  $E_{\tau_{m-n}}$  ( $\tau_{m-n} \neq 1$ )  $n$ -fache Punkte, deren sämtliche Tangenten in der unendlich fernen Gerade vereinigt sind (Ausnahme in  $[w]$ );

5° Doppelpunkte in den Schnittpunkten von  $\omega_\mu$  mit der Doppelkurve.

Die *axiale Regelfläche* einer in der Abbildungsebene  $[w]$  liegenden Gerade  $l_\infty$ .

Die allgemeine Regelfläche zerfällt hier in  $(m^2 - n^2)$  mal die Abbildungsebene  $[w]$  und in eine Restfläche vom Grade  $n(m+n)$ .

Die Gerade  $l_\infty$  ist auf dieser Restfläche eine  $n^2$ -fache Gerade.

Die unendlich ferne Gerade der Abbildungsebenen ist ebenfalls eine  $n^2$ -fache Gerade.

Wenn  $l_\infty$  die unendlich ferne Gerade in  $L_3$  schneidet, so sind die  $n$  Bilder  $L_3'$  von  $L_3$ , als Punkt von  $[w]$  betrachtet,  $n$ -fache Punkte auf der Restfläche; ihre Berührungsebenen sind in der Abbildungsebene  $[w]$  vereinigt, welche mit der Fläche  $mn$  mal die unendlich ferne Gerade gemein hat.

Die Doppelkurve wird in der auf S. 303 u.f. gegebenen Weise bestimmt.

Der Schnitt in  $[w]$  besteht aus der  $n^2$ -fachen Gerade  $l_\infty$  und aus der  $mn$ -fachen unendlich fernen Gerade.

Der Schnitt in  $[w']$  besteht aus der  $n^2$ -fachen unendlich fernen Gerade und aus einer Kurve vom Grade  $mn$ , der *Bildkurve* von  $l_\infty$ .

Die Kreispunkte  $I$  und  $J$  gehören dieser Bildkurve *nicht* an.

Die  $n$  Bilder  $L_3'$  von  $L_3$ , als Punkt von  $[w]$  betrachtet, sind  $n$ -fache Punkte; die Tangenten sind alle in der unendlich fernen Gerade vereinigt, welche in jedem der Punkte  $L_3'$   $m$  Punkte mit der Kurve gemein hat.

Wenn  $l_\infty$  die isotrope Gerade  $OJ$  in  $L_1$  und die isotrope Gerade  $OI$  in  $L_2$  schneidet, so sind die  $2n$  bez. auf  $O'J$  und  $O'I$  liegenden Bilder  $L_1'$  und  $L_2'$   $n$ -fache Punkte, welche alle die Gerade



$\omega_\mu$  der  $(m+n-1)(m+n-2)$  ausserhalb der singulären Ebenen liegenden nach  $S_\mu$  zielenden Congruenzstrahlen sind;

3° im Punkte  $E$  einen  $(m+n)(n-1)$ -fachen Punkt, vom dem  $m(n-1)$  Tangenten mit der unendlich fernen Gerade und  $n(n-1)$  mit der Gerade  $X_\mu E$  zusammenfallen;

4° Doppelpunkte in den Schnittpunkten von  $\omega_\mu$  mit der Doppelkurve.

Die *axiale Regelfläche* einer in der Abbildungsebene  $[w]$  liegenden Gerade  $l_\infty$ .

Die allgemeine Regelfläche ist hier in  $m(m+n)$  mal die Abbildungsebene  $[w]$  und in eine Restfläche vom Grade  $n(2m+n)$  ausgeartet.

Die Gerade  $l_\infty$  ist auf dieser Restfläche eine  $n^2$ -fache Gerade.

Die Kreispunkte  $I$  und  $J$  sind  $mn$ -fache Punkte; ihre Tangenten befinden sich in  $mn$  Ebenen, die zu je  $m$  in  $n$  Ebenen vereinigt sind. Wenn  $l_\infty$  die isotropen Geraden  $OJ$  und  $OI$  bez. in  $L_1$  und  $L_2$  schneidet, so verbinden diese  $n$  Ebenen die Geraden  $L_1 I$  und  $L_2 J$  bez. mit ihren  $n$  Bildern in  $[w']$ .

Der Punkt  $O'$  ist ein  $mn$ -facher Punkt, dessen Berührungsebenen alle in die Ebene  $[w]$  zusammengefallen sind.

Der Punkt  $O$  gehört jetzt der Restfläche *nicht* an.

Der Punkt  $L_3$ , wo  $l_\infty$  die unendlich ferne Gerade schneidet, ist ein  $n^2$ -facher Punkt, dessen Berührungsebenen alle in der durch  $O'$  und  $l_\infty$  gelegten Ebene vereinigt sind.

Die Gerade  $O'L_3$  ist eine  $n^2$ -fache.

Für die Doppelkurve verweisen wir auf S. 303 u.f., 308.

Der Schnitt in  $[w]$  besteht aus der  $n^2$ -fachen Gerade  $l_\infty$  und aus den  $mn$ -fachen Geraden  $L_1 I$  und  $L_2 J$  (siehe oben).

Der Schnitt in  $[w']$  ist zerfallen in die  $n^2$ -fache Gerade  $O'L_3$  und in eine Kurve vom Grade  $2mn$ , die Bildkurve von  $l_\infty$ .

Die Kreispunkte  $I$  und  $J$  sind  $mn$ -fache Punkte; von ihren Tangenten sind je  $m$  bez. in ein der  $n$  Bilder von  $IL_1$  und  $JL_2$  zusammengefallen.

Der Punkt  $O'$  ist ebenfalls ein  $mn$ -facher; von seinen Tangenten sind je  $m$  in einem der  $n$  Bilder von  $OL_3$  vereinigt.

$O'I$  bez.  $O'J$  als Tangente haben; diese Geraden haben in jedem der Punkte  $L_1'$  und  $L_2'$   $m$  Punkte mit der Kurve gemein.

Der Schnitt mit einer zu den *Abbildungsebenen* parallelen Ebene  $\omega_\mu$  besteht aus der  $n^2$ -fachen unendlich fernen Gerade und aus einer Kurve vom Grade  $mn$ . Diese hat in den  $n$  Punkten  $L_3'$   $n$ -fache Punkte, deren sämtliche Tangenten in der unendlich fernen Gerade vereinigt sind.

Die *axiale Regelfläche* einer in der *Abbildungsebene*  $[w]$  liegenden, durch  $O$  gehenden Gerade  $l_\infty$ .

Die gerade erörterte Fläche zerfällt jetzt in  $n$  Regelflächen vom Grade  $m + n$ .

Jede dieser Regelflächen enthält die unendlich ferne Gerade als eine  $n$ -fache Gerade, deren sämtliche Berührungsebenen in  $[w]$  vereinigt sind.

Die Gerade  $OO'$  ist ebenfalls eine  $n$ -fache; ihre Berührungsebenen sind alle in der durch  $O'$  und  $l_\infty$  gelegten Ebene zusammengefallen.

Die Gleichungen dieser Regelflächen findet man in (144a) (S. 302).

Der Schnitt mit  $[w]$  ist zerfallen in die  $m$ -fache unendlich ferne Gerade und in die  $n$ -fache Gerade  $l_\infty$ .

Der Schnitt in  $[w']$  ist aus der  $n$ -fachen unendlich fernen Gerade und aus je einem der Bilder von  $l_\infty$ , jedem  $m$  mal gezählt, zusammengesetzt.

Der Schnitt mit einer zu den *Abbildungsebenen* parallelen Ebene  $\omega_\mu$  enthält die  $n$ -fache unendlich ferne Gerade und eine Kurve vom Grade  $m$ , welche in  $X_\mu$  einen  $n$ -fachen Punkt hat; alle seine Tangenten sind in  $X_\mu L_3$  vereinigt.

Die *axiale Regelfläche* der in  $[w]$  liegenden reellen Axe.

Von den  $n$  gerade betrachteten Regelflächen vom Grade  $m + n$  ist eine jetzt in  $m$  mal die Ebene  $\varepsilon$  der reellen Axen und  $n$  mal die *Abbildungsebene*  $[w]$  ausgeartet.

Die anderen  $n - 1$  Regelflächen zeigen, in Bezug auf das Vorhergehende, keine Abweichungen. Ihre Gleichungen sind in (147a) (S. 308) gegeben. Von einer wesentlichen Doppelkurve ist nicht mehr die Rede.

Der Schnitt mit einer zu den *Abbildungsebenen parallelen* Ebene  $\omega_\mu$  ist eine Kurve vom Grade  $n(2m + n)$ . Diese hat in den Kreispunkten  $mn$ -fache Punkte, deren Tangenten die Schnittlinien von  $\omega_\mu$  mit den Berührungsebenen sind.

Der Punkt  $L_3$  ist ein  $n^2$ -facher; seine Tangenten sind alle in der Schnittlinie von  $\omega_\mu$  mit der durch  $O'$  und  $l_\infty$  gelegten Ebene vereinigt.

Die *axiale Regelfläche* einer in der *Abbildungsebene*  $[w]$  liegenden, durch  $O$  gehenden Gerade  $l_\infty$ .

Die gerade beschriebene Regelfläche ist hier in  $mn$  mal die Ebene  $[w]$  und in  $n$  Regelflächen vom Grade  $m + n$  ausgeartet.

Keine dieser Regelflächen enthält jetzt die Kreispunkte.

Auf jeder dieser Flächen ist  $l_\infty$  eine  $n$ -fache Gerade mit veränderlichen Berührungsebenen, die Gerade  $O'L_3$  eine  $n$ -fache mit der Ebene  $(O', l_\infty)$  als einziger Berührungsebene (diese Ebene hat mit der Fläche  $m$  mal  $O'L_3$  gemein); eine der  $n$  Geraden  $O'L_3'$  ist eine  $m$ -fache mit veränderlichen Berührungsebenen; schliesslich ist die entsprechende Gerade  $OL_3'$  eine  $n$ -fache mit  $[w]$  als einziger Berührungsebene.

Die Gleichungen dieser Regelflächen findet man in (144b) (S. 307).

Der Schnitt in  $[w]$  besteht aus  $n$  mal der Gerade  $l_\infty$  und  $m$  mal der axialen Projektion  $O'L_3'$  aus  $OO'$  eines der Bilder von  $l_\infty$ .

Der Schnitt in  $[w']$  zerfällt in  $n$  mal die axiale Projektion aus  $OO'$  von  $l_\infty$  und in  $m$  mal ein der Bilder von  $l_\infty$  (das nämliche wie oben).

Der Schnitt mit einer zu den *Abbildungsebenen parallelen* Ebene  $\omega_\mu$  ist eine Kurve vom Grade  $m + n$ , welche in  $L_3$  einen  $n$ -fachen Punkt hat, während die Tangenten vereinigt sind in der Gerade, in der  $\omega_\mu$  die Ebene  $(O', l_\infty)$  schneidet; es ist  $L_3'$  ein  $m$ -facher Punkt, dessen sämtliche Tangenten in der Schnittlinie von  $\omega_\mu$  mit der Ebene  $(OO'L_3)$  vereinigt sind.

Die *axiale Regelfläche* der in  $[w]$  liegenden reellen Axe.

Von den  $n$  Regelflächen vom Grade  $m + n$ , deren Eigenschaften wir gerade erörtert haben, ist eine jetzt in die  $(m + n)$ -fache Ebene  $\varepsilon$  der reellen Axen ausgeartet.

Die übrigen  $n - 1$  Regelflächen verhalten sich in analoger Weise wie die oben behandelten. Ihre Gleichungen findet man in (147b) (S. 309).

Die *Regelfläche* der Strahlen, welche auf einem *zu den Abbildungsebenen parallelen Kreise* ruhen.

Von der einem willkürlichen Kegelschnitte angehörenden Regelfläche, welche vom Grade  $2m(m+n)$  ist, wird  $2mn$  mal die Abbildungsebene  $[w]$  abgetrennt, sodass wir eine Restfläche vom Grade  $2m^2$  erübrigen.

Auf dieser Regelfläche ist der Kreis selbst eine  $m^2$ -fache Kurve.

Die Kreispunkte sind  $m^2$ -fache; in jedem dieser Punkte sind von den Berührungsebenen je  $m$  in einer der  $m$  Ebenen vereinigt, welche die axiale Regelfläche der im Kreispunkte an dem Kreise gelegten Tangente, d. h. der durch den Mittelpunkt des Kreises gehenden isotropen Gerade, bilden.

Der Schnitt in  $[w]$  ist zerfallen in die  $m(m-n)$ -fachen Spuren der Berührungsebenen in den Kreispunkten und in eine Kurve vom Grade  $2mn$ .

Die Kreispunkte sind auf dieser Kurve  $mn$ -fache Punkte; von ihren Tangenten fallen je  $n$  mit einer der  $m$  genannten Ausartungselementen zusammen; jede dieser Tangenten hat in einem Kreispunkte  $2mn$  Punkte mit der Kurve gemein.

Der Schnitt in  $[w']$  ist eine Kurve vom Grade  $2m^2$ .

Die Kreispunkte sind  $m^2$ -fache Punkte, von deren Tangenten je  $m$  in den  $m$  Spuren der Berührungsebenen der Kreispunkte vereinigt sind; jede Tangente hat in einem Kreispunkte  $2m^2$  Punkte mit der Kurve gemein.

Der Schnitt mit einer *zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene*  $w_v$  ist eine Kurve vom Grade  $2m^2$ , welche in den Kreispunkten  $m^2$ -fache Punkte hat, während die Tangenten die Schnittlinien von  $w_v$  mit den Berührungsebenen der Kreispunkte sind.

Die *Regelfläche* der Strahlen, welche auf einem *zu den Abbildungsebenen parallelen Kreise* ruhen, dessen Mittelpunkt auf  $OO'$  liegt.

Diese Regelfläche weicht von der vorigen nur im Folgenden ab.

Von den  $m$  verschiedenen Berührungsebenen der Kreispunkte

Die *Regelfläche* der Strahlen, welche auf einem *zu den Abbildungsebenen parallelen Kreise* ruhen.

Die Regelfläche eines willkürlichen Kegelschnittes ist vom Grade  $2(m+n)^2 + 4mn$ .

Dieser Fläche wird hier  $2mn$  mal die Ebene  $[w]$  und  $2mn$  mal die Ebene  $[w']$  entzogen. Die Restfläche ist daher vom Grade  $2(m+n)^2$ .

Auf dieser Fläche ist der Kreis selbst eine  $(m+n)^2$ -fache Kurve.

Die Kreispunkte sind  $(m+n)^2$ -fache; in jedem dieser Punkte sind von den Berührungsebenen je  $m+n$  vereinigt in einer der  $m+n$  Ebenen, welche die axiale Regelfläche der im Kreispunkte an den Kreis gelegten Tangente, d. h. der durch den Mittelpunkt des Kreises gehenden isotropen Gerade, bilden.

Der Schnitt in  $[w]$  ist ausgeartet in die  $m$ -fachen Spuren der Berührungsebenen in den Kreispunkten und in eine Kurve vom Grade  $2n(m+n)$ .

Die Kreispunkte sind  $n(m+n)$ -fache; von ihren Tangenten sind je  $n$  mit einem der  $m+n$  genannten Ausartungselementen zusammengefallen; jede dieser Geraden hat in einem Kreispunkte  $n(m+n+1)$  Punkte mit der Kurve gemein.

Die Schnittpunkte der  $m+n$  durch den Kreispunkt  $I$  gehenden Ausartungselementen mit der isotropen Gerade  $OJ$  sind  $n$ -fache Punkte der Kurve; ihre Tangenten fallen ebenfalls mit den genannten Ausartungselementen zusammen, welche in diesen Berührungspunkten  $m$  Punkte mit der Kurve gemein haben.

Analoge Betrachtungen gelten in Bezug auf die Schnittpunkte der durch  $J$  gelegten Ausartungselementen mit  $OI$ .

Der Schnitt in  $[w']$  wird am leichtesten ermittelt, indem wir in den Ergebnissen des in  $[w]$  befindlichen Schnittes die Zahlen  $m$  und  $n$  und die Abbildungsebenen  $[w]$  und  $[w']$  vertauschen. Die Schnittpunkte mit  $O'J$  sind jetzt  $n$ -fache Punkte; ihre Tangenten sind mit  $O'J$  vereinigt, welche in jenen Punkten  $m$  Punkte mit der Kurve gemein hat.

Der Schnitt mit einer *zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene*  $\omega$ , ist eine Kurve vom Grade  $2(m+n)^2$ , welche in den Kreispunkten  $(m+n)^2$ -fache Punkte hat, während die Tangenten die Schnittlinien von  $\omega$  mit den Berührungsebenen der Kreispunkte sind.

Die *Regelfläche* der Strahlen, welche auf einem *zu den Abbildungsebenen parallelen Kreise* ruhen, dessen Mittelpunkt auf  $OO'$  liegt.

Die Abweichungen dieser Regelfläche von der vorigen sind nicht von wesentlicher Bedeutung.

sind je  $n$  mit den durch  $OO'$  gelegten isotropen Ebenen zusammengefallen.

Im Schnitte mit  $[w]$  sind dementsprechend von den  $m$  Ausartungselementen durch jeden Kreispunkt  $n$  mit einer durch  $O$  gehenden isotropen Gerade zusammengefallen.

Analoges gilt von dem Schnitt mit  $[w']$  und mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_v$ .

Die *Regelfläche* der Strahlen, welche ruhen auf einem zu den Abbildungsebenen parallelen Kreise, der  $OO'$  schneidet.

Die Abweichungen von der Regelfläche des willkürlichen zu den Abbildungsebenen parallelen Kreises sind diese, dass die Gerade  $OO'$  jetzt eine  $n^2$ -fache Gerade der Fläche ist, deren sämtliche Berührungsebenen  $OO'$  mit der an den Kreis im Schnittpunkte  $X_\mu$  des Kreises mit  $OO'$  gelegten Tangente verbinden (Ausnahme in  $[w']$ ).

Dementsprechend hat die in  $[w]$  liegende Kurve in  $O$  einen  $n^2$ -fachen Punkt, dessen sämtliche Tangenten vereinigt sind in der Schnittlinie von  $[w]$  mit der genannten Berührungsebene von  $OO'$ .

Die in  $[w']$  liegende Kurve hat dagegen in  $O'$  einen  $mn$ -fachen Punkt, von dessen Tangenten je  $n$  in einem der Bilder der in  $O$  an der Kurve in  $[w]$  gelegten Tangente vereinigt sind.

Die *Regelfläche* der Strahlen, welche auf einem in der Abbildungsebene  $[w]$  liegenden Kreise ruhen.

Die oben betrachtete Regelfläche zerfällt jetzt in  $2m(m-n)$  mal die Abbildungsebene  $[w]$  und in eine Restfläche vom Grade  $2mn$ .

Auf dieser Restfläche ist der Kreis eine  $n^2$ -fache Kurve.

Die Kreispunkte sind nun  $mn$ -fache Punkte; von ihren Berührungsebenen sind je  $m$  vereinigt in einer der  $n$  Ebenen, welche bez. die in den Kreispunkten an den Kreis gelegten Tangenten (die durch den Mittelpunkt des Kreises verlaufenden isotropen Geraden) mit ihren  $n$  Bildern verbinden.

Wenn der Kreis die isotrope Gerade  $OJ$  in  $M_1$  und die isotrope Gerade  $OI$  in  $M_2$  schneidet, so sind die  $n$  Geraden, welche  $M_1$  (bez.  $M_2$ ) mit seinem  $n$  auf  $OJ$  (bez.  $OI$ ) liegenden Bildern verbinden,  $n$ -fache Geraden der Fläche, deren Berührungsebenen alle mit den durch  $OO'$  gelegten isotropen Ebenen zusammengefallen sind.

Der Schnitt in  $[w]$  besteht aus dem  $n^2$ -fachen Kreise und aus seinen  $n(m-n)$ -fachen Tangenten in den Kreispunkten.

Der Schnitt in  $[w']$  ist die *Bildkurve* des Kreises; sie ist vom Grade  $2mn$  und hat

Die *Regelfläche* der Strahlen, welche ruhen auf einem zu den *Abbildungsebenen* parallelen Kreise, der  $OO'$  schneidet.

Auch diese Regelfläche weicht in keiner wesentlichen Hinsicht ab von der des willkürlichen zu den Abbildungsebenen parallelen Kreises.

Die *Regelfläche* der Strahlen, welche auf einem in der *Abbildungsebene*  $[w]$  liegenden Kreise ruhen.

Die oben betrachtete Regelfläche ist jetzt ausgeartet in  $2m(m+n)$  mal die Abbildungsebene  $[w]$  und in eine Restfläche vom Grade  $2n(m+n)$ .

Auf dieser Fläche ist der Kreis eine  $n^2$ -fache Kurve.

Der Kreis möge die isotrope Gerade  $OJ$  in  $M_1$  und die isotrope Gerade  $OI$  in  $M_2$  schneiden.

Die Kreispunkte sind  $n(m+n)$ -fache Punkte; von ihren Berührungsebenen sind  $mn$  zu je  $m$  vereinigt in den  $n$  Ebenen, welche die Gerade  $M_1I$  (bez.  $M_2J$ ) mit ihren  $n$  Bildern verbinden, während von den übrigen  $n^2$  je  $n$  vereinigt sind in einer der  $n$  Ebenen, welche die im Kreispunkte an den Kreis gelegte Tangente (die durch den Mittelpunkt des Kreises gehende isotrope Gerade) mit ihren  $n$  Bildern verbinden.

Der Schnitt in  $[w]$  ist aus dem  $n^2$ -fachen Kreise und aus den  $mn$ -fachen Geraden  $M_1I$  und  $M_2J$  zusammengesetzt.

Der Schnitt in  $[w']$  ist zerfallen in die  $2n$   $n$ -fachen Bilder der in den Kreispunkten an den Kreis gelegten Tangenten und in eine Kurve vom Grade  $2mn$ , welche die *Bildkurve* des Kreises ist. Letztere hat

1° in den Kreispunkten  $mn$ -fache Punkte, von deren Tangenten je  $m$  in einem der  $n$  Bilder der in den Kreispunkten an den Kreis gelegten Tangenten vereinigt sind;

2° in den  $n$  Bildpunkten  $M_1'$  von  $M_1$  und in den  $n$  Bildpunkten  $M_2'$  von  $M_2$   $n$ -fache Punkte, deren Tangenten alle mit  $O'J$ , bez.  $O'I$  zusammengefallen sind; diese Tangenten haben in jedem der Punkte  $M_1'$ , bez.  $M_2'$   $m$  Punkte mit der Kurve gemein.

Der Schnitt mit einer *zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene*  $\omega_\mu$  ist eine Kurve vom Grade  $2mn$ , welche in den Kreispunkten  $mn$ -fache Punkte hat; ihre Tangenten sind die Schnittlinien von  $\omega_\mu$  mit den Berührungsebenen in diesen Kreispunkten.

Die Punkte, wo  $\omega_\mu$  die  $2n$  Geraden  $M_1M_1'$  und  $M_2M_2'$  schneidet, sind  $n$ -fache; ihre Tangenten fallen mit den durch  $X_\mu$  gelegten isotropen Geraden zusammen.

Die *Regelfläche* der Strahlen, welche auf einem *in der Abbildungsebene*  $[w]$  *liegenden Kreise* ruhen, dessen *Mittelpunkt*  $O$  ist.

Die Regelfläche ist vom Grade  $2mn$  und enthält den Kreis als eine  $n^2$ -fache Kurve.

Die Kreispunkte sind  $mn$ -fache; ihre Berührungsebenen sind alle in die durch  $OO'$  gelegten isotropen Ebenen zusammengefallen.

Der Schnitt in  $[w]$  besteht aus den  $n(m-n)$ -fachen durch  $O$  gehenden isotropen Geraden und aus dem  $n^2$ -fachen Kreise.

Der Schnitt in  $[w']$  besteht aus  $n$   $m$ -fachen concentrischen Kreisen, deren Mittelpunkt in  $O'$  liegt.

Der Schnitt mit einer *zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene*  $\omega_\mu$  ist eine Kurve vom Grade  $2mn$ , welche in den Kreispunkten  $mn$ -fache Punkte hat; ihre Tangenten convergiren alle nach  $X_\mu$ .

Die *Regelfläche* der Strahlen, welche ruhen auf einem *in der Abbildungsebene*  $[w]$  *liegenden Kreise*, der  $O$  enthält.

Diese Regelfläche weicht nur sofern von der des willkürlichen in  $[w]$  liegenden Kreises ab, dass  $OO'$  jetzt eine  $n^2$ -fache Gerade ist, deren sämtliche Berührungsebenen vereinigt sind in der Ebene, welche die in  $O$  an den Kreis gelegte Tangente aus  $O'$  projiziert (Ausnahme in  $[w']$ ).

Der Schnitt in  $[w]$  besteht aus den früher genannten Elementen.



1° in den Kreispunkten  $mn$ -fache Punkte, von deren Tangenten je  $m$  in einem der  $n$  Bilder von  $M_1 I$ , bez.  $M_2 J$  vereinigt sind;

2° in den  $n$  Schnittpunkten von  $O'J$  mit den  $n$  durch  $I$  gehenden Ausartungselementen und in den  $n$  Schnittpunkten von  $O'I$  mit den  $n$  durch  $J$  gehenden Ausartungselementen  $n$ -fache Punkte; ihre Tangenten fallen mit den Geraden  $O'J$ , bez.  $O'I$  zusammen; diese Geraden haben in jedem Berührungspunkte  $m$  Punkte mit der Kurve gemein.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  ist eine Kurve vom Grade  $2n(m+n)$ , welche in den Kreispunkten  $n(m+n)$ -fache Punkte hat; ihre Tangenten sind die Schnittlinien von  $\omega_\mu$  mit den Berührungsebenen der Kreispunkte.

Die Regelfläche der Strahlen, welche auf einem in der Abbildungsebene  $[w]$  liegenden Kreise ruhen, dessen Mittelpunkt  $O$  ist.

Die Regelfläche ist vom Grade  $2n(m+n)$  und enthält den Kreis als eine  $n^2$ -fache Kurve.

Die Kreispunkte sind  $n(m+n)$ -fache; von ihren Berührungsebenen sind  $mn$  mit  $[w']$  und  $n^2$  mit  $[w]$  zusammengefallen.

Der Schnitt in  $[w]$  ist zerfallen in die  $2mn$ -fache unendlich ferne Gerade und in den  $n^2$ -fachen Kreis.

Der Schnitt in  $[w']$  besteht aus der  $n^2$ -fachen unendlich fernen Gerade und aus  $n$   $m$ -fachen concentrischen Kreisen, deren Mittelpunkt in  $O'$  liegt.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  ist eine Kurve vom Grade  $2n(m+n)$ , welche in den Kreispunkten  $n(m+n)$ -fache Punkte hat; ihre Tangenten sind alle mit der unendlich fernen Gerade zusammengefallen.

Die Regelfläche der Strahlen, welche ruhen auf einem in der Abbildungsebene  $[w]$  liegenden Kreise, der  $O$  enthält.

Der Regelfläche eines willkürlichen in  $[w]$  liegenden Kreises wird jetzt  $mn$  mal die Ebene  $[w]$  entzogen, wonach man eine Fläche vom Grade  $2n(m+n) + mn$  erübrigt.

Die Kreispunkte sind nun  $n^2$ -fache; ihre Berührungsebenen sind diejenigen der zweiten Gruppe.

Der Schnitt in  $[w]$  besteht aus dem  $n^2$ -fachen Kreise und aus der  $mn$ -fachen Gerade, welche den  $O$  auf dem Kreise vorangehenden Punkt mit seinem Bilde verbindet.

Der Schnitt in  $[w']$  hat nun in  $O'$  einen  $mn$ -fachen Punkt, von dessen Tangenten je  $m$  vereinigt sind mit einem der  $n$  Bilder der in  $O$  an den Kreis in  $[w]$  gelegten Tangente.

Der Schnitt mit einer *zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene*  $\omega_\mu$  hat jetzt in  $X_\mu$  einen  $n^2$ -fachen Punkt, dessen Tangenten alle in der Schnittlinie von  $\omega_\mu$  mit der Berührungsebene von  $OO'$  vereinigt sind.

---

Die in  $[w']$  liegende Kurve ist vom Grade  $mn$ , sie ist die *Bildkurve* des in  $[w]$  liegenden Kreises.

Diese Bildkurve enthält weder die Kreispunkte noch den Punkt  $O'$ .

Sie trifft die durch  $O'$  gehenden isotropen Geraden jede  $m$  mal in  $n$   $n$ -fachen Punkten, deren Tangenten mit diesen isotropen Geraden zusammenfallen.

Die Verbindungslinien der Berührungspunkte mit den gegenüberliegenden Kreispunkten gehören dem Gesamtschnitte in  $[w']$  an.

Der Schnitt mit einer *zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene*  $\omega_\mu$  ist eine Kurve vom Grade  $n(m+2n)$ , welche in den Kreispunkten  $n^2$ -fache Punkte hat.

Hiermit sollen die Untersuchungen der parabolischen und der hyperbolischen Congruenz beendet werden.

Freilich sind nur die Regelflächen von sehr speziellen Gebilden erörtert worden; wir glauben aber mit den Vorangehenden ausreichen zu können, weil unser Hauptzweck nicht eine möglichst vollständige Sammlung von Regelflächen war, sondern vielmehr eine Übersicht der Methode, nach der diese Regelflächen gelegentlich untersucht werden könnten und deshalb, wie zur Erläuterung, nebenan einige Anwendungen dieser Methode.

Im folgenden Abschnitte wollen wir zwei besondere parabolische und eine besondere hyperbolische Congruenz studiren, n.l. die, welche den Beziehungen

$$w' = c^{-2} w^3, w'^2 = c^{-1} w^3 \text{ und } w' = c^3 w^{-2}$$

angehören, und deren Erledigung durch die Analyse der Gleichungen *dritten* Grades bedingt wird.

# FÜNFTER ABSCHNITT.

## ABTEILUNG A.

*Die Congruenz, welche der Beziehung*

$$w' = c^{-2} w^3$$

*entspricht.*

### § 1. Allgemeine Eigenschaften.

Mit Hinweisung auf das im vierten Abschnitte Dargelegte, bemerken wir zuerst, dass man in dieser *parabolischen* Congruenz hat

$$m = 3, \quad n = 1.$$

Der *Bündelgrad* der Congruenz ist also 9, ihr *Feldgrad* 3, ihr *Axengrad*  $N = 15$ .

Von den 9 nach einem reellen Punkte zielenden Strahlen sind 3 reell.

Die *Fokalfläche* besteht aus zwei imaginären Cylindern, deren Spitzen sich in den Kreispunkten  $I$  und  $J$  der Abbildungsebenen befinden.

Die Gleichungen dieser Fokalcyylinder lauten:

$$\left. \begin{aligned} 4x_3^3 + 27x_2^2x_4 &= 0, \\ 4x_3^3 + 27x_1^2x_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

Die Abbildungsebene  $[w]$  ( $x_4 = 0$ ) ist eine Inflexionsebene für beide Cylinder; die Tangente ist mit der unendlich fernen Gerade identisch.

Die Cylinder durchbohren sich noch in 2 kubischen Plankurven, welche in den Ebenen der reellen und imaginären Axen liegen. Die beiden Kurven haben im unendlich fernen Punkte  $E$ , bez.  $E'$  (oder  $E_{-1}$ ), einen Wendepunkt, dessen Tangente mit der reellen, bez. imaginären Axe von  $[w]$  identisch ist, und im Punkte  $O$  einen Rückkehrpunkt, dessen Tangente mit  $OO'$  zusammenfällt.

Die Gleichungen des Congruenzstrahles  $p$  sind hier

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= p_1 x_3 + p_1^3 x_4, \\ x_2 &= p_2 x_3 + p_2^3 x_4. \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (2a)$$

Der Brennpunkt  $P_{f1}$  des Strahles  $p$  ist durch

$$\frac{x_1}{p_1(3p_2^2 - p_1^2)} = \frac{x_2}{2p_2^3} = \frac{x_3}{3p_2^2} = \frac{x_4}{-1}, \quad \cdot \cdot \cdot \quad (3a)$$

der Brennpunkt  $P_{f2}$  durch

$$\frac{x_1}{2p_1^3} = \frac{x_2}{p_2(3p_1^2 - p_2^2)} = \frac{x_3}{3p_1^2} = \frac{x_4}{-1} \quad \cdot \cdot \cdot \quad (4a)$$

bestimmt.

*Singuläre Ebenen* sind

1° jede Ebene, welche einen Strahl  $p$  mit einem der Kreispunkte verbindet; sie enthält ein Strahlengebilde 3<sup>ter</sup> Klasse, dessen Einhüllende eine kubische Kurve mit einem Rückkehrpunkt ist;

2° die Ebenen  $x_1 = \pm x_2$ , d. h. die Ebenen der reellen und imaginären Axen; sie tragen jede ein Strahlengebilde 3<sup>ter</sup> Klasse, dessen Einhüllende mit der kubischen Fokalkurve identisch ist;

3° die Abbildungsebene  $[w]$  ( $x_4 = 0$ ) mit Strahlenbüscheln in den Kreispunkten und in den unendlich fernen Punkten der reellen und der imaginären Axe.

*Singuläre Punkte* sind

1° die Kreispunkte mit Strahlenbüscheln in  $[w]$ ;

2° die unendlich fernen Punkte der reellen und imaginären Axen in  $[w]$  mit Strahlenbüscheln in  $[w]$ .

Von den 9 Strahlen, welche nach einem Punkte von  $[w]$  zielen, fallen 4 mit den durch diesen Punkt gehenden isotropen Geraden zusammen, 2 mit der durch diesen Punkt zu der reellen Axe parallel gelegten Gerade, 2 mit der durch diesen Punkt zu der imaginären Axe parallel gelegten Gerade. Der 9<sup>te</sup> Strahl verbindet den Punkt mit seinem in  $[w']$  befindlichen Bilde.

Die in  $[w]$  liegenden isotropen Geraden müssen, als Strahlen durch die Kreispunkte betrachtet, je 3-fach gezählt werden.

§ 2. *Die axiale Regelfläche einer durchaus willkürlichen Gerade  $l$ .*

Der Grad dieser Regelfläche ist  $3(3 + 1) = 12$ .

Es ist  $l$  auf ihrer Regelfläche eine 9-fache Gerade.

Es sei  $A(a_1, a_2)$  die Spur von  $l$  in  $[w]$ ,  $B'(b_1', b_2')$  die von  $l$  in  $[w']$ .

Der Schnitt mit  $[w]$  besteht aus den 2-fachen durch  $A$  gehenden

isotropen Geraden, aus den 2-fachen durch  $A$  parallel zu den reellen und imaginären Axen gelegten Strahlen und aus einer Kurve 4<sup>ten</sup> Grades.

Diese hat in Bezug auf das Coordinatendreieck  $AIJ$  die Gleichung

$$\xi_2(\xi_1 + a_1 \xi_3)^3 - \xi_1(\xi_2 + a_2 \xi_3)^3 + (b_2' \xi_1 - b_1' \xi_2) \xi_3^3 = 0. \quad (5a)$$

Diese Kurve 4<sup>ten</sup> Grades ist circular. Die in den Kreispunkten gelegten Tangenten treffen sich in  $A$ . Die Kreispunkte sind Wendepunkte.

Der Punkt  $A$  liegt auf der Kurve und hat als Tangente die axiale Projektion aus  $l$  auf  $[w]$  des Bildes  $A'$  von  $A$ .

Die Punkte  $E$  und  $E'$  gehören der Kurve auch an; ihre Tangenten convergiren nach dem Punkte  $T'$ , der durch

$$\frac{\xi_1}{a_1} = \frac{\xi_2}{a_2} = -\frac{3\xi_3}{2},$$

oder

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = -\frac{x_3}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6a)$$

angewiesen ist.

Der Schnitt mit  $[w']$  ist eine Kurve 12<sup>ten</sup> Grades, deren auf das Coordinatendreieck  $B'IJ$  bezogene Gleichung lautet:

$$\xi_2(\xi_1 + b_1' \xi_4)^{\frac{1}{3}} - \xi_1(\xi_2 + b_2' \xi_4)^{\frac{1}{3}} + (a_2 \xi_1 - a_1 \xi_2) \xi_4^{\frac{1}{3}} = 0,$$

oder

$$[\xi_2^3(\xi_1 + b_1' \xi_4) - \xi_1^3(\xi_2 + b_2' \xi_4) + (a_2 \xi_1 - a_1 \xi_2)^3 \xi_4]^3 + 27 \xi_1^3 \xi_2^3 (a_2 \xi_1 - a_1 \xi_2)^3 (\xi_1 + b_1' \xi_4)(\xi_2 + b_2' \xi_4) \xi_4 = 0. \quad (7a)$$

Die Kreispunkte sind hier 3-fache; ihre Tangenten sind mit den durch  $A'$  gehenden isotropen Geraden identisch.

Der Punkt  $B'$  ist ein 9-facher; seine Tangenten sind die axialen Projektionen aus  $l$  auf  $[w']$  der 9 Bilder  $B$  von  $B'$ . Da von dieser 9 Bildern nur 3 reell sind, so sind auch von den 9 Zweigen durch  $B'$  nur 3 reell.

Die unendlich fernen Punkte der reellen und imaginären Axen gehören der Kurve als gewöhnliche Punkte an; ihre Asymptoten fallen mit der unendlich fernen Gerade zusammen, welche in den beiden Punkten je 3 Punkte mit der Kurve gemein hat; diese

Gerade ist also eine doppelte Wendetangente und die unendlich fernen Punkte der Axen sind Wendepunkte.

Auf der Regelfläche sind die Kreispunkte dreifache. Die Berührungsebenen des Kreispunktes  $I(X_1)$  sind in der Ebene

$$x_2 - a_2 x_3 - a_2^3 x_4 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8a)$$

die des Punktes  $J(X_2)$  in der Ebene

$$x_1 - a_1 x_3 - a_1^3 x_4 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9a)$$

vereinigt. Sie sind offenbar die Ebenen, welche den Strahl  $a \equiv AA'$  mit den Kreispunkten verbinden.

Die unendlich fernen Punkte der reellen und imaginären Axen sind gewöhnliche; ihre Berührungsebenen sind mit der Ebene  $[w]$  zusammengefallen.

Die *Doppelkurve* dieser Regelfläche ist vom Grade  $N + 3 = 15 + 3 = 18$ .

§ 3. Die axiale Regelfläche einer Gerade  $l$ , welche  $OO'$  schneidet.

Diese Regelfläche enthält  $OO'$  als eine *einfache* Gerade, für welche alle Berührungsebenen mit der durch  $l$  und  $OO'$  gelegten Ebene zusammengefallen sind.

Es sei

$$x_2 = tx_1$$

die Gleichung der durch  $l$  und  $OO'$  gelegten Ebene; man hat alsdann (siehe IV. Abschnitt § 7a, (S1) und (S2), S. 242)

$$\frac{b_2'}{b_1'} = \frac{a_2}{a_1} = t, \\ a_1 b_2' - a_2 b_1' = 0.$$

Die in  $[w]$  liegende Kurve hat nun die Gleichung

$$(x_2 - ta_1 x_3) x_1^3 - (x_1 - a_1 x_3) x_2^3 + b_1' (tx_1 - x_2) x_3^3 = 0. \quad (10a)$$

Sie hat in  $O$  einen Wendepunkt, dessen Tangente  $O$  mit  $A$  verbindet.

Die Gleichung der in  $[w]$  befindlichen Kurve lautet jetzt

$$(x_2 - tb_1' x_4) x_1^{\frac{1}{3}} - (x_1 - b_1' x_4) x_2^{\frac{1}{3}} + a_1 (tx_1 - x_2) x_4^{\frac{1}{3}} = 0,$$

oder

$$[(x_2 - tb_1' x_4)^3 x_1 - (x_1 - b_1' x_4)^3 x_2 + a_1^3 (tx_1 - x_2)^3 x_4]^3 + 27 x_1 x_2 x_4 (x_2 - tb_1' x_4)^3 (x_1 - b_1' x_4)^3 (tx_1 - x_2)^3 = 0. \quad (11a)$$

Diese Kurve hat in  $O'$  einen dreifachen Punkt, dessen Tangenten in der Bildgerade  $(x_2 = t^3 x_1)$  von  $OA$  vereinigt sind; diese Tangente hat in  $O'$  9 Punkte mit der Kurve gemein.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  hat, ausser den Singularitäten des allgemeinen Falles, einen gewöhnlichen Punkt in der Spur  $X_\mu$  von  $OO'$  in  $\omega_\mu$ ; die zu  $X_\mu$  gehörende Tangente ist die Schnittlinie von  $\omega_\mu$  mit der durch  $l$  und  $OO'$  gelegten Ebene.

Wenn  $l$  den Punkt  $O$  enthält, so zerfällt die in  $[w]$  liegende Kurve in 3 mal die Kurve 4<sup>ten</sup> Grades, deren Gleichung ist

$$(x_2 - b_2' x_4)^3 x_1 - (x_1 - b_1' x_4)^3 x_2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (12a)$$

Die Kreispunkte sind gewöhnliche; ihre Tangenten convergiren in  $O'$ .

Die unendlich fernen Punkte der reellen und imaginären Axen sind gewöhnliche; ihre Tangenten werden durch

$$2(x_2 \mp x_1) - 3(b_2' \mp b_1') x_4 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (13a)$$

dargestellt; sie schneiden die Gerade  $O'B'$  im Punkte  $T_0$ , welcher durch

$$\frac{x_1}{3b_1'} = \frac{x_2}{3b_2'} = \frac{x_4}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14a)$$

gegeben ist.

In der Kurve, welche dem Schnitte von  $[w]$  angehört, und durch

$$x_2 x_1^3 - x_1 x_2^3 + (b_2' x_1 - b_1' x_2) x_3^3 = 0$$

dargestellt wird, ist der gewöhnliche Punkt  $A$  in  $O$  gefallen; seine Tangente ist die Schnittlinie von  $[w]$  mit der durch  $OO'$  und  $l$  gelegten Ebene, also die orthogonale Projektion von  $l$  auf  $[w]$ .

Die unendlich fernen Punkte der reellen und imaginären Axen haben, als dreifache Punkte der Fläche, jeder nur eine Berührungsebene, und zwar bez.

$$2(x_2 \mp x_1) - 3(b_2' \mp b_1') x_4 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (13a)$$

Diese Ebene verbindet  $E$ , bez.  $E'$ , mit der Gerade  $OT_0$ :



$$\frac{x_1}{3b_1'} = \frac{x_2}{3b_2'} = \frac{x_4}{2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (14a)$$

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  hat jetzt ausser dem gewöhnlichen Punkte  $X_\mu$  zwei dreifache Punkte in den unendlichen fernen Punkten der Axen; ihre Tangenten sind vereinigt in den Schnittlinien von  $\omega_\mu$  mit den Ebenen (13a).

Wenn  $l$  durch  $O'$  geht, so bleibt die in  $[w]$  liegende Kurve vom 4<sup>ten</sup> Grade. Ihre Gleichung ist

$$(x_2 - a_2 x_3) x_1^3 - (x_1 - a_1 x_3) x_2^3 = 0. \cdot \cdot \cdot \cdot (15a)$$

Sie hat in  $O$  einen dreifachen Punkt, dessen Tangenten die Bilder sind der orthogonalen Projektion von  $l$  auf  $[w']$ .

Der Schnitt in  $[w']$  hat die Gleichung

$$x_2 x_1^{\frac{1}{3}} - x_1 x_2^{\frac{1}{3}} + (a_2 x_1 - a_1 x_2) x_4^{\frac{1}{3}} = 0,$$

oder

$$[x_2^3 x_1 - x_1^3 x_2 + (a_2 x_1 - a_1 x_2)^3 x_4^3] + 27 x_1^4 x_2^4 x_4 (a_2 x_1 - a_1 x_2)^3 = 0. (16a)$$

Der Punkt  $O'$  ist hier ein 9-facher; seine sämtlichen Tangenten sind in der orthogonalen Projektion von  $l$  auf  $[w']$  vereinigt.

Die unendlich fernen Punkte der Axen zeigen dasselbe Verhalten wie im allgemeinen Falle.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  weist also, ausser seinem gewöhnlichen Punkte  $X_\mu$ , keine Abweichungen mit dem Schnitte der allgemeinen Regelfläche auf.

§ 4. Die axiale Regelfläche einer zu den Abbildungsebenen parallelen Gerade  $l_\mu$ .

Der Grad dieser Regelfläche ist, wie im allgemeinen Falle, 12.

Die unendlich ferne Gerade der Abbildungsebenen ist jetzt auf dieser Fläche eine dreifache Gerade.

Es sei die Gerade  $l_\mu$  gegeben durch

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4, \} \cdot \cdot \cdot \cdot (17)$$

$$x_3 = \mu x_4. \} \cdot \cdot \cdot \cdot (18)$$

Der Schnitt in  $[w]$  besteht aus 9-mal der unendlich fernen Gerade und aus einer kubischen Kurve, deren Gleichung ist

$$\alpha_1 x_1^3 + \alpha_2 x_2^3 + \{\mu(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) + \alpha_4 x_4\} x_3^2 = 0. (19a)$$

Die Kurve schneidet die unendlich ferne Gerade in den 3 Bildern des unendlich fernen Punktes  $L_\mu$  von  $l_\mu$ , als Punkt von  $[w']$  betrachtet; die Tangenten dieser Punkte convergiren alle nach dem der Kurve *nicht* angehörenden Punkte  $O$ .

Der Schnitt in  $[w']$  besteht aus der dreifachen unendlich fernen Gerade und aus dieser Kurve 9<sup>ten</sup> Grades:

$$\mu(\alpha_1 x_1^{\frac{1}{3}} + \alpha_2 x_2^{\frac{1}{3}}) x_4^{\frac{1}{3}} + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + (\mu\alpha_3 + \alpha_4) x_4 = 0,$$

oder

$$[\mu^3 \alpha_1^3 x_1 x_4^2 + \mu^3 \alpha_2^3 x_2 x_4^2 + \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + (\mu\alpha_3 + \alpha_4) x_4\}^3]^3 - \\ - 27 \mu^6 \alpha_1^3 \alpha_2^3 x_1 x_2 x_4^4 \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + (\mu\alpha_3 + \alpha_4) x_4\}^3 = 0. \quad (20a)$$

Sie schneidet die unendlich ferne Gerade nur im unendlich fernen Punkte  $L_\mu$  von  $l_\mu$ ; dieser Punkt ist ein 6-facher, dessen sämtliche Tangenten mit der unendlich fernen Gerade zusammengefallen sind; diese Gerade hat in  $L_\mu$  9 Punkte mit der Kurve gemein.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  enthält ausser der 3-fachen unendlich fernen Gerade eine Kurve 9<sup>ten</sup> Grades, welche in  $L_\mu$  einen 6-fachen Punkt hat; sämtliche Tangenten von  $L_\mu$  sind in der unendlich fernen Gerade vereinigt (Ausnahme in  $[w]$ ).

Wenn die Gerade  $l_\mu$  den Kreispunkt  $I(X_1)$  enthält, wonach  $\alpha_1 = 0$ , so besteht die axiale Regelfläche aus der 3-fachen Ebene  $[w]$  und aus den dreifachen durch  $l_\mu$  an den Fokalcyylinder  $F_1$  gelegten Berührungsebenen. Letztere sind durch

$$\{\alpha_2 x_2 + (\mu\alpha_3 + \alpha_4) x_4\}^3 + \alpha_2^2 \{\mu\alpha_2 x_2 + (\mu\alpha_3 + \alpha_4) x_3\} (x_3 - \mu x_4)^2 = 0 \quad (21a)$$

angewiesen.

Wenn  $l_\mu$  sich in der Abbildungsebene  $[w']$  befindet, wonach  $\mu = 0$ , so finden wir für die in  $[w]$  liegende Kurve

$$\alpha_1 x_1^3 + \alpha_2 x_2^3 + \alpha_4 x_3^3 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (22a)$$

Sie ist die Bildkurve der in  $[w']$  liegenden Gerade.

Der Schnitt in  $[w']$  ist jetzt aus der 3-fachen unendlich fernen Gerade und der 9-fachen Gerade  $l_\mu$  zusammengesetzt.

Wenn  $l_\mu$  eine isotrope Gerade (durch  $I(X_1)$ ) in  $[w']$  ist, so zerfällt die Regelfläche, ausser der 3-fachen Ebene  $[w]$ , in die 3 dreifachen Ebenen, welche der Gleichung

$$(\alpha_2 x_2 + \alpha_4 x_4)^3 + \alpha_2^2 \alpha_4 x_3^3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (23a)$$

entsprechen.

§ 5. Die axiale Regelfläche einer zu den Abbildungsebenen parallelen Gerade  $l_\mu$ , welche  $OO'$  schneidet.

Man hat hier

$$\mu \alpha_3 + \alpha_4 = 0.$$

Die in  $[w]$  liegende Kurve hat nun die Gleichung

$$\alpha_1 x_1^3 + \alpha_2 x_2^3 + \mu (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) x_3^2 = 0 \quad . \quad . \quad (24a)$$

Sie ist vom 3<sup>ten</sup> Grade und hat in  $O$  einen Wendepunkt; die Wendetangente  $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0)$  ist zu der gegebenen Gerade parallel.

Weil die Tangenten der 3 unendlich fernen Punkte  $L_\mu'$  sich in  $O$  treffen, so sind diese Punkte sextactische und ist die unendlich ferne Gerade die harmonische Polare des Wendepunktes  $O$ .

Die kubische Kurve hat demnach in  $O$  einen *Mittelpunkt*.

Die in  $[w']$  befindliche Kurve 9<sup>ten</sup> Grades wird nun durch

$$\begin{aligned} & [\mu^3 \alpha_1^3 x_1 x_4^2 + \mu^3 \alpha_2^3 x_2 x_4^2 + (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^3]^3 - \\ & - 27 \mu^6 \alpha_1^3 \alpha_2^3 x_1 x_2 x_4^4 (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^2 = 0 \quad . \quad . \quad (25a) \end{aligned}$$

dargestellt.

Die Kurve hat in  $O'$  einen dreifachen Punkt, dessen sämtliche Tangenten vereinigt sind im Bilde der parallel mit  $l_\mu$  verlaufenden Gerade  $OL_\mu$ .

Die Regelfläche hat noch  $OO'$  als eine *einfache* Gerade, wonach der Schnitt mit  $\omega_\mu$  in  $X_\mu$  einen gewöhnlichen Punkt hat.

§ 6. Die axiale Regelfläche einer in der Ebene  $\varepsilon$  der reellen Axen liegenden Gerade.

Die Eigenschaften der Regelfläche einer in  $\varepsilon'$  liegenden Gerade werden aus den der vorliegenden Fläche durch Vertauschung von  $x_2$  mit  $-x_2$  hergeleitet.

Die axiale Regelfläche einer in  $\varepsilon$  liegenden Gerade ist aus 3mal dieser Ebene und aus einer Restfläche 9<sup>ten</sup> Grades zusammengesetzt.

Die Gerade  $l$  ist auf dieser Restfläche eine 6-fache.

Die Kreispunkte sind 3-fache Punkte; ihre Berührungsebenen sind in den Ebenen (8a) und (9a) vereinigt, wo  $a_1 = a_2 = a$  einzusetzen ist.

Der Punkt  $E'$  ( $x_1 = -x_2$ ) ist ein *gewöhnlicher*; seine Berührungsebene ist die Ebene  $[w]$ .

Die Gerade  $OO'$  gehört der Restfläche *nicht* an,

Dagegen ist der Schnittpunkt  $S$  von  $l$  mit  $OO'$  ein 6-facher Punkt.

Der Schnitt in  $[w]$  besteht aus den zwei 2-fachen durch die Spur  $A$  von  $l$  in  $[w]$  gelegten isotropen Geraden, aus der einfachen durch  $A$  parallel zur imaginären Axe verlaufenden Gerade und aus einer *kubischen* Kurve, deren auf  $AIJ$  bezogene Gleichung lautet:

$$\frac{\xi_2(\xi_1 + a\xi_3)^3 - \xi_1(\xi_2 + a\xi_3)^3 + b'(\xi_1 - \xi_2)\xi_3^3}{\xi_1 - \xi_2} = 0,$$

oder

$$\xi_1 \xi_2 (\xi_1 + \xi_2) + 3a \xi_1 \xi_2 \xi_3 + (b' - a^3) \xi_3^3 = 0. \quad (26a)$$

Diese kubische Kurve ist circular; die isotropen Asymptoten convergiren in  $A$ ; dieser Punkt gehört aber der Kurve *nicht* an.

Der unendlich ferne Punkt der reellen Axe liegt *nicht* auf der Kurve, wohl aber der unendlich ferne Punkt der imaginären Axe; die Tangente in diesem (gewöhnlichen) Punkte geht durch den Punkt  $T$ .

Der Punkt  $O$  gehört auch der Kurve *nicht* an.

Der Schnitt in  $[w']$  ist eine Kurve 9<sup>ten</sup> Grades. Ihre auf  $B'IJ$  bezogene Gleichung ist

$$\frac{\xi_2(\xi_1 + b'\xi_4)^{\frac{1}{3}} - \xi_1(\xi_2 + b'\xi_4)^{\frac{1}{3}} + a(\xi_1 - \xi_2)\xi_4^{\frac{1}{3}}}{\xi_1 - \xi_2} = 0,$$

oder

$$\frac{[\xi_2^3(\xi_1 + b'\xi_4) - \xi_1^3(\xi_2 + b'\xi_4) + a^3(\xi_1 - \xi_2)^3\xi_4]^3 + 27a^3\xi_1^3\xi_2^3\xi_4(\xi_1 + b'\xi_4)(\xi_2 + b'\xi_4)(\xi_1 - \xi_2)^3}{(\xi_1 - \xi_2)^3} = 0,$$

oder endlich

$$[\xi_1 \xi_2 (\xi_1 + \xi_2) + b'(\xi_1^2 + \xi_1 \xi_2 + \xi_2^2) \xi_4 - a^3(\xi_1 - \xi_2)^2 \xi_4]^3 - 27a^3 \xi_1^3 \xi_2^3 \xi_4 (\xi_1 + b'\xi_4)(\xi_2 + b'\xi_4) = 0. \quad (27a)$$

Die Kreispunkte sind 3-fache, deren Tangenten in die durch das Bild  $A'$  von  $A$  gehenden isotropen Geraden zusammengefallen sind.

Die Spur  $B'$  von  $l$  in  $[w']$  ist ein 6-facher Punkt; seine Tan-

genten sind die axialen Projektionen der 6 ausserhalb der zu  $[w]$  gehörenden reellen Axe liegenden Bilder von  $B'$ .

Der Punkt  $O'$  gehört der Kurve *nicht* an.

Der unendlich ferne Punkt der imaginären Axe ist ein Wendepunkt, dessen Tangente im Unendlichen liegt.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  ist eine Kurve 9<sup>ten</sup> Grades.

Diese hat in den Kreispunkten 3-fache Punkte, deren Tangenten die Schnitlinien sind von  $\omega_\mu$  mit den Ebenen (8a) und (9a), (wo  $a_1 = a_2 = a$  einzusetzen ist).

Der Schnittpunkt  $C_\mu$  von  $l$  mit  $\omega_\mu$  ist ein 6-facher Punkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $l$  auf  $[w]$  der 6 ausserhalb der Ebene der reellen Axen liegenden, nach  $C_\mu$  zielenden Congruenzstrahlen sind.

Der unendlich ferne Punkt der imaginären Axe ist ein Wendepunkt, dessen Tangente die unendlich ferne Gerade ist (Annahme in  $[w]$ ).

Die Kurve hat ausserdem *Doppelpunkte* in den Schnittpunkten von  $\omega_\mu$  mit der *Doppelkurve*.

Da  $l$  in einer singulären Ebene liegt, so wird der Grad der Doppelkurve erniedrigt; wir wollen ihn somit auf direktem Wege zu bestimmen versuchen und fragen zu diesem Zweck nach der Anzahl der Schnittpunkte mit  $l$ .

Wir operiren nun mit der Gleichung (siehe IV. Abschnitt, § 10a, S. 272)

$$f(\pi) \equiv (b' - \mu\pi) - (\pi + a)^3 = 0, \quad . \quad . \quad (28a)$$

oder

$$\pi^3 + 3a\pi^2 + (3a^2 + \mu)\pi + (a^3 - b') = 0.$$

Die Punkte, wo  $l$  die Doppelkurve schneidet, sind zunächst die Punkte  $D_{k,l}$ , welche die Bedingung

$$c_k + c_l = 0$$

veranlassen.

Wir haben also die folgende symmetrische Funktion der Wurzeln zu betrachten

$$(c_1 + c_2)(c_1 + c_3)(c_2 + c_3) = 0,$$

oder

$$c_1^2 c_2 + c_1^2 c_3 + c_2^2 c_1 + c_2^2 c_3 + c_3^2 c_1 + c_3^2 c_2 + 2 c_1 c_2 c_3 = 0,$$

also

$$(c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3)(c_1 + c_2 + c_3) - c_1 c_2 c_3 = 0.$$

Wenn wir über die Beziehungen

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= -3a, \\ c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3 &= 3a^2 + \mu, \\ c_1 c_2 c_3 &= -(a^3 - b') \end{aligned}$$

verfügen, so verwandelt sich die Bedingung in

$$-3a(3a^2 + \mu) + (a^3 - b') = 0,$$

oder

$$\mu = -\frac{8a^3 + b'}{3a}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29a)$$

Dieser Wert von  $\mu$  bestimmt auf  $l$  den einzigen einfachen Schnittpunkt  $D_{k,l}$  der Doppelkurve.

Die auf  $l$  befindlichen Doppelpunkte  $D_{pq,rs}$  der Doppelkurve sind hier aus der Bedingung

$$c_p c_s - c_q^2 = 0$$

zu bestimmen; wir haben uns daher mit der folgenden symmetrischen Funktion der Wurzeln zu beschäftigen:

$$(c_2 c_3 - c_1^2)(c_1 c_3 - c_2^2)(c_1 c_2 - c_3^2) = 0,$$

oder

$$\Sigma_3 c_1^3 c_2^3 - \Sigma_3 c_1^4 c_2 c_3 = 0,$$

also

$$(c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3)^3 - c_1 c_2 c_3 (c_1 + c_2 + c_3)^3 = 0,$$

oder

$$(3a^2 + \mu)^3 - 27a^3(a^3 - b') = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (30a)$$

Hieraus finden wir

$$\mu = -3a^2 + 3\tau_3 a \sqrt[3]{a^3 - b'}, \quad . \quad . \quad . \quad (31a)$$

wo  $\tau_3$  eine der 3<sup>ten</sup> Wurzeln aus der Einheit darstellt.

Die Gleichung (30a) (oder (31a)) bestimmt die 3 auf  $l$  liegenden Doppelpunkte der Doppelkurve. Die Doppelkurve hat somit  $2 \times 3 + 1 = 7$  Punkte mit  $l$  gemein.

Jede durch  $l$  gelegte Ebene liefert noch 3 ausserhalb  $l$  liegende Punkte dieser Kurve. Der Grad der Doppelkurve ist demnach  $7 + 3 = 10$ .

*Auf der axialen Regelfläche einer in der Ebene  $\varepsilon$  der reellen Axen befindlichen Gerade liegt eine Doppelkurve 10<sup>ten</sup> Grades.*

§ 7. *Die axiale Regelfläche einer in der Ebene der reellen Axen liegenden Gerade, welche durch  $O$  geht.*

Der Unterschied mit der vorhergehenden Regelfläche ist dieser, dass der Schnitt in  $[w']$  jetzt in eine 3-fache Kurve 3<sup>ten</sup> Grades zerfallen ist. Diese vertritt also einen Bestandteil 9<sup>ten</sup> Grades der Doppelkurve. Der übrige lineare Teil ist mit der zu  $[w]$  gehörenden imaginären Axe zusammengefallen. Alle Schnittpunkte von  $l$  mit der Doppelkurve sind ja, vermöge (29a) und (31a), im Punkte  $O$  vereinigt.

Ausserdem ist der Strahl  $OE'$ , d.h. die in  $[w]$  liegende imaginäre Axe, ein 2-facher, wonach auch  $E'$  der Doppelkurve angehört.

Die Gleichung der in  $[w]$  liegenden Kurve ist

$$x_1 x_2 (x_1 + x_2) + b' x_3^3 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (32a)$$

Die Kreispunkte und der unendlich ferne Punkt der imaginären Axe sind Wendepunkte, deren Tangenten alle in  $O$  convergiren.

Die 3-fache in  $[w]$  befindliche kubische Kurve wird durch

$$\frac{(\xi_1 + b' \xi_4) \xi_2^3 - (\xi_2 + b' \xi_4) \xi_1^3}{\xi_1 - \xi_2} = 0,$$

also durch

$$\xi_1 \xi_2 (\xi_1 + \xi_2) + b' (\xi_1^2 + \xi_1 \xi_2 + \xi_2^2) \xi_4 = 0 \quad . \quad . \quad (33a)$$

dargestellt.

Sie enthält die Kreispunkte und den unendlich fernen Punkt der imaginären Axe; die isotropen Asymptoten treffen sich in  $O'$ .

Der Punkt  $B'$  ist ein Doppelpunkt, dessen Tangenten durch

$$\xi_1^2 + \xi_1 \xi_2 + \xi_2^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (34a)$$

bestimmt sind.

Die Tangente des unendlich fernen Punktes der imaginären Axe geht durch den auf der reellen Axe liegenden Punkt  $T'_0$ :

$$\frac{x_1}{3b'} = \frac{x_2}{3b'} = \frac{x_4}{2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (35a)$$

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  ist eine Kurve 9-ten Grades, welche in den Kreispunkten 3-fache und im unendlich fernen Punkte der imaginären Axe einen Wendepunkt hat, mit der unendlich fernen Gerade als Tangente.

§ 8. *Die axiale Regelfläche einer in der Ebene der reellen Axen liegenden Gerade, welche durch  $O'$  geht.*

Die in  $[w]$  liegende Kurve bleibt hier eine einfache und behält also dieselben Eigenschaften wie im allgemeinen Falle.

Die in  $[w']$  befindliche Kurve hat nun die Gleichung

$$\frac{x_2 x_1^{\frac{1}{3}} - x_1 x_2^{\frac{1}{3}} + a(x_1 - x_2) x_4^{\frac{1}{3}}}{x_1 - x_2} = 0,$$

oder

$$\{x_1 x_2 (x_1 + x_2) - a^3 (x_1 - x_2)^2 x_4\}^3 + 27 x_1^4 x_2^4 x_4 = 0. \quad (36a)$$

Der Punkt  $O'$  ist ein 3-facher, dessen Tangenten in der reellen Axe vereinigt sind.

Der einfache Schnittpunkt von  $l$  mit der Doppelkurve ist jetzt durch

$$\mu = -\frac{8}{3} a^2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (37a)$$

angewiesen, die doppelten Schnittpunkte dagegen durch

$$\mu = 3a^2(-1 + \tau_3).$$

Einer von ihnen wird durch  $\mu = 0$  bestimmt und ist also mit dem Punkte  $O'$  identisch.

Die Doppelkurve ist noch immer vom 10<sup>ten</sup> Grade.

§ 9. *Die axiale Regelfläche einer in der Ebene der reellen Axen liegenden und zu diesen parallelen Gerade  $l_\mu$ .*

Die Fläche ist vom 8<sup>ten</sup> Grade.

Die unendlich ferne Gerade der Abbildungsebenen ist eine *Doppelgerade*.

Die in  $[w]$  liegende Kurve ist aus der unendlich fernen Gerade und aus einem Kegelschnitte zusammengesetzt.



Wir haben in § 5

$$\alpha_2 = -\alpha_1$$

einzusetzen.

Die Gleichung (24a) verwandelt sich alsdann, nach Teilung durch  $x_1 - x_2$ , in

$$x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + \mu x_3^2 = 0. \quad (38a)$$

Der Mittelpunkt dieses Kegelschnittes befindet sich in  $O$ .

Die in  $[w']$  befindliche Kurve ist ausgeartet in die 2-fache unendlich ferne Gerade und in eine Kurve 6<sup>ten</sup> Grades, welche durch

$$[(x_1 - x_2)^2 + \mu^3 x_4^2]^3 - 27\mu^6 x_1 x_2 x_4^4 = 0 \quad (39a)$$

dargestellt wird.

Diese Kurve hat im unendlich fernen Punkte der reellen Axe einen 4-fachen Punkt; alle Asymptoten sind in der unendlich fernen Gerade vereinigt, welche dort 6 Punkte mit der Kurve gemein hat.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  enthält die 2-fache unendlich ferne Gerade, nebst einer Kurve 6<sup>ten</sup> Grades, welche auch in dem unendlich fernen Punkte der reellen Axe einen 4-fachen Punkt hat, dessen Tangenten alle in der unendlich fernen Gerade vereinigt sind; diese hat in ihrem Berührungspunkte 6 Punkte mit der Kurve gemein.

Wir werden jetzt den Grad der Doppelkurve bestimmen.

Weil hier  $a = \infty$  und  $b' = \infty$  gilt, so ist die Untersuchung von Neuem anzufangen.

Eine durch  $l_\mu$  gelegte Ebene wird jetzt durch

$$x_1 - x_2 + \lambda(x_3 - \mu x_4) = 0 \quad (40)$$

dargestellt.

Zwei Strahlen  $p$  und  $q$  der Regelfläche liefern einen Punkt der Doppelkurve, wenn ihre Spuren  $P$  und  $Q$  in  $[w]$  mit  $E$  in einer Gerade liegen, also wenn man hat

$$p_1 - p_2 = q_1 - q_2 = -\lambda. \quad (41)$$

Die nach einem Punkte

$$\frac{x_1}{\rho} = \frac{x_2}{\rho} = \frac{x_3}{\mu} = x_4$$

der betrachteten Gerade zielenden Congruenzstrahlen schneiden  $[w]$  in Punkten  $P(p_1, p_2)$ , für welche gilt:

$$\begin{aligned}\rho &= p_1 \mu + p_1^3, \\ \rho &= p_2 \mu + p_2^3.\end{aligned}$$

Die beiden Coordinaten einer Spur  $P$  eines solchen Strahles in  $[w]$  sind also durch zwei der drei Wurzeln von

$$c^3 + \mu c - \rho = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42a)$$

bestimmt.

Wenn wir die Wurzeln von (42a) mit  $c_1, c_2$  und  $c_3$  bezeichnen, so gelten, vermöge (41), die folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned}c_1 - c_2 &= c_1 - c_3, \\ c_1 - c_2 &= c_3 - c_1, \\ c_1 - c_2 &= c_2 - c_3, \\ c_1 - c_2 &= c_3 - c_2, \\ c_1 - c_2 &= c_2 - c_1, \\ &\text{u. s. w. ;}\end{aligned}$$

es ist also entweder  $c_k = c_l$  oder  $c_1 + c_3 = 2c_2$  u. s. w.

Da  $c_k = c_l$  unzulässig ist, so erübrigen wir die Bedingung

$$(c_2 + c_3 - 2c_1)(c_1 + c_3 - 2c_2)(c_1 + c_2 - 2c_3) = 0,$$

oder

$$2(c_1 + c_2 + c_3)^3 - 9(c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3)(c_1 + c_2 + c_3) + 27c_1 c_2 c_3 = 0,$$

also, vermöge (42a),

$$\rho = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43a)$$

Der durch  $\rho = 0$  bestimmte Punkt, d. h.  $X_\mu$ , ist somit der einzige Punkt, nach dem zwei mit der gegebenen Gerade  $l_\mu$  coplanäre Strahlen zielen, also der einzige Schnittpunkt von  $l_\mu$  mit der Doppelkurve.

Die Wurzeln der entsprechenden Gleichung (42a), d. h. der Gleichung

$$c^3 + \mu c = 0,$$

sind offenbar

$$c_1 = 0, c_2 = + \sqrt{-\mu}, c_3 = - \sqrt{-\mu}.$$

Die 9 nach  $X_\mu$  zielenden Strahlen sind also bestimmt durch

$$\begin{aligned} 1^\circ \begin{cases} p_1 = c_1 \\ p_2 = c_1 \end{cases}, 2^\circ \begin{cases} p_1 = c_1 \\ p_2 = c_2 \end{cases}, 3^\circ \begin{cases} p_1 = c_1 \\ p_2 = c_3 \end{cases}, 4^\circ \begin{cases} p_1 = c_2 \\ p_2 = c_1 \end{cases}, 5^\circ \begin{cases} p_1 = c_2 \\ p_2 = c_2 \end{cases}, \\ 6^\circ \begin{cases} p_1 = c_2 \\ p_2 = c_3 \end{cases}, 7^\circ \begin{cases} p_1 = c_3 \\ p_2 = c_1 \end{cases}, 8^\circ \begin{cases} p_1 = c_3 \\ p_2 = c_2 \end{cases}, 9^\circ \begin{cases} p_1 = c_3 \\ p_2 = c_3 \end{cases}. \end{aligned}$$

Es leuchtet ein, dass sowohl die Combination  $(2^\circ, 7^\circ)$  wie die Combination  $(3^\circ, 4^\circ)$  der Bedingung (41a) genügt.

Man hat für  $(2^\circ, 7^\circ)$

$$p_1 - p_2 = q_1 - q_2 = -\lambda = - \sqrt{-\mu}, \text{ also } \lambda = + \sqrt{-\mu},$$

und für  $(3^\circ, 4^\circ)$

$$p_1 - p_2 = q_1 - q_2 = -\lambda = + \sqrt{-\mu}, \text{ also } \lambda = - \sqrt{-\mu}.$$

Der Punkt  $X_\mu$  erscheint somit als ein Doppelpunkt der Doppelkurve.

Jede durch  $l_\mu$  gelegte Ebene, schneidet  $[w]$  in einer Geraden des Strahlenbüschels  $(E)$ , also in einem Congruenzstrahle.

Diese Ebene enthält also noch 2 andere Congruenzstrahlen, welche sich in einem Punkte der Doppelkurve schneiden.

Die Schnittpunkte in  $[w]$  dürfen nicht in Betracht gezogen werden, da die Ebene  $[w]$  schon der totalen axialen Regelfläche entzogen ist.

Eine durch  $l_\mu$  gelegte Ebene enthält also ausserhalb  $l_\mu$  einen gewöhnlichen Punkt und auf  $l_\mu$  einen Doppelpunkt der Doppelkurve; diese ist also eine kubische Kurve mit einem Doppelpunkte, also eine *kubische Plankurve*.

Eine leichte Rechnung zeigt, dass diese Plankurve sich in der Ebene der imaginären Axen befindet.

#### § 10. Die axiale Regelfläche eines Congruenzstrahles $s$ .

Die Restfläche ist vom 6<sup>ten</sup> Grade.

Der Strahl  $s$  ist auf seiner Regelfläche eine 4-fache Gerade.

Die Kreispunkte gehören nun der Regelfläche *nicht* an.

Die Punkte  $E$  und  $E'$  sind gewöhnliche, deren Berührungsebenen in die Ebene  $[w]$  zusammengefallen sind.

Der Schnitt in  $[w]$  ist ausgeartet in die beiden 2-fachen reellen und imaginären Axen und in einen Kegelschnitt, dessen Gleichung ist:

$$\frac{\xi_2(\xi_1 + s_1 \xi_3)^3 - \xi_1(\xi_2 + s_2 \xi_3)^3 - (s_2^3 \xi_1 - s_1^3 \xi_2) \xi_3^3}{\xi_1 \xi_2} = 0,$$

oder

$$\xi_1^2 - \xi_2^2 + 3(s_1 \xi_1 - s_2 \xi_2) \xi_3 + 3(s_1^2 - s_2^2) \xi_3^2 = 0. \quad (44a)$$

Die Spur  $S$  ( $\xi_1 = \xi_2 = 0$ ) von  $s$  in  $[w]$  gehört dieser Kurve *nicht* an.

Die unendlich fernen Punkte des Kegelschnittes sind die Punkte  $E$  und  $E'$  der Axen. Der Kegelschnitt ist demnach eine rechtwinklige Hyperbel, deren Mittelpunkt der Schnittpunkt von  $OS$  mit der Gerade

$$2(\xi_1 - \xi_2) + 3(s_1 - s_2) \xi_3 = 0$$

ist, und somit durch

$$\frac{\xi_1}{3s_1} = \frac{\xi_2}{3s_2} = \frac{\xi_3}{-2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45a)$$

gegeben wird.

Die in  $[w']$  liegende Kurve wird durch

$$\frac{\xi_2(\xi_1 + s_1^3 \xi_4)^{\frac{1}{3}} - \xi_1(\xi_2 + s_2^3 \xi_4)^{\frac{1}{3}} + (s_2 \xi_1 - s_1 \xi_2) \xi_4^{\frac{1}{3}}}{\xi_1 \xi_2} = 0,$$

also durch

$$[\xi_1^2 - \xi_2^2 + 2s_1 s_2 (s_2 \xi_1 - s_1 \xi_2) \xi_4]^3 - 27(\xi_1 + s_1^3 \xi_4)(\xi_2 + s_2^3 \xi_4)(s_2 \xi_1 - s_1 \xi_2)^3 \xi_4 = 0. \quad (46a)$$

dargestellt.

Der Punkt  $S'$  ist ein 4-facher; seine Tangenten sind die axialen Projektionen aus  $s$  auf  $[w']$  der 4 auf der Fläche befindlichen nach  $S'$  zielenden Congruenzstrahlen.

Die unendlich fernen Punkte der reellen und imaginären Axen sind *Wendepunkte*, deren Tangenten im Unendlichen liegen.

Der Schnitt mit einer zu der Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  ist eine Kurve 6<sup>ten</sup> Grades. Diese hat im Schnittpunkte  $S_\mu$  von  $s$  mit  $\omega_\mu$  einen 4-fachen Punkt, und in den unendlich fernen Punkten der reellen und imaginären Axen Wendepunkte, deren Tangenten im Unendlichen liegen.

Wir wollen jetzt die *Doppelkurve* in Betracht ziehen.

Die Gleichungen  $s_1(\pi_1) = 0$  und  $s_2(\pi_2) = 0$  vom IV. Abschnitte (§ 12a, S. 291) haben hier diese Gestalt:

$$s_1(\pi_1) \equiv \pi_1^2 + 3s_1\pi_1 + (3s_1^2 + \mu) = 0, \quad . \quad . \quad (47a)$$

$$s_2(\pi_2) \equiv \pi_2^2 + 3s_2\pi_2 + (3s_2^2 + \mu) = 0. \quad . \quad . \quad (48a)$$

Die Schnittpunkte der Doppelkurve mit  $s$  werden (siehe S. 220) durch die Gleichung

$$\Pi \{(\pi_1)_p(\pi_2)_s - (\pi_1)_r(\pi_2)_q\} = 0$$

bestimmt. Bezeichnen wir die Wurzeln von  $s_1(\pi_1) = 0$  mit  $c_1$  und  $c_1'$  und die von  $s_2(\pi_2) = 0$  mit  $c_2$  und  $c_2'$ , so wird die Bedingung:

$$(c_1c_2 - c_1'c_2')(c_1c_2' - c_1'c_2) = 0,$$

oder

$$(c_1 + c_1')^2 c_2 c_2' - c_1 c_1' (c_2 + c_2')^2 = 0;$$

diese Gleichung lässt sich, vermöge (47a) und (48a), umformen in

$$\mu = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49a)$$

Der Schnittpunkt von  $s$  mit der Doppelkurve ist daher mit der Spur  $S'$  von  $s$  in  $[w']$  identisch.

Die 9 Bilder  $S, S_1, S_2 \dots S_8$  in  $[w]$  von  $S'$  sind bestimmt durch

$S$	$s_1, \quad s_2,$
$S_1$	$\tau_3 s_1, \tau_3 s_2,$
$S_2$	$\tau_3' s_1, \tau_3' s_2,$
$S_3$	$s_1, \tau_3 s_2,$
$S_4$	$s_1, \tau_3' s_2,$
$S_5$	$\tau_3 s_1, \quad s_2,$
$S_6$	$\tau_3' s_1, \quad s_2,$
$S_7$	$\tau_3 s_1, \tau_3' s_2,$
$S_8$	$\tau_3' s_1, \tau_3 s_2.$

Hieraus folgt, dass  $S$  mit  $S_1$  und  $S_2$  in einer Geraden liegt, womit auch in geometrischer Weise nachgewiesen ist, dass  $S'$  der Doppelkurve angehört.

Die Spuren in  $[w]$  der 9 Strahlen  $(s, p_1, p_2, \dots p_8)$ , welche nach einem auf  $s$  liegenden Punkte  $C$  zielen, befinden sich auf 3 durch  $X_1$  und 3 durch  $X_2$  verlaufenden Geraden.

Die zwei Punkte  $P_5$  und  $P_6$  werden auch mit  $S$  in einer Gerade sein, wenn  $P_3 P_5 P_6$  mit  $SX_1$  also  $P_3$  mit  $S$  zusammenfällt, d. h. wenn  $C$  zwei zusammenfallende Strahlen trägt. Wir schliessen hier-

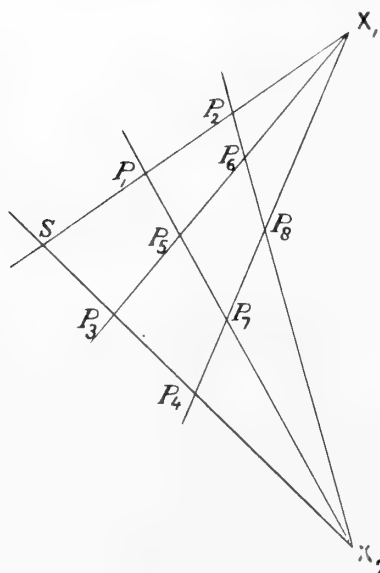


Fig. 14.

aus, dass auch die beiden Brennpunkten  $S_{f1}$  und  $S_{f2}$  auf der Doppelkurve liegen.

Auf  $s$  befinden sich also 3 Punkte der Doppelkurve.

Jede durch  $s$  gelegte Ebene enthält ausser  $s$  noch zwei Strahlen, welche einen Punkt  $D$  der Doppelkurve liefern. Daher:

Die Doppelkurve ist eine *rationale Raumkurve 4<sup>ten</sup> Grades*, welche  $s$  als *Trisekante* hat.

§ 11. Die axiale Regelfläche eines in der Ebene der reellen Axen liegenden Congruenzstrahles  $s$ .

Die Regelfläche ist vom 3<sup>ten</sup> Grade und trägt  $s$  als Doppelgerade.

Der unendlich ferne Punkt  $E'$  der imaginären Axe ist ein gewöhnlicher, dessen Berührungsebene mit  $[w]$  zusammenfällt.

Der Schnitt in  $[w]$  besteht aus der 2-fachen Gerade  $SE'$  (durch  $S$  zu der imaginären Axe parallel) und aus der Gerade

$$\xi_1 + \xi_2 + 3s\xi_3 = 0,$$

oder

$$x_1 + x_2 + sx_3 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50a)$$

Die Gerade  $SE'$  ist offenbar die Torsallinie  $t$ ; die Gerade (50a) ist also die *einfache Leitlinie*, und  $S$  ist der eine *Zwickpunkt* von  $s$ .

Der Torsalpunkt  $T$  von  $t$  ist der Schnittpunkt der Gerade (50a) mit der durch  $\xi_1 + \xi_2 = 0$  dargestellten Torsallinie  $t$ , also mit dem unendlich fernen Punkte  $E'$  der imaginären Axe identisch.

Die zwei Strahlen  $p_6$  und  $p_7$  (siehe Fig. 14), welche sich in einem Punkte  $C$  auf  $s$  stützen und nicht mit  $s$  in einer der singulären Ebenen liegen, sind die zwei Erzeugenden der kubischen Regelfläche, welche sich in diesem Punkte  $C$  der Doppelgerade  $s$  schneiden. Weil  $s$ ,  $p_5$  und  $p_8$  immer durch  $\varepsilon$  verbunden bleiben, rücken die Strahlen  $p_5$ ,  $p_6$ ,  $p_7$ ,  $p_8$ , also ins Besondere  $p_6$  und  $p_7$  zusammen, falls  $p_3 = p_4$ , also falls der auf  $s$  liegende Punkt  $C$

zwei zusammenfallende Tangenten an der Fokalfläche trägt. Dies geschieht, wenn  $C$  der Schnittpunkt  $S_s$  (nicht der Berührungspunkt  $S_f$ ) von  $s$  mit der Fokalfläche, oder, was dasselbe ist, mit der kubischen Fokalkurve in  $\varepsilon$  ist.

Dieser Punkt  $S_s$  wird durch

$$4 \xi_3 + 3 s^2 \xi_1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51a)$$

bestimmt und ist offenbar der *zweite Zurückpunkt* auf  $s$ .

Der fragliche Strahl  $\rho_s$  durch  $S_s$  schneidet  $[w]$  auf der reellen Axe in einem Punkte  $P_s$ , für welchen man hat

$$x_1 = x_2 = -\frac{s}{2} x_3,$$

oder

$$\xi_1 = \xi_2 = -\frac{3}{2} s \xi_3. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52a)$$

Der Punkt  $P_s$  liegt natürlich auf der einfachen Leitlinie (50a) und ist der zweite Torsalpunkt.

Der Schnitt der Regelfläche mit  $[w']$  ist offenbar die Bildkurve der einfachen Leitlinie und wird demnach durch

$$x_1^{\frac{1}{3}} + x_2^{\frac{1}{3}} + s x_3^{\frac{1}{3}} = 0,$$

oder

$$(x_1 + x_2 + s^3 x_3)^3 - 27 s^3 x_1 x_2 x_3 = 0, \quad . \quad . \quad (53a)$$

oder auch durch

$$(\xi_1 + \xi_2)^3 + 9 s^3 (\xi_1^2 - \xi_1 \xi_2 + \xi_2^2) \xi_3 = 0 \quad . \quad (54a)$$

dargestellt.

Aus (54a) geht hervor, dass  $S'$  ein Doppelpunkt ist, dessen Tangenten durch

$$\xi_1^2 - \xi_1 \xi_2 + \xi_2^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55a)$$

angewiesen sind.

Der unendlich ferne Punkt  $E'$  der imaginären Axe ist ein Wendepunkt, dessen Tangente im Unendlichen liegt.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  ist eine kubische Kurve, die im Schnittpunkte  $S_\mu$  von  $s$  mit

$\omega_\mu$  einen Doppelpunkt hat und im unendlich fernen Punkte  $E'$  der imaginären Axe einen Wendepunkt, mit der unendlich fernen Gerade als Wendetangente.

Wenn wir für  $s$  die Gerade  $OO'$  wählen, so ist die kubische Regelfläche ausgeartet in die 3-fache Ebene der imaginären Axen, welche die kubische Fokalkurve trägt.

§ 12. Die axiale Regelfläche einer in der Abbildungsebene  $[w]$  liegenden Gerade  $l_\infty$ .

Die Fläche ist vom 4<sup>ten</sup> Grade und trägt  $l_\infty$  als eine einfache Leitlinie.

Die unendlich ferne Gerade der Abbildungsebenen ist eine einfache Erzeugende der Regelfläche; ihre Berührungsebene fällt mit  $[w]$  zusammen; diese Ebene hat mit der Fläche 3 mal die unendlich ferne Gerade gemein, welche also eine Inflexionskante der Fläche ist.

Der Schnitt mit  $[w]$  besteht also aus der einfachen Gerade  $l_\infty$  und aus der 3-fachen unendlich fernen Gerade.

Die Gerade  $l_\infty$  werde durch

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

dargestellt.

Der Schnitt in  $[w']$  besteht jetzt aus der einfachen unendlich fernen Gerade und aus einer kubischen Kurve, deren Gleichung lautet:

$$\alpha_1 x_1^3 + \alpha_2 x_2^3 + \alpha_3 x_3^3 = 0,$$

oder

$$(\alpha_1^3 x_1 + \alpha_2^3 x_2 + \alpha_3^3 x_3)^3 - 27 \alpha_1^3 \alpha_2^3 \alpha_3^3 x_1 x_2 x_3 = 0. \quad (57a)$$

Diese Kurve hat die unendlich ferne Gerade und die durch  $O'$  gehenden isotropen Geraden als Wendetangenten. Die auf diesen Geraden liegenden Wendepunkte sind bez. durch

$$\begin{aligned} L_3' \dots \alpha_1^3 x_1 + \alpha_2^3 x_2 &= 0, \\ L_1' \dots \alpha_2^3 x_2 + \alpha_3^3 x_3 &= 0, \\ L_2' \dots \alpha_1^3 x_1 + \alpha_3^3 x_3 &= 0 \end{aligned}$$

bestimmt. Sie sind bez. die in  $[w']$  befindlichen Bilder der Schnittpunkte  $L_3, L_1, L_2$  von  $l_\infty$  mit der unendlich fernen Gerade und den beiden durch  $O$  verlaufenden isotropen Geraden.



Die Strahlen  $L_1 L_1'$  und  $L_2 L_2'$  sind Inflexionskanten mit den durch  $OO'$  gelegten isotropen Ebenen als Inflexionsebenen. Auch die Gerade  $L_3 L_3'$ , d. h. die unendlich ferne Gerade, ist, wie schon bemerkt wurde, eine Inflexionskante; ihre Inflexionsebene fällt mit  $[w]$  zusammen.

Vermöge des auf S. 302 u. f. Behandelten, hat  $l_x$  hier (wo  $n=1$ ) keinen Punkt mit der Doppelkurve gemein.

Jede durch  $l_x$  gelegte Ebene enthält von der Doppelkurve 3 Punkte ausserhalb  $l_x$  und keinen auf  $l_x$ .

Diese Doppelkurve ist daher eine *kubische Raumkurve*.

§ 13. *Die axiale Regelfläche einer in der Abbildungsebene  $[w]$  liegenden Gerade  $l_x$ , welche durch  $O$  geht.*

Wenn wir die Gerade  $l_x$  durch

$$x_2 = kx_1$$

darstellen, so ist die Gleichung ihrer axialen Regelfläche (siehe (144a), S. 302)

$$k^2(1 - k^2)^2(kx_1 - x_2)x_3^3 + (k^3x_1 - x_2)^3x_4 = 0. \quad (58a)$$

Auf dieser Fläche 4<sup>ten</sup> Grades ist das Bild  $l'$  von  $l_x$ ,

$$\left. \begin{aligned} k^3x_1 - x_2 &= 0, \\ x_3 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

eine 3-fache Gerade. Diese Gerade enthält somit sämtliche Doppelpunkte.

Die Fläche schneidet  $[w]$  in 3 mal der unendlich fernen Gerade und in der einfachen Gerade  $l_x$ .

Die Ebene  $[w']$  wird getroffen in der *einfachen* unendlich fernen Gerade und in der 3-fachen Gerade  $l'$ , der *Bildgerade* von  $l_x$ .

Die Gerade  $OO'$  ist eine *einfache* Erzeugende der Fläche.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  enthält die unendlich ferne Gerade und eine *kubische* Kurve, welche durch  $X_\mu$  geht und im unendlich fernen Punkte  $L_3'$  von  $l'$  einen *Rückkehrpunkt* hat, dessen Tangente im Unendlichen liegt.

§ 14. *Die axiale Regelfläche der zu  $[w]$  gehörenden reellen Axe.*

Diese Fläche ist in die 3-fache Ebene der reellen Axen und in die Abbildungsebene  $[w]$  zerfallen.

§ 15. *Die Regelfläche der Strahlen, welche auf einem zu den Abbildungsebenen parallelen Kreise ruhen.*

Die Fläche ist vom 18<sup>ten</sup> Grade und trägt den Kreis als eine 9-fache Kurve.

Der Kreis werde durch

$$\alpha_3 \beta_3 x_1 x_2 + x_1 (\alpha_2 \beta_3 x_3 + \alpha_3 \beta_2 x_4) + x_2 (\alpha_1 \beta_3 x_3 + \alpha_3 \beta_1 x_4) + (\alpha_3 \beta_3 x_3^2 + \alpha_3 \beta_0 x_4^2) = 0, \quad (59)$$

$$x_3 = \mu x_4 \quad (60)$$

dargestellt.

Wir setzen noch

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 &= \alpha_3 \beta_3, \quad \gamma_0' = \mu \alpha_3 \beta_3, \quad \gamma_0'' = \mu^2 \alpha_3 \beta_3, \\ \gamma_1 &= \mu \alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2, \quad \gamma_2 = \mu \alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1, \\ \gamma_1' &= \mu (\mu \alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2), \quad \gamma_2' = \mu (\mu \alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1), \\ \gamma_3 &= \mu^2 \alpha_0 \beta_3 + \alpha_3 \beta_0. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Die Ebene  $[w]$  wird in einer Kurve 6<sup>ten</sup> Grades und in 3 2-fachen durch jeden der Kreispunkte gelegten Geraden geschnitten.

Die Kurve in  $[w]$  hat diese Gleichung:

$$\gamma_0 x_1^3 x_2^3 + \gamma_0' (x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3) x_3^2 + \gamma_0'' x_1 x_2 x_3^4 + \gamma_1 x_1^3 x_3^3 + \gamma_2 x_2^3 x_3^3 + \gamma_1' x_1 x_3^5 + \gamma_2' x_2 x_3^5 + \gamma_3 x_3^6 = 0. \quad (62a)$$

Die Tangenten der Kreispunkte, welche auch die Ausartungselementen des Gesamtschnittes bilden, werden durch

$$\gamma_0 x_2^3 + (\gamma_0' x_2 + \gamma_1 x_3) x_3^2 = 0 \quad (63a)$$

und

$$\gamma_0 x_1^3 + (\gamma_0' x_1 + \gamma_2 x_3) x_3^2 = 0 \quad (64a)$$

bestimmt.

Diese Tangenten haben ausser ihren Berührungspunkten keine Punkte mit der Kurve gemein.

Die in  $[w]$  liegende Kurve hat offenbar in den Kreispunkten 3-fache Punkte, und ist somit tricircular.

Der Schnitt mit  $[w']$  ist eine Kurve 18<sup>ten</sup> Grades, deren Gleichung lautet

$$\begin{aligned} \gamma_0 x_1 x_2 + \gamma_0' (x_1 x_2^{\frac{1}{3}} + x_1^{\frac{1}{3}} x_2) x_4^{\frac{2}{3}} + \gamma_0'' x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{3}} x_4^{\frac{4}{3}} + \gamma_1 x_1 x_4 + \\ + \gamma_2 x_2 x_4 + \gamma_1' x_1^{\frac{1}{3}} x_4^{\frac{5}{3}} + \gamma_2' x_2^{\frac{1}{3}} x_4^{\frac{5}{3}} + \gamma_3 x_4^2 = 0, \quad (65a) \end{aligned}$$

oder, nach Rationalisirung,

$$\begin{aligned} & \left[ (\gamma_0 x_2 + \gamma_1 x_4)^3 x_1 x_4^2 + \mu^3 (\gamma_0 x_1 + \gamma_2 x_4)^3 x_2 x_4^2 + \mu^6 \gamma_0^3 x_1 x_2 x_4^4 + (\gamma_0 x_1 x_2 + \gamma_1 x_1 x_4 + \gamma_2 x_2 x_4 + \gamma_3 x_4^2)^3 \right] - \\ & - 27 \mu^6 (\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_0 \gamma_3)^2 x_1 x_2 x_4^8 \left[ (\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_0 \gamma_3) \gamma_0^3 x_1 x_2 x_4^6 + \right. \\ & \left. - (\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_0 \gamma_3) (\gamma_0 x_1 x_2 + \gamma_1 x_1 x_4 + \gamma_2 x_2 x_4 + \gamma_3 x_4^2)^3 x_4^2 + \gamma_0 (\gamma_0 x_1 x_2 + \gamma_1 x_1 x_4 + \gamma_2 x_2 x_4 + \gamma_3 x_4^2) \times \right. \\ & \left. \mu^3 (\gamma_0 x_2 + \gamma_1 x_4)^3 x_1 x_4^2 + \mu^3 (\gamma_0 x_1 + \gamma_2 x_4)^3 x_2 x_4^2 + \mu^6 \gamma_0^3 x_1 x_2 x_4^4 + (\gamma_0 x_1 x_2 + \gamma_1 x_1 x_4 + \gamma_2 x_2 x_4 + \gamma_3 x_4^2)^3 \right] = 0. \end{aligned} \quad (66a)$$

Die Kreispunkte sind 9-fache. Von den Tangenten von  $I$  sind je 3 in einer der 3 Geraden

$$(\gamma_0 x_2 + \gamma_1 x_4)^3 + \gamma_0'^3 x_2 x_4^2 = 0$$

vereinigt, und von denjenigen von  $J$  je 3 in einer der 3 Geraden

$$(\gamma_0 x_1 + \gamma_2 x_4)^3 + \gamma_0'^3 x_1 x_4^2 = 0.$$

Jede dieser Tangenten hat alle ihre Schnittpunkte mit der Kurve in ihrem Berührungspunkte vereinigt.

Auf der Fläche sind die Kreispunkte 9-fache; von ihren Berührungsebenen sind je 3 bez. in einer der 3 Ebenen

$$(\gamma_0 x_2 + \gamma_1 x_4)^3 + \gamma_0'^2 (\gamma_0' x_2 + \gamma_1 x_3) (x_3 - \mu x_4)^2 = 0 \quad (67a)$$

und

$$(\gamma_0 x_1 + \gamma_2 x_4)^3 + \gamma_0'^2 (\gamma_0' x_1 + \gamma_2 x_3) (x_3 - \mu x_4)^2 = 0 \quad (68a)$$

zusammengefallen.

Diese Ebenen bilden bez. die Regelfläche der Strahlen, welche auf den durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises  $\gamma_\mu$  gehenden isotropen Geraden ruhen.

§ 16. *Die Regelfläche der Strahlen, welche auf einem zu den Abbildungsebenen parallelen Kreise ruhen, dessen Mittelpunkt auf  $OO'$  liegt.*

Wir haben im Vorhergehenden

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0, \quad \alpha_2 = 0, \\ \beta_1 &= 0, \quad \beta_2 = 0 \end{aligned}$$

einzusetzen, wonach der Kreis durch

$$\alpha_3 \beta_3 x_1 x_2 + \alpha_0 \beta_3 x_3^2 + \alpha_3 \beta_0 x_4^2 = 0, \quad \left\{ \begin{array}{ll} & (69) \\ x_3 = \mu x_4 & (70) \end{array} \right.$$

dargestellt wird.

Die in  $[w]$  liegende Kurve ist jetzt durch

$$x_1^3 x_2^3 + \mu (x_1^2 + x_2^2) x_1 x_2 x_3^2 + \mu^2 x_1 x_2 x_3^4 + \frac{\gamma_3}{\gamma_0} x_3^6 = 0 \quad (71a)$$

bestimmt.

Die Tangenten der Kreispunkte, welche zugleich die Ausartungselemente des Gesamtschnittes bilden, sind jetzt durch

$$x_2(x_2^2 + \mu x_3^2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72a)$$

und

$$x_1(x_1^2 + \mu x_3^2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73a)$$

angewiesen.

Einer der Brennpunkte der Kurve liegt also in O.

Die Gleichung der in  $[w']$  befindlichen Kurve lautet:

$$x_1 x_2 + \mu (x_1 x_2^{\frac{1}{3}} + x_1^{\frac{1}{3}} x_2) x_4^{\frac{2}{3}} + \mu^2 x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{3}} x_4^{\frac{4}{3}} + \frac{\gamma_3}{\gamma_0} x_4^2 = 0, \quad (74a)$$

oder

$$\begin{aligned} & [\mu^3 \gamma_0^3 x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2 + \mu^3 x_4^2) x_4^2 + (\gamma_0 x_1 x_2 + \gamma_3 x_4^2)^3]^3 + \\ & + 27 \mu^6 \gamma_0^3 \gamma_3^2 x_1 x_2 x_4^8 + \gamma_0^3 \gamma_3 x_1 x_2 x_4^6 + \gamma_3 (\gamma_0 x_1 x_2 + \gamma_3 x_4^2)^3 x_4^2 - \\ & - (\gamma_0 x_1 x_2 + \gamma_3 x_4^2) [\mu^3 \gamma_0^3 x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2 + \mu^3 x_4^2) x_4^2 + (\gamma_0 x_1 x_2 + \gamma_3 x_4^2)^3] = 0. \quad (75a) \end{aligned}$$

Von den 3 verschiedenen in jedem der Kreispunkte gelegten Tangenten ist eine mit einer durch  $O'$  verlaufenden isotropen Gerade zusammengefallen, wonach  $O'$  ein Brennpunkt der Kurve ist.

Von den 3 verschiedenen Berührungsebenen jedes Kreispunktes ist eine mit einer durch  $OO'$  gelegten isotropen Ebene zusammengefallen. Wir können also  $OO'$  als eine Brennnlinie der Fläche betrachten.

§ 17. *Die Regelfläche der Strahlen, welche auf einem zu den Abbildungsebenen parallelen Kreise ruhen, der  $OO'$  schneidet.*

Wir haben nun

$$\alpha_0 = 0, \quad \beta_0 = 0,$$

mithin

$$\gamma_3 = 0$$

einzusetzen.

Die Gleichungen des Kreises sind also

$$\alpha_3 \beta_3 x_1 x_2 + x_1 (\alpha_2 \beta_3 x_3 + \alpha_3 \beta_2 x_4) + x_2 (\alpha_1 \beta_3 x_3 + \alpha_3 \beta_1 x_4) = 0, \quad (76)$$

$$x_3 = \mu x_4. \quad (77)$$

Es ist  $OO'$  hier eine einfache Gerade der Regelfläche.

Die in  $[w]$  befindliche Kurve hat nun die Gleichung

$$\gamma_0 x_1^3 x_2^3 + \gamma_0' x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) x_3^2 + \gamma_0'' x_1 x_2 x_3^4 + \gamma_1 x_1^3 x_3^3 + \gamma_2 x_2^3 x_3^3 + \gamma_1' x_1 x_3^5 + \gamma_2' x_2 x_3^5 = 0. \quad (78a)$$

Sie hat in  $O$  einen gewöhnlichen Punkt, mit

$$\gamma_1' x_1 + \gamma_2' x_2 = 0 \quad (79a)$$

als Tangente.

Diese Gerade ist die Schnittlinie von  $\omega_\mu$  mit der Ebene, welche  $OO'$  mit der in  $X_\mu$  (dem Schnittpunkte des Kreises mit  $OO'$ ) an den Kreis gelegten Tangente verbindet.

Die in  $[w']$  liegende Kurve wird jetzt dargestellt durch

$$\gamma_0 x_1 x_2 + \gamma_0' (x_1 x_2^{\frac{1}{3}} + x_1^{\frac{1}{3}} x_2) x_4^{\frac{2}{3}} + \gamma_0'' x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{3}} x_4^{\frac{4}{3}} + \gamma_1 x_1 x_4 + \gamma_2 x_2 x_4 + \gamma_1' x_1^{\frac{1}{3}} x_4^{\frac{5}{3}} + \gamma_2' x_2^{\frac{1}{3}} x_4^{\frac{5}{3}} = 0, \quad (80a)$$

oder

$$\begin{aligned} & [\mu^3 (\gamma_0 x_2 + \gamma_1 x_1)^3 x_1 x_4^2 + \mu^3 (\gamma_0 x_1 + \gamma_2 x_4)^3 x_2 x_4^2 + \mu^6 \gamma_0^3 x_1 x_2 x_4^4 + \\ & + (\gamma_0 x_1 x_2 + \gamma_1 x_1 x_4 + \gamma_2 x_2 x_4)^3]^3 - 27 \mu^6 \gamma_1^2 \gamma_2^2 x_1 x_2 x_4^8 \times \\ & \times [\gamma_1 \gamma_2 \gamma_0^3 x_1 x_2 x_4^6 + \gamma_1 \gamma_2 (\gamma_0 x_1 x_2 + \gamma_1 x_1 x_4 + \gamma_2 x_2 x_4)^3 x_4^2 + \\ & + \gamma_0 (\gamma_0 x_1 x_2 + \gamma_1 x_1 x_4 + \gamma_2 x_2 x_4) [\mu^3 (\gamma_0 x_2 + \gamma_1 x_1)^3 x_1 x_4^2 + \\ & + \mu^3 (\gamma_0 x_1 + \gamma_2 x_4)^3 x_2 x_4^2 + \mu^6 \gamma_0^3 x_1 x_2 x_4^4 + \\ & + (\gamma_0 x_1 x_2 + \gamma_1 x_1 x_4 + \gamma_2 x_2 x_4)^3]^3] = 0. \quad (81a) \end{aligned}$$

Diese Kurve hat in  $O'$  einen 3-fachen Punkt; seine einzige Tangente ist

$$\gamma_1' x_1^{\frac{1}{3}} + \gamma_2' x_2^{\frac{1}{3}} = 0,$$

oder

$$\gamma_1'^3 x_1 + \gamma_2'^3 x_2 = 0, \quad (82a)$$

also das Bild der in  $O$  an die Kurve in  $[w]$  gelegten Tangente.

Die Berührungsebenen längs  $OO'$  sind alle in die durch  $OO'$  und die Tangente von  $X_\mu$  gelegte Ebene (79a) zusammengefallen.

§ 18. *Die Regelfläche der Strahlen, welche auf einem in der Abbildungsebene  $[w]$  liegenden Kreise ruhen.*

Die vorhergehende Regelfläche zerfällt jetzt in 12 mal die Abbildungsebene  $[w]$  und in eine Fläche 6<sup>ten</sup> Grades.

Auf dieser Restfläche ist der Kreis eine *einfache* Kurve.

Wir haben nur im Vorigen  $\mu = 0$  zu setzen, und finden alsdann für die Gleichungen des Kreises

$$\alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_2 x_1 x_3 + \alpha_1 x_2 x_3 + \alpha_0 x_3^2 = 0, \quad \left. \begin{array}{l} \\ x_4 = 0. \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} (83) \\ (84) \end{array}$$

Der Schnitt in  $[w]$  besteht nun, ausser dem Kreise, aus seinen isotropen Tangenten, jede doppelt gezählt.

Die in  $[w']$  liegende Bildkurve des Kreises in  $[w]$  hat nun die Gleichung

$$\alpha_3 x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{3}} + \alpha_2 x_1^{\frac{1}{3}} x_4^{\frac{1}{3}} + \alpha_1 x_2^{\frac{1}{3}} x_4^{\frac{1}{3}} + \alpha_0 x_4^{\frac{2}{3}} = 0, \quad (85a)$$

oder

$$\begin{aligned} & (\alpha_3^3 x_1 x_2 + \alpha_2^3 x_1 x_4 + \alpha_1^3 x_2 x_4 + \alpha_0^3 x_4^2)^3 - \\ & - 27 (\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_0 \alpha_3)^2 x_1 x_2 x_4^2 \{ (\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_0 \alpha_3) (\alpha_3^3 x_1 x_2 + \alpha_0^3 x_4^2) + \\ & + \alpha_0 \alpha_3 (\alpha_3^3 x_1 x_2 + \alpha_2^3 x_1 x_4 + \alpha_1^3 x_2 x_4 + \alpha_0^3 x_4^2) \} = 0. \end{aligned} \quad (86a)$$

Die Kreispunkte sind 3-fache; ihre Tangenten sind in den einzigen Bildern der isotropen Tangenten des Kreises vereinigt.

Die in  $[w']$  liegende Kurve schneidet die isotrope Gerade  $OJ$  3 mal im 3-fachen Punkte  $J$  und noch 3 mal im Bilde  $M_1'$  des Punktes  $M_1$ , wo der gegebene Kreis die Gerade  $OJ$  schneidet. Der Punkt  $M_1'$  ist ein Wendepunkt, mit  $M_1'J \equiv OJ$  als Tangente. Analoges gilt für  $M_2'$ .

Auf der Fläche sind die Kreispunkte 3-fache; die Berührungsebenen in  $I$  (bez.  $J$ ) sind alle 3 zusammengefallen in die Ebene, welche die isotrope Tangente des gegebenen Kreises mit ihrem Bilde verbindet.

Die Geraden  $M_1 M_1'$  und  $M_2 M_2'$  sind Inflexionskanten, mit den durch  $OO'$  gelegten isotropen Ebenen als Berührungsebenen.

Der Schnitt der Regelfläche mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  ist eine tricircular Kurve 6<sup>ten</sup> Grades. Die Schnittpunkte von  $\omega_\mu$  mit den Geraden  $M_1 M_1'$  und  $M_2 M_2'$  sind Wendepunkte.

§ 19. *Die Regelfläche der Strahlen, welche auf einem in der Abbildungsebene  $[w]$  liegenden Kreise ruhen, dessen Mittelpunkt  $O$  ist.*

Hier gilt

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0,$$

wonach der Kreis diese Gleichungen hat:

$$\alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_0 x_3^2 = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} . . . . . \end{array} \right. \quad (87)$$

$$x_4 = 0. \quad \left\{ \begin{array}{l} . . . . . \end{array} \right. \quad (88)$$

Die Regelfläche ist wiederum vom 6<sup>ten</sup> Grade und trägt den Kreis als eine *einfache* Kurve.

Die isotropen Geraden, welche, doppelt gerechnet, auch dem Gesamtschnitte in  $[w]$  angehören, gehen jetzt durch  $O$ .

Die in  $[w']$  liegende Kurve hat die Gleichung

$$(\alpha_3^3 x_1 x_2 + \alpha_0^3 x_4^2)^3 = 0. . . . . \quad (89a)$$

Der Schnitt in  $[w']$  besteht also aus dem 3-fachen *Bildkreise* (89a) des gegebenen Kreises. Der Bildkreis hat seinen Mittelpunkt in  $O'$ .

Die Regelfläche hat in den Kreispunkten 3-fache Punkte, deren Berührungsebenen alle in den durch  $OO'$  gelegten isotropen Ebenen vereinigt sind.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  ist eine tricircular Kurve 6<sup>ten</sup> Grades, deren sämtliche Brennpunkte in  $X_\mu$  vereinigt sind.

§ 20. *Die Regelfläche der Strahlen, welche auf einem in der Abbildungsebene  $[w]$  liegenden Kreise ruhen, der  $O$  enthält.*

Jetzt ist

$$\alpha_0 = 0$$

einzusetzen.

Der Kreis wird also durch

$$\alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_2 x_1 x_3 + \alpha_1 x_2 x_3 = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} . . . \end{array} \right. \quad (90)$$

$$x_4 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} . . . \end{array} \right. \quad (91)$$

dargestellt.

Auch diese Regelfläche ist vom 6<sup>ten</sup> Grade und trägt den gegebenen Kreis als eine einfache Kurve.

Der Schnitt in  $[w]$  besteht, ausser dem Kreise, aus dessen isotropen Tangenten, jede doppelt gezählt.

Die Gleichung der in  $[w']$  liegenden Bildkurve ist jetzt

$$\alpha_3 x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{1}{3}} + \alpha_2 x_1^{\frac{1}{3}} x_4^{\frac{1}{3}} + \alpha_1 x_2^{\frac{1}{3}} x_4^{\frac{1}{3}} = 0, \quad . \quad . \quad (92a)$$

oder

$$(\alpha_3^3 x_1 x_2 + \alpha_2^3 x_1 x_4 + \alpha_1^3 x_2 x_4)^3 - 27 \alpha_1^3 \alpha_2^3 \alpha_3^3 x_1^2 x_2^2 x_4^2 = 0. \quad (93a)$$

Der Punkt  $O'$  ist hier ein 3-facher; seine sämtlichen Tangenten sind vereinigt im Bilde der in  $O$  an den Kreis in  $[w]$  gelegten Tangente.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  ist eine tricirculare Kurve 6<sup>ten</sup> Grades, welche in  $X_\mu$  einen gewöhnlichen Punkt hat; seine Tangente ist die Schnittlinie von  $\omega_\mu$  mit der Berührungsebene von  $OO'$ , welche diese Gerade mit der in  $O$  an den Kreis gelegten Tangente verbindet.



## ABTEILUNG B.

---

*Die Congruenz, welche der Gleichung*

$$w'^2 = c^{-1} w^3$$

*angehört.*

### § 1. Allgemeine Eigenschaften.

In der vorliegenden *parabolischen* Congruenz hat man

$$m = 3, \quad n = 2.$$

Der *Bündelgrad* der Congruenz ist also 9, ihr *Feldgrad* 6, ihr *Axengrad*  $N = 39$ .

Von den 9 nach einem reellen Punkte zielenden Strahlen sind nur 3 reell.

Die *Fokalfläche* besteht aus zwei imaginären Cylindern, deren Spitzen sich in den Kreispunkten  $I$  und  $J$  der Abbildungsebenen befinden.

Diese Fokalcylinder haben die Gleichungen

$$\begin{aligned} 4x_3^3 - 27x_2x_4^2 &= 0, & 4x_3^3 - 27x_1x_4^2 &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Die beiden kubischen Cylinder haben die unendlich ferne Gerade der Abbildungsebenen als Rückkehrkante, mit der Abbildungsebene  $[w]$  als Berührungsebene.

Die Cylinder schneiden sich ausserdem noch in *einer* kubischen Plankurve, welche in der Ebene der reellen Axen liegt. Diese Kurve hat im unendlich fernen Punkte der reellen Axe einen Rückkehrpunkt mit der zu  $[w]$  gehörenden reellen Axe als Tangente. Sie hat noch in  $O'$  einen Wendepunkt mit  $OO'$  als Tangente.

Die Gleichungen des Congruenzstrahles  $p$  lauten:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= p_1 x_3 + p_1^{\frac{3}{2}} x_4, \\ x_2 &= p_2 x_3 + p_2^{\frac{3}{2}} x_4. \end{aligned} \right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (2b)$$

Der Brennpunkt  $P_{f1}$  des Strahles  $p$  ist durch

$$\frac{x_1}{p_1(3p_2^{\frac{1}{2}} - 2p_1^{\frac{1}{2}})} = \frac{x_2}{p_2^{\frac{3}{2}}} = \frac{x_3}{3p_2^{\frac{1}{2}}} = \frac{x_4}{-2}, \cdot \cdot \cdot \cdot (3b)$$

der Brennpunkt  $P_{f2}$  durch

$$\frac{x_1}{p_1^{\frac{3}{2}}} = \frac{x_2}{p_2(3p_1^{\frac{1}{2}} - 2p_2^{\frac{1}{2}})} = \frac{x_3}{3p_1^{\frac{1}{2}}} = \frac{x_4}{-2} \cdot \cdot \cdot (4b)$$

bestimmt.

*Singuläre Ebenen* sind

1° jede Ebene, welche einen Strahl  $p$  mit einem der Kreispunkte verbindet; sie enthält ein Strahlengebilde 3<sup>ter</sup> Klasse, dessen Einhüllende eine kubische Kurve mit einem Rückkehrpunkt im Kreispunkte ist;

2° die Ebene  $x_1 = x_2$ , d. h. die Ebene der reellen Axen; sie trägt ein Strahlengebilde 3<sup>ter</sup> Klasse, dessen Einhüllende mit der kubischen Fokalkurve identisch ist;

3° die Abbildungsebene  $[w]$  ( $x_4 = 0$ ) mit Strahlenbüscheln in den Kreispunkten und im unendlich fernen Punkte der reellen Axe.

*Singuläre Punkte* sind

1° die Kreispunkte mit Strahlenbüscheln in  $[w]$ ;

2° der unendlich ferne Punkt der reellen Axen mit einem Strahlenbüschel in  $[w]$ .

Von den 9 Strahlen, welche nach einem Punkte von  $[w]$  zielen, fallen 4 mit den durch diesen Punkt verlaufenden isotropen Geraden und *einer* mit der durch diesen Punkt zu der reellen Axe parallel verlaufenden Gerade zusammen. Die übrigen 4 Strahlen verbinden den Punkt mit seinen 4 in  $[w']$  liegenden Bildern. Von diesen 4 Bildern sind nur 2 reell.

Als Strahlen, welche den Kreispunkten entstammen, sind die in  $[w]$  liegenden isotropen Geraden 6-fach zu zählen.

§ 2. Die axiale Regelfläche einer durchaus willkürlichen Gerade  $l$ .

Der Grad dieser Regelfläche ist  $3(3 + 2) = 15$ .

Es ist  $l$  auf ihrer Regelfläche eine 9-fache Gerade.

Es sei  $A(a_1, a_2)$  die Spur von  $l$  in  $[w]$ ,  $B'(b'_1, b'_2)$  die von  $l$  in  $[w']$ .

Der Schnitt in  $[w]$  besteht aus den 2-fachen durch  $A$  gelegten isotropen Geraden, aus der einfachen durch  $A$  zu der reellen Axe parallel verlaufenden Gerade und aus einer Kurve 10<sup>ten</sup> Grades. Diese hat, bezogen auf das Coordinatendreieck  $AIJ$ , die folgende Gleichung:

$$\xi_2(\xi_1 + a_1 \xi_3)^{\frac{3}{2}} - \xi_1(\xi_2 + a_2 \xi_3)^{\frac{3}{2}} + (b_2' \xi_1 - b_1' \xi_2) \xi_3^{\frac{3}{2}} = 0,$$

oder

$$\{\xi_2^2(\xi_1 + a_1 \xi_3)^3 + \xi_1^2(\xi_2 + a_2 \xi_3)^3 - (b_2' \xi_1 - b_1' \xi_2)^2 \xi_3^3\}^2 - 4 \xi_1^2 \xi_2^2 (\xi_1 + a_1 \xi_3)^3 (\xi_2 + a_2 \xi_3)^3 = 0. \quad (5b)$$

Die Kreispunkte sind 4-fache; ihre sämtlichen Tangenten sind in den durch  $A$  gehenden isotropen Geraden vereinigt.

Der unendlich ferne Punkt der reellen Axe ist ein Rückkehrpunkt, dessen Tangente durch

$$\xi_1 - \xi_2 + 3(a_1 - a_2) \xi_3 = 0$$

angewiesen ist; sie enthält den Punkt

$$\frac{\xi_1}{a_1} = \frac{\xi_2}{a_2} = -3 \xi_3,$$

oder

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = -2 x_3. \quad (6b)$$

Der Punkt  $A$  ist ein 4-facher; er hat als Tangenten die axialen Projektionen aus  $l$  auf  $[w]$  der sich in  $A$  treffenden Congruenzstrahlen.

Der Schnitt in  $[w']$  ist eine Kurve 15<sup>ten</sup> Grades.

Ihre auf  $B'IJ$  bezogene Gleichung lautet

$$\xi_2(\xi_1 + b_1' \xi_4)^{\frac{2}{3}} - \xi_1(\xi_2 + b_2' \xi_4)^{\frac{2}{3}} + (a_2 \xi_1 - a_1 \xi_2) \xi_4^{\frac{2}{3}} = 0,$$

oder

$$[\xi_2^3(\xi_1 + b_1' \xi_4)^2 - \xi_1^3(\xi_2 + b_2' \xi_4)^2 + (a_2 \xi_1 - a_1 \xi_2)^3 \xi_4^2]^3 + 27 \xi_1^3 \xi_2^3 (a_2 \xi_1 - a_1 \xi_2)^3 (\xi_1 + b_1' \xi_4)^2 (\xi_2 + b_2' \xi_4)^2 \xi_4^2 = 0. \quad (7b)$$

Die Kreispunkte sind hier 6-fache; von den Tangenten sind je 3 in den durch die 4 Bilder  $A'$  von  $A$  verlaufenden isotropen Geraden vereinigt.

Der Punkt  $B'$  ist ein 9-facher; seine Tangenten sind die axialen Projektionen aus  $l$  auf  $[w']$  der 9 in  $B'$  convergirenden Congruenzstrahlen. Von den 9 Zweigen sind nur 3 reell.

Der unendlich ferne Punkt der reellen Axe ist ein Rückkehrpunkt, dessen Tangente im Unendlichen liegt.

Auf der Regelfläche sind die Kreispunkte 6-fache. Die Berührungsebenen des Kreispunktes  $I(X_1)$  sind in den 2 Ebenen

$$x_2 - a_2 x_3 \pm a_2^{\frac{3}{2}} x_4 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8b)$$

diejenigen des Kreispunktes  $J(X_2)$  in den 2 Ebenen

$$x_1 - a_1 x_3 \pm a_1^{\frac{3}{2}} x_4 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9b)$$

vereinigt. Sie sind offenbar die Ebenen, welche die 4 Strahlen  $a = AL'$  mit den Kreispunkten verbinden.

Der unendlich ferne Punkt der reellen Axe ist ein uniplanarer Doppelpunkt, dessen Berührungsebene mit  $[w]$  zusammenfällt.

Die *Doppelkurve* dieser Regelfläche ist vom Grade  $N + 15 = 39 + 15 = 54$ .

§ 3. Die axiale Regelfläche einer Gerade  $l$ , welche  $OO'$  schneidet.

Auf dieser Regelfläche ist  $OO'$  eine 4-fache Gerade; sämtliche Berührungsebenen sind in der Ebene, welche  $OO'$  mit  $l$  verbindet, vereinigt.

Es sei

$$x_2 = tx_1$$

die Gleichung der durch  $l$  und  $OO'$  gelegten Ebene. Wir haben alsdann (siehe IV. Abschnitt § 7a, (81) und (82), S. 242)

$$\begin{aligned} \frac{b_2'}{b_1'} &= \frac{a_2}{a_1} = t, \\ a_1 b_2' - a_2 b_1' &= 0. \end{aligned}$$

Die in  $[w]$  liegende Kurve hat nun die Gleichung

$$(x_2 - ta_1 x_3) x_1^{\frac{3}{2}} - (x_1 - a_1 x_3) x_2^{\frac{3}{2}} + b_1' (tx_1 - x_2) x_3^{\frac{3}{2}} = 0,$$

oder

$$\begin{aligned} &[(x_2 - ta_1 x_3)^2 x_1^3 + (x_1 - a_1 x_3)^2 x_2^3 - b_1'^2 (tx_1 - x_2)^2 x_3^3] - \\ &- 4 x_1^3 x_2^3 (x_2 - ta_1 x_3)^2 (x_1 - a_1 x_3)^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (10b) \end{aligned}$$

Diese Kurve hat in  $O$  einen 4-fachen Punkt, dessen sämtliche Tangenten mit der Gerade  $OA$  zusammengefallen sind; diese Gerade hat in  $O$  6 Punkte mit der Kurve gemein.

Der Schnitt in  $[w']$  wird durch

$$(x_2 - tb_1' x_4) x_1^{\frac{2}{3}} - (x_1 - b_1' x_4) x_2^{\frac{2}{3}} + a_1 (tx_1 - x_2) x_4^{\frac{2}{3}} = 0,$$

oder

$$[(x_2 - tb_1' x_4)^3 x_1^2 - (x_1 - b_1' x_4)^3 x_2^2 + a_1^3 (tx_1 - x_2)^3 x_4^2]^3 + \\ + 27 x_1^2 x_2^2 x_4^2 (x_2 - tb_1' x_4)^3 (x_1 - b_1' x_4)^3 (tx_1 - x_2)^3 = 0 \quad (11b)$$

dargestellt.

Diese Kurve hat in  $O'$  einen 6-fachen Punkt, von dessen Tangenten je 3 mit den 2 Bildern von  $OA$  zusammengefallen sind; jede dieser Tangenten hat in  $O'$  9 Punkte mit der Kurve gemein.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  hat, ausser den Singularitäten des allgemeinen Schnittes, einen 4-fachen Punkt in der Spur  $X_\mu$  von  $OO'$  in  $\omega_\mu$ ; die Tangenten dieses Punktes sind in die Schnittlinie von  $\omega_\mu$  mit der durch  $l$  und  $OO'$  gelegten Ebene zusammengefallen.

Wenn  $l$  durch  $O$  geht, so ist die in  $[w]$  liegende Kurve zerfallen in 3 mal die Kurve 5<sup>ten</sup> Grades, deren Gleichung lautet:

$$(x_2 - b_2' x_4)^3 x_1^2 - (x_1 - b_1' x_4)^3 x_2^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (12b)$$

Die Kreispunkte sind Rückkehrpunkte, deren Tangenten sich in  $O'$  treffen.

Der unendlich ferne Punkt der reellen Axe ist ein gewöhnlicher; seine Tangente ist durch

$$x_1 - x_2 - 3(b_1' - b_2') x_4 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (13b)$$

angewiesen; sie schneidet die reelle Axe im Punkte  $T_0$ :

$$\frac{x_1}{3b_1'} = \frac{x_2}{3b_2'} = x_4. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14b)$$

Die in  $[w]$  befindliche Kurve wird jetzt durch

$$x_2 x_1^{\frac{3}{2}} - x_1 x_2^{\frac{3}{2}} + b_1' (tx_1 - x_2) x_3^{\frac{3}{2}} = 0,$$

oder

$$\{x_1^3 x_2^2 + x_1^2 x_2^3 - b_1'^2 (tx_1 - x_2)^2 x_3^3\}^2 - 4 x_1^5 x_2^5 = 0 \quad (15b)$$

dargestellt.

Der 4-fache Punkt  $A$  ist nun in  $O$  gefallen; seine Tangenten sind alle vereinigt in der Schnittlinie von  $[w]$  mit der durch  $OO'$  und  $l$  gelegten Ebene, also in der orthogonalen Projektion von  $l$  auf  $[w]$ .

Der unendlich ferne Punkt der reellen Axe ist ein 3-facher Punkt auf der Fläche; seine einzige Berührungsebene ist die Ebene

$$(x_1 - x_2) - 3(b_1' - b_2')x_4 = 0; \quad . \quad . \quad . \quad (13b)$$

sie verbindet jenen Punkt mit der Gerade  $OT_0$ :

$$\frac{x_1}{3b_1'} = \frac{x_2}{3b_2'} = x_4. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14b)$$

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  hat jetzt, ausser dem 4-fachen Punkte  $X_\mu$ , einen 3-fachen Punkt im Unendlichen auf der reellen Axe; die Tangenten daselbst sind in der Schnittlinie von  $\omega_\mu$  mit der Ebene (13b) vereinigt.

Wenn die Gerade  $l$  durch  $O'$  geht, so zerfällt die in  $[w]$  befindliche Kurve in eine 2-fache Kurve 5<sup>ten</sup> Grades, welche durch

$$(x_2 - a_2 x_3)^2 x_1^3 - (x_1 - a_1 x_3)^2 x_2^3 = 0 \quad . \quad . \quad (15'b)$$

bestimmt ist.

Sie hat in  $O$  einen 3-fachen Punkt, dessen Tangenten die 3 Bilder sind der orthogonalen Projektion von  $l$  auf  $[w']$ .

Die Kreispunkte sind jetzt Rückkehrpunkte, deren Tangenten sich in  $A$  treffen.

Der Punkt  $A$  ist ein *Doppelpunkt*; seine Tangenten sind die axialen Projektionen aus  $l$  auf  $[w]$  der 2 Geraden  $O'A'$ .

Der Schnitt in  $[w']$  hat die Gleichung

$$x_2 x_1^{\frac{2}{3}} - x_1 x_2^{\frac{2}{3}} + (a_2 x_1 - a_1 x_2) x_4^{\frac{2}{3}} = 0,$$

oder

$$[x_1^2 x_2^3 - x_1^3 x_2^2 + (a_2 x_1 - a_1 x_2)^3 x_4^2]^3 + 27 x_1^5 x_2^5 x_4^2 (a_2 x_1 - a_1 x_2)^3 = 0. \quad (16b)$$

Der Punkt  $O'$  ist hier ein 9-facher; seine sämtlichen Tangenten sind in der orthogonalen Projektion von  $l$  auf  $[w']$  vereinigt.

Der unendlich ferne Punkt der reellen Axe zeigt dieselben Eigenschaften wie im allgemeinen Falle.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  zeigt ausser ihrem 4-fachen Punkte  $L_\mu$  keinen Unterschied mit dem Schnitte der allgemeinen Regelfläche.

§ 4. Die axiale Regelfläche einer zu den Abbildungsebenen parallelen Gerade  $l_\mu$ .

Der Grad dieser Regelfläche ist 15.

Die unendlich ferne Gerade der Abbildungsebenen ist hier eine 6-fache Gerade.

Wir wollen die Gerade  $l_\mu$  durch

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0, \quad \left. \begin{array}{l} \\ x_3 = x_4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} . \quad . \quad . \quad (17) \\ . \quad . \quad . \quad (18) \end{array}$$

darstellen.

Der Schnitt in  $[w]$  besteht aus 9 mal der unendlich fernen Gerade und aus einer Kurve 6<sup>ten</sup> Grades, deren Gleichung ist

$$\alpha_1 x_1^3 + \alpha_2 x_2^3 + \{\mu(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) + \alpha_4 x_3\} x_3^2 = 0,$$

oder

$$[\alpha_1^2 x_1^3 + \alpha_2^2 x_2^3 - \{\mu(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3) + \alpha_4 x_3\}^2 x_3^2 - 4\alpha_1^2 \alpha_2^2 x_1^3 x_2^3] = 0. (19b)$$

Die unendlich ferne Gerade schneidet diese Kurve 2 mal in jedem der 3 Bilder  $L_\mu'$  des unendlich fernen Punktes  $L_\mu$  von  $l_\mu$ , als Punkt von  $[w']$  betrachtet.

Eine leichte Rechnung zeigt, dass die 3 Punkte  $L_\mu'$  gewöhnliche Punkte sind, alle mit der unendlich fernen Gerade als Tangente.

Der Schnitt in  $[w']$  besteht aus der 6-fachen unendlich fernen Gerade und aus einer Kurve 9<sup>ten</sup> Grades, welche durch

$$\mu(\alpha_1 x_1^3 + \alpha_2 x_2^3) x_4^3 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + (\mu\alpha_3 + \alpha_4) x_4 = 0,$$

oder

$$[\mu^3 \alpha_1^3 x_1^2 x_4 + \mu^3 \alpha_2^3 x_2^2 x_4 + \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + (\mu\alpha_3 + \alpha_4) x_4\}^3] - 27 \mu^6 \alpha_1^3 \alpha_2^3 x_1^2 x_2^2 x_4^2 \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + (\mu\alpha_3 + \alpha_4) x_4\}^3 = 0 \quad (20b)$$

dargestellt wird.

Der unendlich ferne Punkt  $L_\mu$  von  $l_\mu$  ist ein 3-facher. Sämtliche Tangenten sind in der unendlich fernen Gerade vereinigt, welche daselbst 9 Punkte mit der Kurve gemein hat.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene

$\omega_\mu$  enthält, ausser der 6-fachen unendlich fernen Gerade, eine Kurve 9<sup>ten</sup> Grades, welche in  $L_\mu$  einen 3-fachen Punkt hat, dessen sämtliche Tangenten im Unendlichen liegen (Ausnahme in  $[w]$ ).

Wenn die Gerade  $l_\mu$  durch den Kreispunkt  $I(X_1)$  geht, wonach  $\alpha_1 = 0$ , so besteht die axiale Regelfläche aus der 6-fachen Ebene  $[w]$  und aus den 3 dreifachen durch  $l_\mu$  an den Fokalcyylinder  $F_1$  gelegten Berührungsebenen; letztere haben die Gleichung

$$\{\alpha_1 x_2 + (\mu \alpha_3 + \alpha_4) x_4\}^3 - \alpha_2 \{\mu \alpha_2 x_2 + (\mu \alpha_3 + \alpha_4) x_3\}^2 (x_3 - \mu x_4) = 0. \quad (21b)$$

Wenn  $l_\mu$  in der Abbildungsebene  $[w']$  liegt, wonach  $\mu = 0$ , so finden wir für die in  $[w]$  befindliche Kurve die Gleichung

$$\alpha_1 x_1^3 + \alpha_2 x_2^3 + \alpha_4 x_3^3 = 0,$$

oder

$$(\alpha_1^2 x_1^3 + \alpha_2^2 x_2^3 - \alpha_4^2 x_3^3)^2 - 4 \alpha_1^2 \alpha_2^2 x_1^3 x_2^3 = 0. \quad (22b)$$

Sie ist die *Bildkurve* 6<sup>ten</sup> Grades der in  $[w']$  liegenden Gerade.

Der Schnitt in  $[w']$  besteht jetzt, ausser der 6-fachen unendlich fernen Gerade, aus der 9-fachen Gerade  $l_\mu$  selbst.

Wenn die Gerade  $l_\mu$  eine isotrope (durch  $I(X_1)$ ) Gerade in  $[w']$  ist, so zerfällt die Regelfläche, ausser in die 6-fache Ebene  $[w]$ , in diese 3 dreifachen Ebenen:

$$(\alpha_2 x_2 + \alpha_4 x_4)^3 - \alpha_2 \alpha_4^2 x_3^3 = 0. \quad (23b)$$

§ 5. Die axiale Regelfläche einer zu den Abbildungsebenen parallelen Gerade  $l_\mu$ , welche  $OO'$  schneidet.

Es gilt hier

$$\mu \alpha_3 + \alpha_4 = 0.$$

Die in  $[w]$  liegende Kurve wird jetzt durch

$$\alpha_1 x_1^3 + \alpha_2 x_2^3 + \mu (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) x_3^3 = 0,$$

oder

$$\{\alpha_1^2 x_1^3 + \alpha_2^2 x_2^3 - \mu^2 (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^2 x_3^3\}^2 - 4 \alpha_1^2 \alpha_2^2 x_1^3 x_2^3 = 0 \quad (24b)$$

dargestellt. Sie ist vom 6<sup>ten</sup> Grade und hat in  $O$  einen 4-fachen Punkt, dessen sämtliche Tangenten mit der durch  $O$  zu  $l_\mu$  parallel verlaufenden Gerade zusammenfallen.

Die Kurve 9<sup>ten</sup> Grades in  $[w']$  ist jetzt durch



$$[\mu^3 \alpha_1^3 x_1^2 x_4 + \mu^3 \alpha_2^3 x_2^2 x_4 + (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^3]^3 - \\ - 27 \mu^6 \alpha_1^3 \alpha_2^3 x_1^2 x_2^2 x_4^2 (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^3 = 0. \quad (25b)$$

bestimmt.

Diese Kurve hat in  $O'$  einen 6-fachen Punkt, von dessen Tangenten je 3 in einem der beiden Bilder der zu  $l_\mu$  parallel verlaufenden Gerade  $OL_\mu$  vereinigt sind.

Ausser den Eigenschaften des vorigen §, ist noch zu erwähnen, dass  $OO'$  eine 4-fache Gerade ist und dass der Schnitt mit  $\omega_\mu$  demnach in  $X_\mu$  einen 4-fachen Punkt hat.

§ 6. *Die axiale Regelfläche einer in der Ebene der reellen Axen liegenden Gerade  $l$ .*

Die axiale Regelfläche einer in der Ebene der reellen Axen liegenden Gerade  $l$  besteht aus 3 mal dieser Ebene und aus noch einer Regelfläche vom 12<sup>ten</sup> Grade.

Auf dieser Restfläche ist  $l$  eine 6-fache Gerade.

Die Kreispunkte sind 6-fache; ihre Berührungsebenen sind in den Ebenen (8b) und (9b) vereinigt, wo noch  $a_1 = a_2 = a$  zu setzen ist.

Die Gerade  $OO'$  ist eine Doppelgerade der Fläche und zwar eine Rückkehrkante; ihre Berührungsebene ist die Ebene der reellen Axen.

Der Schnittpunkt  $S$  von  $l$  mit  $OO'$  ist ein 6-facher Punkt.

Weder der unendlich ferne Punkt der imaginären Axe noch derjenige der reellen Axe gehört der Fläche an.

Der Schnitt in  $[w]$  besteht aus der 2 zweifachen durch die Spur  $A$  von  $l$  in  $[w]$  verlaufenden isotropen Geraden und aus einer Kurve 8<sup>ten</sup> Grades, deren auf  $AIJ$  bezogene Gleichung lautet:

$$\frac{\xi_2(\xi_1 + a\xi_3)^{\frac{3}{2}} - \xi_1(\xi_2 + a\xi_3)^{\frac{3}{2}} + b'(\xi_1 - \xi_2)\xi_3^{\frac{3}{2}}}{\xi_1 - \xi_2} = 0,$$

oder

$$\{\xi_1^2 \xi_2^2 - 3a^2 \xi_1 \xi_2 \xi_3^2 - a^3(\xi_1 + \xi_2)\xi_3^3\}^2 - \\ - 2b'^2 \xi_3^3 \{\xi_1^2(\xi_2 + a\xi_3)^3 + \xi_2^2(\xi_1 + a\xi_3)^3\} + b'^4(\xi_1 - \xi_2)^2 \xi_3^6 = 0. \quad (26b)$$

Die Kreispunkte sind 4-fache; ihre Tangenten convergiren alle nach  $A$ .

Der Punkt  $A$  ist hier ein Doppelpunkt; seine Tangenten sind durch

$$(a^3 - b'^2)\xi_1^2 + 2(a^3 + b'^2)\xi_1 \xi_2 + (a^3 - b'^2)\xi_2^2 = 0$$

angewiesen.

Der Punkt  $O$  ist ein Rückkehrpunkt mit  $OA$  als Tangente.

Der unendlich ferne Punkt der reellen Axe gehört der Kurve *nicht* an.

Der Schnitt in  $[w']$  ist eine Kurve 12<sup>ten</sup> Grades, deren auf  $B'IJ$  bezogene Gleichung lautet:

$$\frac{\xi_2(\xi_1 + b'\xi_4)^2 - \xi_1(\xi_2 + b'\xi_4)^2 + a(\xi_1 - \xi_2)\xi_4^2}{\xi_1 - \xi_2} = 0,$$

oder

$$\frac{[\xi_2^3(\xi_1 + b'\xi_4)^2 - \xi_1^3(\xi_2 + b'\xi_4)^2 + a^3(\xi_1 - \xi_2)^3\xi_4^2]^3 + 27a^3\xi_1^3\xi_2^3\xi_4^2(\xi_1 + b'\xi_4)^2(\xi_2 + b'\xi_4)^2(\xi_1 - \xi_2)^3}{(\xi_1 - \xi_2)^3} = 0,$$

oder endlich

$$[\xi_1^2\xi_2^2 + 2b'\xi_1\xi_2(\xi_1 + \xi_2)\xi_4 + b'^2(\xi_1^2 + \xi_1\xi_2 + \xi_2^2)\xi_4^2 - a^3(\xi_1 - \xi_2)^2\xi_4^2]^3 - 27a^3\xi_1^3\xi_2^3\xi_4^2(\xi_1 + b'\xi_4)^2(\xi_2 + b'\xi_4)^2 = 0. \quad (27b)$$

Die Kreispunkte sind 6-fache; von ihren Tangenten sind je 3 in den durch die Bilder  $A'$  von  $A$  verlaufenden isotropen Geraden vereinigt.

Die Spur  $B'$  von  $l$  in  $[w']$  ist ein 6-facher Punkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen der 6 ausserhalb der zu  $[w]$  gehörenden reellen Axe liegenden Bilder von  $B'$  sind.

Der Punkt  $O'$  ist ein 3-facher; seine sämtlichen Tangenten sind vereinigt im ausserhalb der zu  $[w']$  gehörenden reellen Axe liegenden Bilde der reellen Axe von  $[w]$ , d. h. in der imaginären Axe von  $[w']$ .

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  ist eine Kurve 12<sup>ten</sup> Grades. Diese hat in den Kreispunkten 6-fache Punkte, deren Tangenten die Schnittlinien von  $\omega_\mu$  mit den Ebenen (8b) und (9b) (wo  $a_1 = a_2 = a$ ) sind.

Der Schnittpunkt  $C_\mu$  von  $l$  mit  $\omega_\mu$  ist ein 6-facher Punkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $l$  auf  $[w]$  der 6 ausserhalb der Ebene der reellen Axen liegenden nach  $C_\mu$  zielenden Congruenzstrahlen sind.

Der unendlich ferne Punkt der imaginären Axe gehört der Kurve *nicht* an.

Der Schnittpunkt  $X_\mu$  von  $\omega_\mu$  mit  $OO'$  ist ein Rückkehrpunkt, dessen Tangente die reelle Axe ist.

Die Kurve hat ausserdem *Doppelpunkte* in den Schnittpunkten von  $\omega_\mu$  mit der *Doppelkurve*.

Wir wollen zunächst den Grad dieser Doppelkurve bestimmen.

Unseren Ausgangspunkt bildet die Gleichung (siehe IV. Abschnitt, § 10a, S. 272)

$$f(\pi) \equiv (b' - \mu\pi)^2 - (\pi + a)^3 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (28b)$$

oder

$$\pi^3 + (3a - \mu^2)\pi^2 + (3a^2 + 2\mu b')\pi + (a^3 - b'^2) = 0.$$

Vermöge des in Abt. A (S. 385, 386) Dargelegten, werden die Schnittpunkte  $D_{k,l}$  von  $l$  mit der Doppelkurve durch die Bedingung

$$(c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3)(c_1 + c_2 + c_3) - c_1 c_2 c_3 = 0$$

geliefert.

Nun gilt hier

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= -(3a - \mu^2), \\ c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3 &= 3a^2 + 2\mu b', \\ c_1 c_2 c_3 &= -(a^3 - b'^2); \end{aligned}$$

wir finden also diese Beziehung:

$$-(3a - \mu^2)(3a^2 + 2\mu b') + (a^3 - b'^2) = 0,$$

oder

$$2b'\mu^3 + 3a^2\mu^2 - 6ab'\mu - (8a^3 + b'^2) = 0. \quad . \quad (29b)$$

Diese Gleichung bestimmt die 3 Werte von  $\mu$ , welche den 3 gewöhnlichen Schnittpunkten von  $l$  mit der Doppelkurve angehören.

In Abt. A (S. 386) haben wir gleichfalls gefunden, dass die auf  $l$  befindlichen Doppelpunkte  $D_{1q,rs}$  der Doppelkurve angewiesen sind durch

$$(c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3)^3 - c_1 c_2 c_3 (c_1 + c_2 + c_3)^3 = 0,$$

also hier durch

$$(3a^2 + 2\mu b')^3 - (a^3 - b'^2)(3a - \mu^2)^3 = 0,$$

oder

$$\begin{aligned} (a^3 - b'^2)\mu^6 - 9a(a^3 - b'^2)\mu^4 + 8b'^3\mu^3 + 9a^2(3a^3 + b'^2)\mu^2 + \\ + 54a^4b'\mu + 27a^3b'^2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (30b) \end{aligned}$$

oder auch durch

$$\mu^2 - 3a = -\tau_3 \frac{2\mu b' + 3a^2}{\sqrt[3]{a^3 - b'^2}}, \quad . \quad . \quad . \quad (31b)$$

wo  $\tau_3$  eine der 3<sup>ten</sup> Wurzeln der Einheit darstellt.

Die Gleichung (30b) (oder (31b)) bestimmt die 6 auf  $l$  liegenden Doppelpunkte der Doppelkurve. Letztere hat somit  $2 \times 6 + 3 = 15$  Punkte mit  $l$  gemein. Jede durch  $l$  gelegte Ebene trägt 6 Congruenzstrahlen, also ausserhalb  $l$  15 Punkte der Doppelkurve.

Der Grad der Doppelkurve ist demnach  $15 + 15 = 30$ . Also:

*Auf der axialen Regelfläche einer in der Ebene der reellen Axen liegenden Gerade liegt eine Doppelkurve 30<sup>ten</sup> Grades.*

§ 7. *Die axiale Regelfläche einer in der Ebene der reellen Axen liegenden Gerade, welche durch O geht.*

Die in  $[w']$  liegende Kurve ist jetzt in eine 3-fache Kurve 4<sup>ten</sup> Grades zerfallen. Diese vertritt sonach einen Bestandteil 12<sup>ten</sup> Grades der Doppelkurve. Es erübrigt also eine Doppelkurve 18<sup>ten</sup> Grades.

Die Gleichung (29b), welche die gewöhnlichen auf  $l$  befindlichen Punkte der Doppelkurve liefert, nimmt für  $a = 0$  diese Gestalt an:

$$\mu^3 - \frac{b'}{2} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29'b)$$

während die Doppelpunkte der Doppelkurve jetzt durch

$$\mu^3 = 0$$

und

$$\mu^3 = 8b' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31'b)$$

bestimmt sind.

Auf  $l$  liegen also 3 einfache und 3 Doppelpunkte, welche zusammen 9 Punkte der Doppelkurve vertreten. In jeder durch  $l$  gelegten Ebene befinden sich daher ausserhalb  $l$  9 Punkte.

Die Gleichung der in  $[w]$  liegenden Kurve 8<sup>ten</sup> Grades lautet:

$$x_1^4 x_2^4 - 2b'^2 x_1^2 x_2^2 (x_1 + x_2) x_3^3 + b'^4 (x_1 - x_2)^2 x_3^6 = 0. \quad (32b)$$

Die Kreispunkte sind 4-fache, deren Tangenten alle nach  $O$  convergiren; diese Tangenten haben in ihrem Berührungspunkte 6 Punkte mit der Kurve gemein.

Es ist  $O$  ein Rückkehrpunkt mit der reellen Axe als Tangente.

Die 3-fache Kurve 4<sup>ten</sup> Grades in  $[w']$  wird durch

$$\xi_1^2 \xi_2^2 + 2b' \xi_1 \xi_2 (\xi_1 + \xi_2) \xi_4 + b'^2 (\xi_1^2 + \xi_1 \xi_2 + \xi_2^2) \xi_4^2 = 0 \quad (33b)$$

angewiesen.

Die Kreispunkte sind Rückkehrpunkte, deren Tangenten sich in  $O'$  schneiden.

Der Punkt  $B'$  ist ein Doppelpunkt, dessen Tangenten durch

$$\xi_1^2 + \xi_1 \xi_2 + \xi_2^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34b)$$

gegeben sind.

In Bezug auf das Coordinatendreieck  $O'IJ$  lautet (33b):

$$x_1^2 x_2^2 - 3b'^2 x_1 x_2 x_4^2 + 3b'^3 (x_1 + x_2) x_4^3 = 0. \quad . \quad (33'b)$$

Hieraus geht hervor, dass  $O'$  ein gewöhnlicher Punkt ist, mit der imaginären Axe als Tangente.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  ist eine Kurve 12<sup>ten</sup> Grades, welche in den Kreispunkten 6-fache Punkte, in  $C_\mu$  (auf  $l$ ) einen 6-fachen, und in  $X_\mu$  (auf  $OO'$ ) einen Doppelpunkt hat.

§ 8. *Die axiale Regelfläche einer in der Ebene der reellen Axen liegenden Gerade, welche durch  $O'$  geht.*

Die in  $[w]$  liegende Kurve zerfällt hier in eine 2-fache Kurve 4<sup>ten</sup> Grades, deren Gleichung lautet ( $b' = 0$ ):

$$\xi_1^2 \xi_2^2 - 3a^2 \xi_1 \xi_2 \xi_3^2 - a^3 (\xi_1 + \xi_2) \xi_3^3 = 0. \quad . \quad (26'b)$$

Sie hat in den Kreispunkten Rückkehrpunkte, deren Tangenten durch  $A$  gehen.

Der Punkt  $A$  ist ein gewöhnlicher, dessen Tangente zu der imaginären Axe parallel ist.

In Bezug auf  $OIJ$  ist die Gleichung

$$x_1^2 x_2^2 - 2ax_1 x_2 (x_1 + x_2) x_3 + a^2 (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) x_3^2 = 0. \quad (26''b)$$

Sie zeigt, dass  $O$  ein Doppelpunkt ist, dessen Tangenten durch

$$x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = 0$$

bestimmt sind.

Die in  $[w']$  liegende Kurve hat jetzt die Gleichung

$$\{x_1^2 x_2^2 - a^3 (x_1 - x_2)^2 x_4^2\}^3 - 27a^3 x_1^5 x_2^5 x_4^2 = 0. \quad . \quad (36b)$$

Der Punkt  $O'$  ist ein 6-facher, dessen Tangenten mit der reellen Axe zusammenfallen.

Die Kreispunkte sind 6-fache; ihre Tangenten treffen sich in den 4 Punkten  $A'$ .

Die Doppelkurve ist zerfallen in eine 2-fache Plankurve 4<sup>ten</sup> Grades in  $[w]$  und in eine Kurve 26<sup>ten</sup> Grades.

Die einfachen Schnittpunkte von  $l$  mit der Doppelkurve sind aus

$$\mu = \infty$$

und

$$\mu^2 = \frac{8}{3} a, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37b)$$

die Doppelpunkte auf  $l$  dagegen aus

$$\mu^2 = 0$$

und

$$\mu^4 - 9 a \mu^2 + 27 a^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37'b)$$

bestimmt.

Die Restdoppelkurve hat also  $2 + 2 \times 6 = 14$  Punkte auf  $l$ .

Jede durch  $l$  gelegte Ebene enthält daher noch ausserhalb  $l$  12 Punkte der Doppelkurve.

§ 9. Die axiale Regelfläche einer in der Ebene der reellen Axen liegenden und zu diesen parallelen Gerade  $l_\mu$ .

Die Fläche ist vom 10<sup>ten</sup> Grade.

Die unendlich ferne Gerade der Abbildungsebenen ist eine 4-fache Gerade.

Der Schnitt in  $[w]$  ist zerfallen in 6 mal die unendlich ferne Gerade und in die Kurve 4<sup>ten</sup> Grades, für welche

$$(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)^2 - 2 \mu^2 (x_1^3 + x_2^3) x_3 + \mu^4 (x_1 - x_2)^2 x_3^2 = 0. \quad (38b)$$

Die Kreispunkte gehören dieser Kurve *nicht* an.

Die Kurve schneidet die unendlich ferne Gerade in den ausserhalb der reellen Axe liegenden Bildern des unendlich fernen Punktes der reellen Axe, als Punkt von  $[w']$  betrachtet. Die Schnittpunkte sind gewöhnliche; sie haben ihre Tangenten im Unendlichen.

Der Punkt  $O$  ist ein Rückkehrpunkt mit der reellen Axe als Tangente.

Die in  $[w']$  befindliche Kurve ist ausgeartet in die 4-fache unendlich ferne Gerade und in eine Kurve 6<sup>ten</sup> Grades, welche durch

$$\{(x_1 - x_2)^2 + \mu^3(x_1 + x_2)x_4\}^3 - 27\mu^6x_1^2x_2^2x_4^2 = 0 \quad (39b)$$

dargestellt wird.

Diese Kurve hat im Unendlichen auf der reellen Axe einen Rückkehrpunkt, dessen Tangente im Unendlichen liegt und daselbst 6 Punkte mit der Kurve gemein hat.

Der Punkt  $O'$  ist ein 3-facher, dessen sämtliche Tangenten in der imaginären Axe vereinigt sind.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  enthält, ausser der 4-fachen unendlich fernen Gerade, eine Kurve 6<sup>ten</sup> Grades, welche im unendlich fernen Punkte der reellen Axe dasselbe Verhalten zeigt wie die Kurve in  $[w']$ .

Der Punkt  $X_\mu$  ist ein Rückkehrpunkt, dessen Tangente zu den reellen Axen parallel ist.

Wir wollen nun den Grad der Doppelkurve bestimmen, und weisen somit auf das in Abt. A § 9 (S. 389 u.f.) Dargelegte.

Eine durch  $l_\mu$  gelegte Ebene wird durch

$$x_1 - x_2 + \lambda(x_3 - \mu x_4) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

dargestellt.

Zwei Strahlen  $p$  und  $q$  schneiden sich in einem Punkte der Doppelkurve, wenn man hat

$$p_1 - p_2 = q_1 - q_2 = -\lambda. \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

Für die nach einem Punkte

$$\frac{x_1}{\rho} = \frac{x_2}{\rho} = \frac{x_3}{\mu} = x_4$$

zielenden Strahlen sind die Spuren  $P$  ( $p_1$ ,  $p_2$ ) bestimmt durch

$$\begin{aligned} \rho &= p_1 \mu + p_1^{\frac{3}{2}}, \\ \rho &= p_2 \mu + p_2^{\frac{3}{2}}; \end{aligned}$$

die beiden Coordinaten  $p_1$  und  $p_2$  sind also Wurzeln der Gleichung

$$c^3 - \mu^2 c^2 + 2\rho\mu c - \rho^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (42b)$$

Die Bedingung (41) liefert nun

$$2(c_1 + c_2 + c_3)^3 - 9(c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3)(c_1 + c_2 + c_3) + 27c_1 c_2 c_3 = 0,$$

also, vermöge (42b),

$$2\mu^6 - 18\rho\mu^3 + 27\rho^2 = 0,$$

oder

$$\rho = \frac{(3 \pm \sqrt{3})\mu^3}{9}. \quad (43b)$$

Diese 2 Punkte sind einfache. Wir wollen nunmehr zeigen, dass  $E$ , wofür  $\rho = \infty$ , ein Doppelpunkt der Doppelkurve ist.

Die Ebene (40) schneidet  $[w]$  in der Geraden

$$x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0$$

und  $[w']$  in der Geraden

$$x_1 - x_2 - \lambda\mu x_4 = 0.$$

In dieser Ebene befindet sich der Congruenzstrahl  $p$  ( $p_1, p_2$ ), wenn man hat

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= -\lambda, \\ p_1^{\frac{3}{2}} - p_2^{\frac{3}{2}} &= \lambda\mu; \end{aligned}$$

aus diesen Gleichungen folgt durch Elimination von  $p_2$

$$\begin{aligned} p_1^4 + \frac{18\lambda - 4\mu^2}{9} p_1^3 + \frac{\lambda(5\lambda - 2\mu^2)}{3} p_1^2 + \frac{2\lambda^2(\lambda - \mu^2)}{3} p_1 + \\ + \frac{\lambda^2(\lambda - \mu^2)^2}{9} = 0. \end{aligned}$$

Ein Wert für  $\lambda$  liefert 4 Werte für  $p_1$ , d. h. in einer Ebene (40) befinden sich 4 Congruenzstrahlen, also 6 Punkte der Doppelkurve, ausserhalb  $l_\mu$ .

Die Ebene  $x_3 - \mu x_4$  wird durch  $\lambda = \infty$  bestimmt, und liefert demnach  $p_1^4 = \infty$ . Alle Strahlen sind mit der Geraden  $X_1 X_2$  zusammengefallen.

Wir setzen nun

$$\lambda = \frac{1}{\lambda'},$$

wonach die obige Gleichung sich verwandelt in

$$\begin{aligned} 9\lambda'^4 p_1^4 + \lambda'^3(18 - 4\mu^2\lambda') p_1^3 + 3\lambda'^2(5 - 2\mu^2\lambda') p_1^2 + 6\lambda'(1 - \mu^2\lambda') p_1 + \\ + (1 - \mu^2\lambda')^2 = 0. \end{aligned}$$

Wenn die durch  $l_\mu$  gelegte Ebene beinahe mit  $x_3 - \mu x_4 = 0$



zusammenfällt, wird sie durch einen kleinen Wert von  $\lambda'$  bestimmt. Wir dürfen alsdann in den Coefficienten  $\lambda'$  neben den Zahlen vernachlässigen. Wir erhalten daher angenähert

$$9\lambda'^4 p_1^4 + 18\lambda'^3 p_1^3 + 15\lambda'^2 p_1^2 + 6\lambda' p_1 + 1 = (3\lambda'^2 p_1^2 + 3\lambda' p_1 + 1)^2 = 0.$$

Diese Gleichung zeigt, dass von den 4 in der Ebene ( $\lambda'$ ) liegenden Strahlen je 2 mit  $X_1 X_2$  zusammenfallen, wonach  $E$  ein Doppelpunkt der Doppelkurve ist.

Auf  $l_\mu$  befinden sich somit 4 Punkte der Doppelkurve; weil jede durch  $l_\mu$  gelegte Ebene deren noch 6 ausserhalb  $l_\mu$  trägt, so ist der Grad der Doppelkurve 10. Also:

*Auf der vorliegenden Regelfläche liegt eine Doppelkurve 10<sup>ten</sup> Grades.*

#### § 10. Die axiale Regelfläche eines Congruenzstrahles $s$ .

Die Restfläche ist vom 9<sup>ten</sup> Grade.

Der Strahl  $s$  ist auf seiner Regelfläche eine 4-fache Gerade.

Die Kreispunkte sind beide noch 3-fache Punkte.

Der Punkt  $E$  ist ein uniplanarer Doppelpunkt, dessen Tangenten sich in der Abbildungsebene  $[w]$  befinden.

Der Schnitt in  $[w]$  zerfällt in die beiden einfachen durch die Spur  $S$  von  $s$  in  $[w]$  verlaufenden isotropen Geraden, in die einfache reelle Axe und in eine Kurve 6<sup>ten</sup> Grades, deren Gleichung ist

$$\frac{\xi_2(\xi_1 + s_1 \xi_3)^3 - \xi_1(\xi_2 + s_2 \xi_3)^3 + (s_2^3 \xi_1 - s_1^3 \xi_2) \xi_3^3}{\xi_1 \xi_2} = 0,$$

oder

$$\{\xi_1 \xi_2 (\xi_1 + \xi_2) + 3(s_1 + s_2) \xi_1 \xi_2 \xi_3 + 3(s_2^3 \xi_1 + s_1^3 \xi_2) \xi_3^2 + 2 s_1^3 s_2^3 \xi_3^3\}^2 - 4(\xi_1 + s_1 \xi_3)^3 (\xi_2 + s_2 \xi_3)^3 = 0. \quad (44b)$$

Die Kreispunkte sind hier *Rückkehrpunkte*, deren Tangenten sich in  $S$  treffen.

Der Punkt  $S$  ist ein gewöhnlicher, seine Tangente ist durch

$$s_2^3 \xi_1 - s_1^3 \xi_2 = 0$$

bestimmt; sie verbindet  $S$  mit der axialen Projektion des ausserhalb der singulären Ebenen liegenden Bildes  $S'$  ( $x_1 = -s_1^3 x_4$ ,  $x_2 = -s_2^3 x_4$ ) von  $S$ .

Der unendlich ferne Punkt  $E$  der reellen Axe ist ein Rückkehrpunkt, dessen Tangente durch

$$\xi_1 - \xi_2 + 3(s_1 - s_2)\xi_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (45b)$$

bestimmt ist.

Die in  $[w']$  liegende Kurve hat die Gleichung

$$\frac{\xi_2(\xi_1 + s_1^{\frac{3}{2}}\xi_4)^{\frac{2}{3}} - \xi_1(\xi_2 + s_2^{\frac{3}{2}}\xi_4)^{\frac{2}{3}} + (s_2\xi_1 - s_1\xi_2)\xi_4^{\frac{2}{3}}}{\xi_1\xi_2} = 0,$$

oder

$$[\xi_1\xi_2(\xi_1 - \xi_2) + 2(s_2^{\frac{3}{2}}\xi_1^2 - s_1^{\frac{3}{2}}\xi_2^2)\xi_4 + 3s_1s_2(s_2\xi_1 - s_1\xi_2)\xi_4^2]^3 - \\ - 27(s_2\xi_1 - s_1\xi_2)^3(\xi_1 + s_1^{\frac{3}{2}}\xi_4)^2(\xi_2 + s_2^{\frac{3}{2}}\xi_4)^2\xi_4^2 = 0. \quad (46b)$$

Die Kreispunkte sind hier 3-fache; ihre Tangenten sind bez. durch

$$(\xi_2 + 2s_2^{\frac{3}{2}}\xi_4)^3 = 0,$$

oder

$$(x_2 + s_2^{\frac{3}{2}}x_4)^3 = 0,$$

und

$$(\xi_1 + 2s_1^{\frac{3}{2}}\xi_4)^3 = 0,$$

oder

$$(x_1 + s_1^{\frac{3}{2}}x_4)^3 = 0$$

bestimmt; sie vereinigen sich alle in den beiden durch den Punkt

$S''$  ( $x_1 = -s_1^{\frac{3}{2}}x_4$ ,  $x_2 = -s_2^{\frac{3}{2}}x_4$ ) gehenden isotropen Geraden.

Es ist  $S''$  eines der 4 Bilder von  $S$ .

Der Punkt  $S'$  ist ein 4-facher; seine Tangenten sind die axialen Projektionen aus  $s$  auf  $[w]$  der 4 auf der Fläche liegenden, nach  $S'$  zielenden Congruenzstrahlen.

Der unendlich ferne Punkt der reellen Axe ist ein Rückkehrpunkt, dessen Tangente im Unendlichen liegt.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  ist eine Kurve 9<sup>ten</sup> Grades, die im Schnittpunkte  $S_\mu$  von  $s$  mit  $\omega_\mu$  einen 4-fachen Punkt hat und im unendlich fernen Punkte der reellen Axe einen Rückkehrpunkt mit der unendlich fernen Gerade als Tangente.

Wir wollen uns jetzt mit der Doppelkurve beschäftigen.

Die Gleichungen  $s_1(\pi_1) = 0$  und  $s_2(\pi) = 0$  vom § IV. Abschnitte (§ 12a, S. 291) haben hier diese Form:

$$s_1(\pi_1) \equiv \pi_1^2 + (3s_1 - \mu^2)\pi_1 + (3s_1^2 + 2\mu s_1^{\frac{3}{2}}) = 0, \quad (47b)$$

$$s_2(\pi_2) \equiv \pi_2^2 + (3s_2 - \mu^2)\pi_2 + (3s_2^2 + 2\mu s_2^{\frac{3}{2}}) = 0. \quad (48b)$$

Die Schnittpunkte von  $s$  mit der Doppelkurve werden (siehe S 221, 393) durch die Gleichung

$$(c_1 + c_1')^2 c_2 c_2' - c_1 c_1' (c_2 + c_2')^2 = 0$$

angewiesen.

Vermöge (47b) und (48b) gibt es also die folgende Bedingung:

$$\begin{aligned} \mu [2(s_1 + s_1^{\frac{1}{2}} s_2^{\frac{1}{2}} + s_2) \mu^4 + 3(s_1 + s_2)(s_1^{\frac{1}{2}} + s_2^{\frac{1}{2}}) \mu^3 - \\ - 12s_1 s_2 \mu^2 - 18s_1 s_2 (s_1^{\frac{1}{2}} + s_2^{\frac{1}{2}}) \mu - 18s_1^{\frac{3}{2}} s_2^{\frac{3}{2}}] = 0. \end{aligned} \quad (49b)$$

Ausser dem Schnittpunkte  $S'$  von  $s$  mit  $[w]$ , welcher durch  $\mu = 0$  bestimmt wird, befinden sich auf  $s$  noch 4 andere Punkte der Doppelkurve.

Wie bei der vorigen Congruenz lässt sich hier zeigen dass die beiden *Brennpunkte* von  $s$  ebenfalls der Doppelkurve angehören. Es trägt  $s$  also im Ganzen 7 Punkte der Doppelkurve; da jede durch  $s$  gelegte Ebene ausser  $s$  noch 5 andere Congruenzstrahlen trägt, welche sich in 10 Punkten schneiden, so enthält eine solche Ebene im Ganzen  $7 + 10 = 17$  Punkte der Doppelkurve. Daher:

*Auf der axialen Regelfläche eines Congruenzstrahles liegt eine Doppelkurve 17<sup>ten</sup> Grades, welche  $s$  in 7 Punkten trifft.*

§ 11. *Die axiale Regelfläche eines in der Ebene der reellen Axen liegenden Congruenzstrahles  $s$ .*

Die Regelfläche ist vom 6<sup>ten</sup> Grade und trägt  $s$  als eine *Doppelgerade*.

Die Kreispunkte sind 3-fache.

Der unendlich ferne Punkt  $E$  der reellen Axe gehört der Fläche *nicht* an.

Es ist  $OO'$  eine *Doppelgerade*; sämtliche Berührungsebenen sind in der Ebene der reellen Axen vereinigt (Ausnahme in  $[w']$ ).

Der Schnitt mit  $[w]$  besteht aus den einfachen durch die Spur  $S$  von  $s$  in  $[w]$  gehenden isotropen Geraden und aus einer Kurve 4<sup>ten</sup> Grades, welche diese Gleichung hat:

$$\frac{\xi_2(\xi_1 + s\xi_3)^{\frac{3}{2}} - \xi_1(\xi_2 + s\xi_3)^{\frac{3}{2}} + s^{\frac{3}{2}}(\xi_1 - \xi_2)\xi_3^{\frac{3}{2}}}{\xi_1^2 \xi_2^2 (\xi_1 - \xi_2)^2} = 0,$$

oder

$$\xi_1^2 \xi_2^2 - 6s^2 \xi_1 \xi_2 \xi_3^2 - 4s^3 (\xi_1 + \xi_2) \xi_3^3 - 3s^4 \xi_3^4 = 0, \quad (50b)$$

oder auch

$$x_1^2 x_2^2 - 2s x_1 x_2 (x_1 + x_2) x_3 + s^2 (x_1 - x_2)^2 x_3^2 = 0. \quad (50'b)$$

Die Kreispunkte sind Rückkehrpunkte, deren Tangenten sich in  $S$  schneiden.

Der Punkt  $S$  gehört jetzt der Kurve *nicht* an.

Der Punkt  $O$  ist dagegen ein Rückkehrpunkt, dessen Tangente mit der reellen Axe zusammenfällt.

Der Schnitt in  $[w']$  hat die Gleichung

$$\frac{\xi_2(\xi_1 + s^{\frac{3}{2}}\xi_4)^{\frac{2}{3}} - \xi_1(\xi_2 + s^{\frac{3}{2}}\xi_4)^{\frac{2}{3}} + s(\xi_1 - \xi_2)\xi_4^{\frac{2}{3}}}{\xi_1 \xi_2 (\xi_1 - \xi_2)} = 0,$$

oder

$$[\xi_1 \xi_2 + 2s^{\frac{3}{2}}(\xi_1 + \xi_2)\xi_4 + 3s^3 \xi_4^2]^3 - 27s^3 (\xi_1 + s^{\frac{3}{2}}\xi_4)^3 (\xi_2 + s^{\frac{3}{2}}\xi_4)^3 = 0, \quad (53b)$$

oder auch

$$[x_1 x_2 + s^{\frac{3}{2}}(x_1 + x_2)x_4]^3 - 27s^3 x_1^2 x_2^2 x_4^2 = 0. \quad (54b)$$

Die Kreispunkte sind auf dieser Kurve 6<sup>ten</sup> Grades 3-fache Punkte; ihre Tangenten treffen sich alle im Punkte  $S''(x_1 = -s^{\frac{3}{2}}x_4, x_2 = -s^{\frac{3}{2}}x_4)$ , welcher mit  $S'$  dem Punkte  $S$  zugeordnet ist.

Es ist  $S'$  ein Doppelpunkt, dessen Tangenten  $S'$  mit den axialen Projektionen der ausserhalb der singulären Ebenen liegenden Bilder von  $S'$  verbinden.

Der Punkt  $O'$  ist ein 3-facher, dessen Tangenten alle in der imaginären Axe vereinigt sind.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  ist eine Kurve 6<sup>ten</sup> Grades, welche in den Kreispunkten 3-fache Punkte hat, im Schnittpunkte  $S_\mu$  von  $s$  mit  $\omega_\mu$  einen Doppelpunkt und im Schnittpunkte  $X_\mu$  von  $OO'$  mit  $\omega_\mu$  einen Rückkehrpunkt, dessen Tangente die reelle Axe ist.

Weil  $s$  in der singulären Ebene der reellen Axen liegt und daher die kubische Fokalkurve berührt, so hat jede durch  $s$  gelegte Ebene 2 zusammenfallende Strahlen in  $s$ . Es trägt diese Ebene also noch 4 Strahlen ausserhalb  $s$  welche sich in 6 Punkten schneiden. Die Ebene hat daher ausserhalb  $s$  6 Punkte mit der Doppelkurve gemein.

Die Gleichung, welche die 2 ausserhalb der singulären Ebenen liegenden Strahlen bestimmt, welche nach einem Punkte  $C$  von  $s$  zielen, lautet:

$$s(\pi) \equiv \pi^2 + (3s - \mu^2)\pi + s(3s + 2\mu s^{\frac{1}{2}}) = 0.$$

Die beiden Spuren werden durch

$$\pi_1 = c, \quad \pi_2 = c'$$

und

$$\pi_1 = c', \quad \pi_2 = c$$

bestimmt.

Die Bedingung, dass die Verbindungslinie dieser Spuren durch  $S$  gehe, hat also diese Form:

$$c + c' = 0,$$

oder

$$3s - \mu^2 = 0,$$

wonach

$$\mu = \pm \sqrt{3} s.$$

Es liegen daher auf  $s$  2 Punkte der Doppelkurve. Diese ist also vom Grade  $6 + 2 = 8$ . Sie bildet mit der Doppelgerade  $s$  und der Doppelgerade  $OO'$  eine Doppelkurve 10<sup>ten</sup> Grades, woraus hervorgeht, dass die Regelfläche hier vom Geschlecht *null* ist. Also:

Fig. 15.

Auf der axialen Regelfläche eines in  $\varepsilon$  liegenden Congruenzstrahles  $s$  liegt eine Doppelkurve vom 8<sup>ten</sup> Grade, welche  $s$  in 6 Punkten trifft.

Wenn für  $s$  in  $\varepsilon$  die Gerade  $OO'$  gewählt wird, zerfällt diese

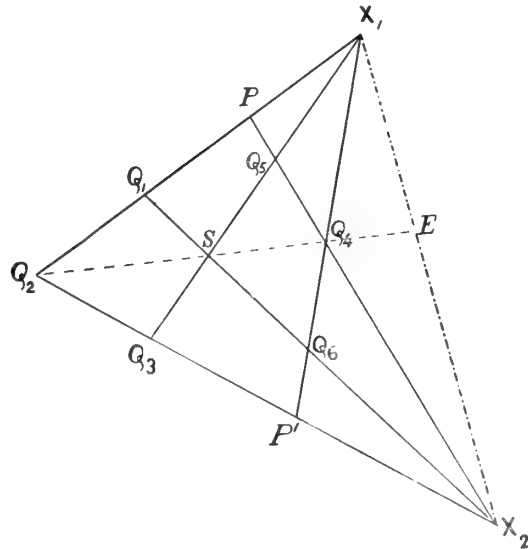


Fig. 15.

Regelfläche in die 3 mal durch  $OO'$  gelegten isotropen Ebenen.

§ 12. Die axiale Regelfläche einer in der Abbildungsebene  $[w]$  liegenden Gerade  $l_\infty$ .

Die Fläche ist vom 10<sup>ten</sup> Grade und trägt  $l_\infty$  als eine 4-fache Gerade.

Die unendlich ferne Gerade der Abbildungsebenen ist hier eine 4-fache Gerade; sämtliche Berührungsebenen sind vereinigt in der Ebene  $[w]$ , welche mit der Fläche 6 mal die unendlich ferne Gerade gemein hat.

Diese 6-fache Gerade bildet mit der 4-fachen Gerade  $l_\infty$  den Schnitt 10<sup>ten</sup> Grades in  $[w]$ .

Der Schnitt in  $[w']$  besteht aus der 4-fachen unendlich fernen Gerade und aus der Bildkurve 6<sup>ten</sup> Grades von  $l_\infty$ .

Wenn die Gerade  $l_\infty$  durch

$$\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

dargestellt wird, so ist die Gleichung der Bildkurve

$$\alpha_1 x_1^{\frac{2}{3}} + \alpha_2 x_2^{\frac{2}{3}} + \alpha_3 x_4^{\frac{2}{3}} = 0,$$

oder

$$(\alpha_1^3 x_1^2 + \alpha_2^3 x_2^2 + \alpha_3^3 x_4^2)^3 - 27 \alpha_1^3 \alpha_2^3 \alpha_3^3 x_1^2 x_2^2 x_4^2 = 0. \quad (57b)$$

Die 2 Punkte, wo diese Kurve die unendlich ferne Gerade schneidet, sind die Bilder  $L_3'$  in  $[w']$  des unendlich fernen Punktes  $L_3$  von  $l_\infty$  ( $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$ ).

Die beiden Punkte  $L_3'$  sind Rückkehrpunkte, mit der unendlich fernen Gerade als Tangente.

Die Bildkurve schneidet die Gerade  $O'J$  ( $x_1 = 0$ ) in den 2 Bildern  $L_1'$  des Schnittpunktes  $L_1$  von  $l_\infty$  mit  $OJ$ . Die beiden Punkte  $L_1'$  sind Rückkehrpunkte mit  $O'J$  als Tangente. Ebenso sind die beiden Punkte  $L_2'$  (die Bilder des Schnittpunktes  $L_2$  von  $l_\infty$  mit  $OI$ ), wo die Bildkurve  $O'I$  schneidet, Rückkehrpunkte mit  $O'I$  als Tangente.

Die 2 Geraden  $L_1 L_1'$  und die 2 Geraden  $L_2 L_2'$  sind alle 4 Rückkehrkanten der Regelfläche; ihre Berührungsebenen fallen bez. mit den beiden durch  $OO'$  gelegten isotropen Ebenen zusammen.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  besteht aus der 4-fachen unendlich fernen Gerade und aus einer Kurve 6<sup>ten</sup> Grades, welche in den beiden Punkten  $L_3'$ , in

den beiden Schnittpunkten von  $\omega_\mu$  mit den Geraden  $L_1 L_1'$  und in den beiden Schnittpunkten von  $\omega_\mu$  mit den Geraden  $L_2 L_2'$  Rückkehrpunkte hat, deren Tangenten bez. mit der unendlich fernen Gerade und mit den beiden durch den Schnittpunkt  $X_\mu$  von  $\omega_\mu$  mit  $OO'$  gelegten isotropen Geraden zusammenfallen.

Von der Doppelkurve ist zu bemerken (siehe S. 303 u. f.), dass sie *keinen* Punkt mit  $l_\infty$  gemein hat. Weil jede durch  $l_\infty$  gelegte Ebene 6 Strahlen und somit 15 Punkte der Doppelkurve enthält, so ist der Grad der Doppelkurve 15. Also:

*Auf der axialen Regelfläche einer Gerade  $l_\infty$  in  $[w]$  liegt eine Doppelkurve 15<sup>ten</sup> Grades.*

§ 13. *Die axiale Regelfläche einer in der Abbildungsebene  $[w]$  liegenden Gerade  $l_\infty$ , welche durch  $O$  geht.*

Wenn wir die Gerade  $l_\infty$  durch

$$x_2 = kx_1$$

darstellen, so werden die beiden Bestandteilen ihrer axialen Regelfläche (siehe (144a), S. 302) durch

$$k(1 - \overset{1}{k^2})(kx_1 - x_2)^2 x_3^3 + (\overset{3}{k^2} x_1 - x_2)^3 x_4^2 = 0 \quad . \quad (58b)$$

und

$$k(1 + \overset{1}{k^2})(kx_1 - x_2)^2 x_3^3 - (\overset{3}{k^2} x_1 + x_2)^3 x_4^2 = 0 \quad . \quad (58'b)$$

angewiesen.

Auf jeder dieser Flächen 5<sup>ten</sup> Grades ist ein der 2 Bilder  $l'$  von  $l_\infty$

$$\overset{3}{k^2} x_1 - x_2 = 0, \quad x_3 = 0,$$

bez.

$$\overset{3}{k^2} x_1 + x_2 = 0, \quad x_3 = 0$$

eine 3-fache Gerade.

Auf den beiden Flächen sind noch die unendlich ferne Gerade, die Gerade  $OO'$  und  $l_\infty$  Doppelgeraden.

Hieraus folgt, dass es ausserhalb dieser Geraden keine Doppelpunkte giebt.

Die beiden Flächen schneiden  $[w]$  in 3 mal der unendlich fernen Gerade und in 2 mal der Gerade  $l_\infty$ .

Die Ebene  $[w']$  wird getroffen in der 2-fachen unendlich fernen Gerade und in den beiden 3-fachen Geraden  $l'$ .

Eine zu den Abbildungsebenen parallele Ebene  $\omega_\mu$  schneidet jede der 2 Flächen in der 2-fachen unendlich fernen Gerade und in einer kubischen Kurve, welche im unendlich fernen Punkte  $L_3'$  des zugehörigen Bildes  $l'$  von  $l_\infty$  einen Rückkehrpunkt hat, dessen Tangente im Unendlichen liegt.

§ 14. *Die axiale Regelfläche der zu  $[w]$  gehörenden reellen Axe.*

Von den 2 oben betrachteten Flächen 5<sup>ten</sup> Grades ist die eine in 3 mal die Ebene der reellen Axen und 2 mal die Abbildungsebene  $[w]$  ausgeartet.

Die andere Fläche 5<sup>ten</sup> Grades hat die Gleichung

$$2(x_1 - x_2)^2 x_3^3 - (x_1 + x_2)^3 x_4^2 = 0.$$

Sie enthält die imaginäre Axe von  $[w']$  als eine 3-fache Gerade, die unendlich ferne Gerade, die Gerade  $OO'$  und die reelle Axe von  $[w]$  als Doppelgeraden.

§ 15. *Die Regelfläche der Strahlen, welche auf einem zu den Abbildungsebenen parallelen Kreise ruhen.*

Die Fläche ist vom 18<sup>ten</sup> Grade und trägt den Kreis als eine 9-fache Gerade.

Der Kreis werde durch

$$\alpha_3 \beta_3 x_1 x_2 + x_1 (\alpha_2 \beta_3 x_3 + \alpha_3 \beta_2 x_4) + x_2 (\alpha_1 \beta_3 x_3 + \alpha_3 \beta_1 x_4) + (\alpha_0 \beta_3 x_3^2 + \alpha_3 \beta_0 x_4^2) = 0, \quad (59)$$

$$x_3 = \mu x_4 \quad (60)$$

dargestellt.

Wir ziehen noch die folgenden Bezeichnungen heran:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 &= \alpha_2 \beta_3, \quad \gamma_0' = \mu \alpha_3 \beta_3, \quad \gamma_0'' = \mu^2 \alpha_3 \beta_3, \\ \gamma_1 &= \mu \alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2, \quad \gamma_2 = \mu \alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1, \\ \gamma_1' &= \mu (\mu \alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2), \quad \gamma_2' = \mu (\mu \alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1), \\ \gamma_3 &= \mu^2 \alpha_0 \beta_3 + \alpha_3 \beta_0. \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

Die Ebene  $[w]$  wird in einer Kurve 12<sup>ten</sup> Grades und in 3 *einfachen* durch jeden der Kreispunkte gelegten Geraden getroffen.

Die Kurve in  $[w]$  hat die Gleichung

$$\gamma_0 x_1^{\frac{3}{2}} x_2^{\frac{3}{2}} + \gamma_0' (x_1^{\frac{3}{2}} x_2 + x_1 x_2^{\frac{3}{2}}) x_3^{\frac{1}{2}} + \gamma_0'' x_1 x_2 x_3 + \gamma_1 x_1^{\frac{3}{2}} x_3^{\frac{3}{2}} + \gamma_2 x_2^{\frac{3}{2}} x_3^{\frac{3}{2}} + \gamma_1' x_1 x_3^2 + \gamma_2' x_2 x_3^2 + \gamma_3 x_3^3 = 0,$$

oder



$$[\gamma_0^2 x_1^3 x_2^3 - x_1^3 x_3 (\gamma_0' x_2 + \gamma_1 x_3)^2 - x_2^3 x_3 (\gamma_0' x_1 + \gamma_2 x_3)^2 + \\ + (\gamma_0'' x_1 x_2 + \gamma_1' x_1 x_3 + \gamma_2' x_2 x_3 + \gamma_3 x_3^2)^2 x_3^2] - 4 x_1^3 x_2^3 x_3^2 \times \\ \times [(\gamma_0' x_1 + \gamma_2 x_3)(\gamma_0' x_2 + \gamma_1 x_3) - \gamma_0 (\gamma_0'' x_1 x_2 + \gamma_1' x_1 x_3 + \gamma_2' x_2 x_3 + \gamma_3 x_3^2)]^2 = 0. \quad (62b)$$

Die Kreispunkte sind 6-fache; von ihren Tangenten sind je 2 in eine dieser 3 durch  $I(X_1)$  gelegten Geraden

$$\gamma_0 x_2^{\frac{3}{2}} + \gamma_0' x_2 x_3^{\frac{1}{2}} + \gamma_1 x_3^{\frac{3}{2}} = 0,$$

oder

$$\gamma_0^2 x_2^3 - (\gamma_0' x_2 + \gamma_1 x_3)^2 x_3 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (63b)$$

und in eine dieser 3 durch  $J(X_2)$  gelegten Geraden

$$\gamma_0^2 x_1^3 - (\gamma_0' x_1 + \gamma_2 x_3)^2 x_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (64b)$$

zusammengefallen.

Diese Geraden sind überdies, als *einfache* betrachtet, die Ausartungselemente des Gesamtschnittes von  $[w]$ .

Diese Tangenten haben ausser ihren Berührungspunkten keinen Punkt mit der Kurve gemein.

Der Schnitt in  $[w']$  ist eine Kurve 18<sup>ten</sup> Grades, deren Gleichung ist

$$\gamma_0 x_1 x_2 + \gamma_0' (x_1 x_2^{\frac{2}{3}} + x_1^{\frac{2}{3}} x_2) x_4^{\frac{1}{3}} + \gamma_0'' x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} x_4^{\frac{2}{3}} + \gamma_1 x_1 x_4 + \gamma_2 x_2 x_4 + \\ + \gamma_1 x_1^{\frac{2}{3}} x_4^{\frac{4}{3}} + \gamma_2 x_2^{\frac{2}{3}} x_4^{\frac{4}{3}} + \gamma_3 x_4^2 = 0, \quad . \quad . \quad (65b)$$

oder

$$[\mu^3 (\gamma_0 x_2 + \gamma_1 x_4)^3 x_1^2 x_4 + \mu^3 (\gamma_0 x_1 + \gamma_2 x_4)^3 x_2^2 x_4 + \mu^6 \gamma_0^3 x_1^2 x_2^2 x_4^2 + \\ + (\gamma_0 x_1 x_2 + \gamma_1 x_1 x_4 + \gamma_2 x_2 x_4 + \gamma_3 x_4^2)^3] - 27 \mu^6 (\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_0 \gamma_3)^2 x_1^2 x_2^2 x_4^6 \times \\ \times [(\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_0 \gamma_3) \gamma_0^3 x_1 x_2 x_4^6 + (\gamma_1 \gamma_2 - \gamma_0 \gamma_3) (\gamma_0 x_1 x_2 + \gamma_1 x_1 x_4 + \gamma_2 x_2 x_4 + \gamma_3 x_4^2)^3 x_4^2 + \\ + \gamma_0 (\gamma_0 x_1 x_2 + \gamma_1 x_1 x_4 + \gamma_2 x_2 x_4 + \gamma_3 x_4^2) \times \\ \times [\mu^3 (\gamma_0 x_2 + \gamma_1 x_4)^3 x_1^2 x_4 + \mu^3 (\gamma_0 x_1 + \gamma_2 x_4)^3 x_2^2 x_4 + \mu^6 \gamma_0^3 x_1^2 x_2^2 x_4^2 + \\ + (\gamma_0 x_1 x_2 + \gamma_1 x_1 x_4 + \gamma_2 x_2 x_4 + \gamma_3 x_4^2)^3]] = 0. \quad . \quad (66b)$$

Die Kreispunkte sind 9-fache; von ihren Tangenten in  $I$  sind je 3 in eine der 3 Geraden

$$(\gamma_0 x_2 + \gamma_1 x_4)^3 + \gamma_0'^3 x_2^2 x_4 = 0,$$

von denen in  $J$  sind je 3 in eine der 3 Geraden

$$(\gamma_0 x_1 + \gamma_2 x_4)^3 + \gamma_0'^3 x_1^2 x_4 = 0$$

zusammengefallen; jede dieser Tangenten hat alle ihre Schnittpunkte mit der Kurve in ihrem Berührungspunkte vereinigt.

Auf der Fläche sind die Kreispunkte 9-fache; von ihren Berührungsebenen sind je 3 bez. in eine der 3 Ebenen

$$(\gamma_0 x_2 + \gamma_1 x_4)^3 + \gamma_0^2 (\gamma_0' x_2 + \gamma_1 x_3)^2 (x_3 - \mu x_4) = 0, \quad (67b)$$

und

$$(\gamma_0 x_1 + \gamma_2 x_4)^3 + \gamma_0^2 (\gamma_0' x_1 + \gamma_2 x_3)^2 (x_3 - \mu x_4) = 0 \quad (68b)$$

zusammengefallen.

Diese Ebenen bilden bez. die Regelfläche der Strahlen, welche auf den durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises verlaufenden isotropen Geraden ruhen.

§ 16. *Die Regelfläche der Strahlen, welche auf einem zu den Abbildungsebenen parallelen Kreise ruhen, dessen Mittelpunkt auf  $OO'$  liegt.*

Wir haben im Vorhergehenden

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0, \quad \alpha_2 = 0, \\ \beta_1 &= 0, \quad \beta_2 = 0 \end{aligned}$$

einzusetzen, wonach der Kreis durch

$$\left. \begin{aligned} \alpha_3 \beta_3 x_1 x_2 + \alpha_0 \beta_3 x_3^2 + \alpha_3 \beta_0 x_4^2 &= 0, \\ x_3 &= \mu x_4 \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} . \quad . \quad (69) \\ . \quad . \quad (70) \end{array}$$

dargestellt wird.

Die in  $[w]$  liegende Kurve ist jetzt durch

$$[x_1^3 x_2^3 - \mu^2 x_1^2 x_2^2 (x_1 + x_2) x_3 + (\mu^2 x_1 x_2 + \frac{\gamma_3}{\gamma_0} x_3^2 x_3^2)^2 - 4 \frac{\gamma_3^2}{\gamma_0} x_1^3 x_2^3 x_3^6] = 0 \quad (71b)$$

bestimmt.

Die Tangenten der Kreispunkte, welche zugleich die Ausartungselemente des Gesamtschnittes bilden, sind jetzt durch

$$x_2^2 (x_2 + \mu^2 x_3) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72b)$$

und

$$x_1^2 (x_1 + \mu^2 x_3) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73b)$$

angewiesen.

Es sind also 4 Brennpunkte in  $O$  vereinigt.

Die Gleichung der in  $[w']$  befindlichen Kurve lautet:

$$x_1 x_2 + \mu (x_1 x_2^{\frac{2}{3}} + x_1^{\frac{2}{3}} x_2) x_4^{\frac{1}{3}} + \mu^2 x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} x_4^{\frac{2}{3}} + \frac{\gamma_3}{\gamma_0} x_4^2 = 0, \quad (74b)$$

oder

$$\begin{aligned} & [\mu^3 \gamma_0^3 x_1^2 x_2^2 (x_1 + x_2 + \mu^3 x_4) x_4 + (\gamma_0 x_1 x_2 + \gamma_3 x_4^2)^3]^3 + \\ & + 27 \mu^6 \gamma_0^3 \gamma_3^2 x_1 x_2 x_4^6 [\gamma_0^3 \gamma_3 x_1 x_2 x_4^6 + \gamma_3 (\gamma_0 x_1 x_2 + \gamma_3 x_4^2)^3 x_4^2 - \\ & - (\gamma_0 x_1 x_2 + \gamma_3 x_4^2) [\mu^3 \gamma_0^3 x_1^2 x_2^2 (x_1 + x_2 + \mu^3 x_4) x_4 + (\gamma_0 x_1 x_2 + \gamma_3 x_4^2)^3]]^3 = 0. \end{aligned} \quad (75b)$$

Die Tangenten der Kreispunkte sind jetzt durch

$$x_2^2 (x_2 + \mu^3 x_4) = 0$$

und

$$x_1^2 (x_1 + \mu^3 x_4) = 0$$

bestimmt.

Auch hier fallen 4 Brennpunkte in  $O'$  zusammen.

Von den 3 verschiedenen Berührungsebenen jedes Kreispunktes sind 2 mit einer durch  $OO'$  gelegten isotropen Ebene zusammengefallen. Die Gerade  $OO'$  kann also eine 4-fache Brennlinie genannt werden.

§ 17. *Die Regelfläche der Strahlen, welche auf einem zu den Abbildungsebenen parallelen Kreise ruhen, der  $OO'$  schneidet.*

Wir haben nun

$$\alpha_0 = 0, \quad \beta_0 = 0,$$

mithin

$$\gamma_3 = 0$$

einzusetzen.

Die Gleichungen des Kreises sind also

$$\alpha_3 \beta_3 x_1 x_2 + x_1 (\alpha_2 \beta_3 x_3 + \alpha_3 \beta_2 x_4) + x_2 (\alpha_1 \beta_3 x_3 + \alpha_3 \beta_1 x_4) = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} (76) \\ x_3 = \mu x_4. \end{array} \right. \quad (77)$$

Es ist  $OO'$  hier eine 4-fache Gerade der Regelfläche; die Berührungsebenen längs  $OO'$  sind alle vereinigt in der Ebene, welche  $OO'$  mit der im Schnittpunkte  $X_\mu$  von  $OO'$  mit dem Kreise an diesen gelegten Tangente verbindet.

Die Kurve in  $[w]$  hat nun die Gleichung



Die in  $[w']$  liegende Bildkurve des Kreises in  $[w]$  hat nun die Gleichung

$$\alpha_3 x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} + \alpha_2 x_1^{\frac{2}{3}} x_4^{\frac{2}{3}} + \alpha_1 x_2^{\frac{2}{3}} x_4^{\frac{2}{3}} + \alpha_0 x_4^{\frac{4}{3}} = 0, \quad (85b)$$

oder

$$\begin{aligned} & (\alpha_3^3 x_1^2 x_2^2 + \alpha_2^3 x_1^2 x_4^2 + \alpha_1^3 x_2^2 x_4^2 + \alpha_0^3 x_4^4) - \\ & - 27(\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_0 \alpha_3)^2 x_1^2 x_2^2 x_4^2 (\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_0 \alpha_3)(\alpha_3^3 x_1^2 x_2^2 + \alpha_0^3 x_4^4) + \\ & + \alpha_0 \alpha_3 (\alpha_3^3 x_1^2 x_2^2 + \alpha_2^3 x_1^2 x_4^2 + \alpha_1^3 x_2^2 x_4^2 + \alpha_0^3 x_4^4) = 0. \quad (86b) \end{aligned}$$

Die Kreispunkte sind auf dieser Kurve  $12^{\text{ten}}$  Grades 6-fache Punkte; von ihren Tangenten sind je 3 in ein der 2 Bilder jeder isotropen an den Kreis gelegten Tangente zusammengefallen.

Die isotrope Gerade  $OJ$  schneidet die Kurve 6 mal im 6-fachen Punkte  $J$  und ausserdem noch 3 mal in jedem der beiden Bilder  $M_1'$  des Punktes  $M_1$ , wo der gegebene Kreis die Gerade  $OJ$  schneidet.

Die beiden Punkte  $M_1'$  sind Rückkehrpunkte, mit  $OJ$  als gemeinschaftlicher Tangente. Analoges lässt sich von den beiden Punkten  $M_2'$  behaupten.

Auf der Fläche sind die Kreispunkte 6-fache. Von den Berührungsebenen von  $I$  (bez.  $J$ ) sind je 3 vereinigt in einer der 2 Ebenen, welche die isotrope Tangente des Kreises mit ihren 2 Bildern verbinden.

Die beiden Geraden  $M_1 M_1'$  und die beiden Geraden  $M_2 M_2'$  sind Rückkehrkanten, mit den durch  $OO'$  gelegten isotropen Ebenen als Berührungsebenen.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  ist eine Kurve  $12^{\text{ten}}$  Grades, die in den Kreispunkten 6-fache Punkte hat. Die Schnittpunkte von  $\omega_\mu$  mit den Geraden  $M_1 M_1'$  und  $M_2 M_2'$  sind Rückkehrpunkte.

§ 19. *Die Regelfläche der Strahlen, welche auf einem in der Abbildungsebene  $[w]$  liegenden Kreise ruhen, dessen Mittelpunkt  $O$  ist.*

Hier gilt

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0,$$

wonach der Kreis diese Gleichungen hat:

$$\alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_0 x_3^2 = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array} \right. \quad (87)$$

$$x_4 = 0. \quad \left\{ \begin{array}{l} \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array} \right. \quad (88)$$

Die Regelfläche ist wiederum vom 12<sup>ten</sup> Grade und trägt den Kreis als eine 4-fache Kurve.

Die isotropen Geraden, welche, doppelt gerechnet, auch dem Gesamtschnitte in  $[w]$  angehören, gehen jetzt durch  $O$ .

Die in  $[w']$  liegende Kurve hat die Gleichung

$$(\alpha_3^3 x_1^2 x_2^2 + \alpha_0^3 x_4^4)^3 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (89b)$$

Der Schnitt in  $[w']$  besteht also aus der 3-fachen Bildkurve 4<sup>ten</sup> Grades (89b) des gegebenen Kreises. Diese Bildkurve ist selbst wiederum aus 2 Kreisen

$$x_1 x_2 = \pm \sqrt{-\frac{\alpha_0^3}{\alpha_3^3} \cdot x_4^2} \quad . \quad . \quad . \quad (89'b)$$

zusammengesetzt, welche beide ihren Mittelpunkt in  $O'$  haben.

Die Regelfläche hat in den Kreispunkten 6-fache Punkte, deren Berührungsebenen alle in den durch  $OO'$  gelegten isotropen Ebenen vereinigt sind.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  ist eine Kurve 12<sup>ten</sup> Grades, welche in den Kreispunkten 6-fache Punkte hat; sämtliche Brennpunkte sind in  $X_\mu$  vereinigt.

§ 20. *Die Regelfläche der Strahlen, welche auf einem in der Abbildungsebene  $[w]$  liegenden Kreise ruhen, der  $O$  enthält.*

Jetzt ist

$$\alpha_0 = 0$$

einzusetzen.

Der Kreis wird also durch

$$\alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_2 x_1 x_3 + \alpha_1 x_2 x_3 = 0, \quad \left\{ \quad . \quad . \quad . \quad (90) \right.$$

$$x_4 = 0 \quad \left. \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (91)$$

dargestellt.

Auch diese Regelfläche ist vom 12<sup>ten</sup> Grade und trägt den gegebenen Kreis als eine 4-fache Kurve.

Der Schnitt in  $[w]$  besteht, ausser dem Kreise, aus dessen isotropen Tangenten, jede doppelt gezählt.

Die Gleichung der in  $[w']$  liegenden Bildkurve ist jetzt

$$\alpha_3 x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{2}{3}} + \alpha_2 x_1^{\frac{2}{3}} x_4^{\frac{2}{3}} + \alpha_1 x_2^{\frac{2}{3}} x_4^{\frac{2}{3}} = 0, \quad . \quad . \quad (92b)$$

oder

$$(\alpha_3^3 x_1^2 x_2^2 + \alpha_2^3 x_1^2 x_4^2 + \alpha_1^3 x_2^2 x_4^2)^3 - 27 \alpha_1^3 \alpha_2^3 \alpha_3^3 x_1^4 x_2^4 x_4^4 = 0. \quad (93b)$$

Der Punkt  $O'$  ist hier ein 6-facher; von seinen Tangenten sind je 3 in die 2 Bilder der in  $O$  an den Kreis in  $[w]$  gelegten Tangente zusammengefallen.

Die Gerade  $OO'$  ist jetzt eine 4-fache der Fläche; sämtliche Berührungsebenen sind vereinigt in der Ebene, welche  $OO'$  mit der in  $O$  an den Kreis gelegten Tangente verbindet.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  ist eine Kurve 12<sup>ten</sup> Grades mit 6-fachen Punkten in den Kreispunkten; sie hat noch einen 4-fachen Punkt in  $X_\mu$ , dessen sämtliche Tangenten in der Schnittlinie von  $\omega_\mu$  mit der Berührungsebene von  $OO'$  vereinigt sind.

## ABTEILUNG C.

---

*Die Congruenz, welche der Beziehung*

$$w' = \frac{c^3}{w^2}$$

*angehört.*

### § 1. *Allgemeine Eigenschaften.*

Dem in IV. Abschnitte Abgehandelten entsprechend, bemerken wir zuerst, dass man in der vorliegenden *hyperbolischen* Congruenz hat

$$m = 2, \quad n = 1.$$

Der *Bündelgrad* der Congruenz ist also 9, ihr *Feldgrad* 4, ihr *Axengrad*  $N = 23$ .

Von den 9 nach einem reellen Punkte zielenden Strahlen sind nur 3 reell.

Die *Fokalfläche* besteht aus zwei imaginären Cylindern, deren Spitzen sich in den Kreispunkten  $I$  und  $J$  der Abbildungsebenen befinden.

Die Gleichungen dieser Fokalcylinder lauten

$$\left. \begin{aligned} 4x_2^3 - 27x_3^2x_4 &= 0, \\ 4x_1^3 - 27x_3^2x_4 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1c)$$

Die Cylinder haben die Gerade  $OI$  (bez.  $OJ$ ) als Inflexionskante, mit  $[w]$  als Berührungsebene, und die Gerade  $O'I$  (bez.  $O'J$ ) als Rückkehrkante mit  $[w]$  als Berührungsebene.

Sie durchbohren sich in 3 kubischen Plankurven, welche sich befinden in der Ebene der reellen Axen und in den beiden durch



$$x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = 0$$

oder

$$y = \pm x \sqrt[3]{3}$$

bestimmten Ebenen, welche die Ebene der reellen Axen unter  $60^\circ$  schneiden.

Die 3 kubischen Fokalkurven haben alle einen Wendepunkt in  $O$  und einen Rückkehrpunkt in  $O'$ .

Die Gleichungen des Congruenzstrahles  $p$  sind nun

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= p_1 x_3 + p_1^{-2} x_4, \\ x_2 &= p_2 x_3 + p_2^{-2} x_4. \end{aligned} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2c)$$

Der Brennpunkt  $P_{f1}$  des Strahles  $p$  ist durch

$$\frac{x_1}{2 p_1^3 + p_2^3} = \frac{x_2}{3 p_1^2 p_2} = \frac{x_3}{2 p_1^2} = \frac{x_4}{p_1^2 p_2^3}, \quad . \quad . \quad . \quad (3c)$$

der Brennpunkt  $P_{f2}$  durch

$$\frac{x_1}{3 p_1 p_2^2} = \frac{x_2}{p_1^3 + 2 p_2^3} = \frac{x_3}{2 p_2^2} = \frac{x_4}{p_1^3 p_2^2} \quad . \quad . \quad . \quad (4c)$$

bestimmt.

*Singuläre Ebenen* sind

1° jede Ebene, welche einen Strahl  $p$  mit einem der Kreispunkte verbindet; sie enthält ein Strahlengebilde 3<sup>ter</sup> Klasse, dessen Einhüllende eine kubische Kurve mit einem Rückkehrpunkt ist;

2° die Ebenen  $x_1^3 - x_2^3 = 0$ , d.h. die Ebene der reellen Axen und die beiden Ebenen  $y = \pm x \sqrt[3]{3}$ ; sie tragen jede ein Strahlengebilde 3<sup>ter</sup> Klasse, dessen Einhüllende mit der kubischen Fokalkurve identisch ist;

3° die Abbildungsebenen  $[w]$  und  $[w']$  mit Strahlenbüscheln in den Kreispunkten und in den Nullpunkten.

*Singuläre Punkte* sind

- 1° die Kreispunkte mit Strahlenbüscheln in  $[w]$  und  $[w']$ ;
- 2° der Nullpunkt von  $[w]$  mit einem Strahlenbüschel in  $[w]$ ;
- 3° der Nullpunkt von  $[w']$  mit einem Strahlenbüschel in  $[w']$ .

Von den 9 Strahlen, welche nach einem Punkte von  $[w]$  zielen, fallen 4 mit den durch diesen Punkt gehenden isotropen Geraden zusammen, 4 mit der Gerade, welche diesen Punkt mit dem

Nullpunkte verbindet; der 9<sup>te</sup> Strahl vereinigt den Punkt mit seinem in  $[w']$  befindlichen Bilde.

Von den 9 Strahlen, welche nach einem Punkte von  $[w']$  zielen, fallen 4 mit den durch diesen Punkt gehenden isotropen Geraden zusammen, *einer* mit der Gerade, welche diesen Punkt mit dem Nullpunkte verbindet; die übrigen 4 Strahlen vereinigen den Punkt mit seinen 4 in  $[w]$  befindlichen Bildern.

Von den 4 in  $[w]$  liegenden Bildern eines reellen in  $[w']$  befindlichen Punktes sind nur 2 reell.

§ 2. *Die axiale Regelfläche einer durchaus willkürlichen Gerade  $l$ .*

Der Grad der Regelfläche ist  $(2 + 1)^2 + 2 \times 2 = 13$ .

Es ist  $l$  auf ihrer Regelfläche eine 9-fache Gerade.

Es sei  $A(a_1, a_2)$  die Spur von  $l$  in  $[w]$ ,  $B'(b'_1, b'_2)$  die von  $l$  in  $[w']$ .

Der Schnitt in  $[w]$  besteht aus den 2-fachen durch  $A$  gehenden isotropen Geraden, aus der 4-fachen Gerade  $OA$  und aus einer Kurve 5<sup>ten</sup> Grades. Diese hat in Bezug auf das Coordinatendreieck  $AIJ$  die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} & \xi_1(\xi_1 + a_1 \xi_3)^2 \xi_3^2 - \xi_2(\xi_2 + a_2 \xi_3)^2 \xi_3^2 - \\ & - (b'_2 \xi_1 - b'_1 \xi_2)(\xi_1 + a_1 \xi_3)^2 (\xi_2 + a_2 \xi_3)^2 = 0. \quad . \quad (5c) \end{aligned}$$

Diese Kurve hat in den Kreispunkten Doppelpunkte, deren Tangenten sich in den 4 in  $[w]$  liegenden Bildern  $B$  des Punktes  $B'$  treffen.

Der Punkt  $A$  ist ein gewöhnlicher; seine Tangente ist die axiale Projektion aus  $l$  auf  $[w]$  des Bildes  $A'$  von  $A$ .

Der Punkt  $B'_4$ , wo die Gerade  $OB'$  die unendlich ferne Gerade schneidet, ist ein gewöhnlicher Punkt der Kurve; seine Tangente verbindet  $B'_4$  mit  $A$ .

Auf das Coordinatendreieck  $OIJ$  bezogen, lautet die Gleichung der Kurve:

$$\begin{aligned} & (x_1 - a_1 x_3) x_1^2 x_3^2 - (x_2 - a_2 x_3) x_2^2 x_3^2 - \\ & - \{b'_2 (x_1 - a_1 x_3) - b'_1 (x_2 - a_2 x_3)\} x_1^2 x_2^2 = 0. \quad . \quad (5'c) \end{aligned}$$

Hieraus ist ersichtlich, dass  $O$  ein Doppelpunkt ist, dessen Tangenten die Bilder der durch  $O'$  zu  $OA$  parallel verlaufenden Geraden sind.

Der Schnitt mit  $[w']$  besteht aus den 2-fachen durch  $B'$  gehenden

isotropen Geraden, aus der einfachen Gerade  $B'O'$  und aus einer Kurve 8<sup>ten</sup> Grades, deren Gleichung lautet:

$$\xi_1(\xi_1 + b_1' \xi_4)^{\frac{1}{2}} \xi_4^{\frac{1}{2}} - \xi_2(\xi_2 + b_2' \xi_4)^{\frac{1}{2}} \xi_4^{\frac{1}{2}} - (a_2 \xi_1 - a_1 \xi_2)(\xi_1 + b_1' \xi_4)^{\frac{1}{2}} (\xi_2 + b_2' \xi_4)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

oder

$$[\xi_1^2(\xi_1 + b_1' \xi_4) \xi_4 + \xi_2^2(\xi_2 + b_2' \xi_4) \xi_4 - (a_2 \xi_1 - a_1 \xi_2)^2 (\xi_1 + b_1' \xi_4)(\xi_2 + b_2' \xi_4)]^2 - 4 \xi_1^2 \xi_2^2 (\xi_1 + b_1' \xi_4)(\xi_2 + b_2' \xi_4) \xi_4^2 = 0. \quad (7c)$$

Auf dieser Kurve sind die Kreispunkte *Rückkehrpunkte*, deren Tangenten sich im Bilde  $A'$  von  $A$  treffen.

Der Punkt  $B'$  ist ein 4-facher, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $l$  auf  $[w']$  der 4 Bilder  $B$  von  $B'$  sind.

Wenn wir das Coordinatendreieck  $B'IJ$  durch das Dreieck  $O'IJ$  ersetzen, so verwandelt sich die Gleichung (7c) in

$$[(x_1 - b_1' x_4)^2 x_1 x_4 + (x_2 - b_2' x_4)^2 x_2 x_4 - \{a_2(x_1 - b_1' x_4) - a_1(x_2 - b_2' x_4)\}^2 x_1 x_2]^2 - 4 x_1 x_2 x_4^2 (x_1 - b_1' x_4)^2 (x_2 - b_2' x_4)^2 = 0. \quad (7'c)$$

Der Punkt  $O'$  erscheint also als ein Rückkehrpunkt, dessen Tangente mit dem Bilde der Gerade  $OB_4'$ , d.h. der durch  $O$  zu  $O'B'$  parallel verlaufenden Gerade zusammenfällt.

Der unendlich ferne Punkt  $A_3$  von  $OA$  liegt auch auf der Kurve; er ist ein Rückkehrpunkt mit der unendlich fernen Gerade als Tangente; diese Gerade hat in  $A_3$  4 Punkte mit der Kurve gemein.

Auf der Regelfläche sind die Kreispunkte 4-fache. Von den Berührungsebenen des Kreispunktes  $I(X_1)$  sind 2 mit der Ebene

$$a_2^2(x_2 - a_2 x_3) - x_4 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8c)$$

zusammengefallen; die anderen 2 werden durch

$$b_2'(x_2 - b_2' x_4)^2 - x_3^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8'c)$$

angewiesen.

Von den Berührungsebenen des Kreispunktes  $J(X_2)$  sind 2 mit der Ebene

$$a_1^2(x_1 - a_1 x_3) - x_4 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9c)$$

zusammengefallen; die anderen 2 werden durch

$$b_1'(x_1 - b_1'x_3)^2 - x_3^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9'e)$$

angewiesen.

Der Punkt  $O$  ist auf der Fläche ein *uniplanarer* Doppelpunkt mit der Abbildungsebene  $[w]$  als Berührungsebene.

Der Punkt  $A_3$  ist ebenfalls ein uniplanarer Doppelpunkt, dessen Berührungsebene mit  $[w]$  identisch ist.

Der Punkt  $O'$  ist ein uniplanarer Doppelpunkt, dessen Berührungsebene mit der Abbildungsebene  $[w']$  zusammenfällt.

Der Punkt  $B_4'$  ist aber ein gewöhnlicher Punkt, dessen Berührungsebene  $B_4'$  mit  $l$  verbindet.

Auf der Gerade  $OO'$  liegen ausser den 2 Doppelpunkten  $O$  und  $O'$  3 dreifache Punkte der Fläche; sie werden durch

$$\frac{x_3}{x_4} = \frac{\mu_3}{\mu_4}$$

bestimmt, wenn  $\mu_3 : \mu_4$  der Bedingung

$$[\mu_3(a_1 - a_2) + \mu_4(b_1' - b_2')]^3 - \mu_3\mu_4^2(a_1b_2' - a_2b_1')^3 = 0$$

genügt.

Die *Doppelkurve* dieser Regelfläche ist vom Grade  $N + 6 = 23 + 6 = 29$ .

§ 3. Die *axiale Regelfläche* einer Gerade  $l$ , welche  $OO'$  schneidet.

Hier sind die Punkte  $A_3$  und  $B_4'$  zusammengefallen.

Der Punkt  $A_3 \equiv B_4'$  ist jetzt ein 3-facher Punkt.

Es sei

$$x_2 = tx_1$$

die Gleichung der durch  $l$  und  $OO'$  gelegten Ebene; man hat alsdann

$$\frac{b_2'}{b_1'} = \frac{a_2}{a_1} = t, \\ a_1b_2' - a_2b_1' = 0.$$

Die in  $[w]$  liegende Kurve hat nun die Gleichung

$$(x_1 - a_1x_3)x_1^2x_3^2 - (x_2 - ta_1x_3)x_2^2x_3^2 - b_1'(tx_1 - x_2)x_1^2x_2^2 = 0. \quad (10c)$$

In Bezug auf die Singularitäten weicht diese Kurve von derjenigen des vorigen § nicht ab.

Auch dem von der in  $[w']$  liegenden Kurve Gesagten braucht nichts hinzugefügt zu werden.

Ihre Gleichung ist

$$[(x_1 - b_1' x_4)^2 x_1 x_4 + (x_2 - t b_1' x_4)^2 x_2 x_4 - a_1 (t x_1 - x_2)^2 x_1 x_2]^2 - 4 x_1 x_2 (x_1 - b_1' x_4)^2 (x_2 - t b_1' x_4)^2 x_4^2 = 0. \quad (11c)$$

Die 3 dreifachen Punkte, wo die Fläche des vorigen § die Gerade  $OO'$  schneidet, sind hier vereinigt im 9-fachen Punkte  $S$

$$(a_1 - a_2) x_3 + (b_1' - b_2') x_4 = 0,$$

oder

$$a_1 x_3 + b_1' x_4 = 0,$$

wo die 9-fache Gerade  $l$  die Gerade  $OO'$  schneidet.

Wie schon oben bemerkt wurde, ist der Punkt  $A_3 \equiv B_4'$  ein 3-facher; von den 3 Berührungsebenen, in welche der Tangentenkegel ausgeartet ist, fallen 2 mit  $[w]$  zusammen und *eine* mit der durch  $l$  und  $A_3 \equiv B_4'$ , d. h. mit der durch  $OO'$  und  $l$  gelegten Ebene.

Die unendlich ferne Gerade der Abbildungsebenen hat in  $A_3 \equiv B_4'$  mit der Fläche 5 Punkte gemein.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  hat nun auch in  $A_3 \equiv B_4'$  einen 3-fachen Punkt, von dessen Tangenten zwei mit der unendlich fernen Gerade zusammenfallen und die dritte  $A_3 \equiv B_4'$  mit dem Schnittpunkte  $C_\mu$  von  $\omega_\mu$  mit  $l$  verbindet; letztere Gerade enthält auch den Schnittpunkt  $X_\mu$  von  $\omega_\mu$  mit  $OO'$ .

Übrigens sind keine Abweichungen zu constataren.

Wenn  $l$  durch  $O$  geht, so wird die Abbildungsebene  $[w]$  2 mal abgetrennt. Es erübrigt sonach eine Fläche 11<sup>ten</sup> Grades. Auf dieser sind die Kreispunkte Doppelpunkte, deren Berührungsebenen durch (8'*c*) und (9'*c*) gegeben sind. Die Gerade  $OO'$  schneidet jetzt die Fläche 2 mal in  $O'$  und 9 mal in  $O$ .

Die in  $[w']$  liegende Kurve ist in eine 2-fache kubische Kurve zerfallen, mit der Gleichung

$$(x_1 - b_1' x_4)^2 x_1 - (x_2 - b_2' x_4)^2 x_2 = 0. \quad (12c)$$

Sie schneidet die unendlich ferne Gerade in den nämlichen Punkten wie die 3 singulären Ebenen durch  $OO'$ ; die Asymptoten convergiren nach dem Punkte  $T_0'$

$$\frac{x_1}{2b_1'} = \frac{x_2}{2b_2'} = \frac{x_4}{3}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14c)$$

Die in  $[w]$  befindliche Kurve ist durch

$$(x_1^3 - x_2^3)x_3^2 - (b_2'x_1 - b_1'x_2)x_1^2x_2^2 = 0 \quad . \quad . \quad (15c)$$

bestimmt.

Der Punkt  $O$  ist jetzt ein 3-facher, dessen Tangenten sich in den singulären Ebenen befinden und je 5 Punkte mit der Kurve gemein haben.

Wenn  $l$  durch  $O'$  geht, so wird die Abbildungsebene  $[w']$  2 mal abgesondert. Es erübrigt wiederum eine Fläche 11<sup>ten</sup> Grades.

Auf dieser sind die Kreispunkte Doppelpunkte.

Die Gerade  $OO'$  schneidet nun die Fläche 2 mal in  $O$  und 9 mal in  $O'$ .

Der Schnitt in  $[w]$  ist ausgeartet in die 2-fachen durch  $A$  gehenden isotropen Geraden, in die 4-fache Gerade  $OA$  und in die einfache kubische Kurve, welche durch

$$(x_1 - a_1x_3)x_1^2 - (x_2 - a_2x_3)x_2^2 = 0 \quad . \quad . \quad (15'c)$$

dargestellt wird. Diese schneidet die unendlich ferne Gerade in den Schnittpunkten der singulären Ebenen; die Asymptoten convergiren nach dem Punkte

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \frac{x_3}{3}.$$

Der Punkt  $O$  ist ein Doppelpunkt, wie im allgemeinen Falle.

Die in  $[w']$  liegende Kurve hat nun die Gleichung

$$[(x_1^3 + x_2^3)x_4 - (a_1x_1 - a_2x_2)^2x_1x_2]^2 - 4x_1^3x_2^3x_4^2 = 0. \quad (16c)$$

Der Punkt  $O'$  ist ein 6-facher; von seinen Tangenten sind je 2 mit einer der 3 Geraden zusammengefallen, in welchen die singulären Ebenen die Ebene  $[w']$  schneiden.

§ 4. Die axiale Regelfläche einer zu den Abbildungsebenen parallelen Gerade  $l_\mu$ .

Der Grad dieser Regelfläche ist, wie im allgemeinen Falle, 13.

Es sei die Gerade  $l_\mu$  gegeben durch

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} . \quad . \quad . \quad . \quad (17) \\ x_3 = \mu x_4. \end{array} \right. \quad (18)$$



Der Punkt  $L_\mu$  ist ein 9-facher, von dessen Berührungsebenen 4 mit der durch  $l_\mu$  und  $O$  gelegten Ebene, eine mit der durch  $l_\mu$  und  $O'$  gelegten Ebene, und 4 mit der Ebene  $\omega_\mu$  zusammenfallen.

Die Punkte  $O$  und  $O'$  sind beide Doppelpunkte, deren Verhalten nicht von dem auf der allgemeinen Regelfläche abweicht.

Wenn  $l_\mu$  den Kreispunkt  $I(X_1)$  enthält, wonach  $\alpha_1 = 0$ , so besteht die axiale Regelfläche aus den zweifachen Abbildungsebenen  $[w]$  und  $[w']$  und aus den 3 dreifachen durch  $l_\mu$  an den Fokalcylinder  $F_1$  gelegten Berührungsebenen. Letztere werden durch

$$\{\alpha_2 x_2 + (\mu \alpha_3 + \alpha_4) x_4\}^2 \{\mu \alpha_2 x_2 + (\mu \alpha_3 + \alpha_4) x_3\} + \alpha_2^3 (x_3 - \mu x_4)^3 = 0 \quad (22c)$$

dargestellt.

§ 5. Die axiale Regelfläche einer zu den Abbildungsebenen parallelen Gerade  $l_\mu$ , welche  $OO'$  schneidet.

Man hat hier

$$\mu \alpha_3 + \alpha_4 = 0.$$

Die in  $[w]$  liegende Kurve hat nun die Gleichung

$$\alpha_2 x_1^2 x_3^3 + \alpha_1 x_2^2 x_3^3 + \mu (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) x_1^2 x_2^2 = 0. \quad (24c)$$

Die Kreispunkte sind Rückkehrpunkte, deren Tangenten sich in  $O$  treffen.

Der Punkt  $L_\mu$  ist ein Wendepunkt, dessen Tangente ebenfalls durch  $O$  geht.

Der Punkt  $O$  ist ein Doppelpunkt, dessen Tangenten die Bilder der durch  $O'$  zu  $l_\mu$  parallel verlaufenden Gerade  $O'L_\mu$  sind.

Die in  $[w']$  befindliche Kurve wird jetzt durch

$$[\mu^2 \alpha_2^2 x_1 x_4^3 + \mu^2 \alpha_1^2 x_2 x_4^3 - (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^2 x_1 x_2]^2 - 4 \mu^4 \alpha_1^2 \alpha_2^2 x_1 x_2 x_4^6 = 0 \quad (25c)$$

dargestellt.

Das einzige Neue ist hier, dass die Tangenten des 4-fachen Punktes  $L_\mu$  auch alle durch  $O'$  gehen.

Auf der Regelfläche ist  $L_\mu$  wiederum ein 9-facher Punkt; es sind jetzt 5 Berührungsebenen mit der durch  $l_\mu$  und  $O$  gelegten Ebene und 4 mit der Ebene  $\omega_\mu$  zusammengefallen.

§ 6. Die axiale Regelfläche einer in der Ebene der reellen Axen liegenden Gerade  $l$ .



Die durch  $OO'$  verlaufenden singulären Ebenen waren

1° die Ebene der reellen Axen,

2° die Ebenen  $y = \pm x \sqrt[3]{3}$ .

Wir wollen uns beschränken auf die Erledigung der axialen Regelfläche einer in der Ebene der *reellen* Axen liegenden Gerade.

Diese Regelfläche besteht aus 3 mal der Ebene dieser Axen und aus einer Restfläche 10<sup>ten</sup> Grades.

Es ist  $l$  auf dieser Restfläche eine 6-fache Gerade.

Die Kreispunkte sind 4-fache; ihre Berührungsebenen sind durch  $(8c)$ ,  $(8'c)$ ,  $(9c)$  und  $(9'c)$  angewiesen, wo noch

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 = a \\ b'_1 &= b'_2 = b' \end{aligned}$$

einzusetzen ist.

Der Punkt  $O$  ist ein gewöhnlicher mit  $[w]$  als Berührungsebene.

Der Punkt  $O'$  gehört dagegen der Fläche *nicht* an.

Der unendlich ferne Punkt  $E (\equiv A_3 \equiv B'_4)$  ist auf der Fläche ein gewöhnlicher Punkt mit  $[w]$  als Berührungsebene.

Der Schnitt in  $[w]$  besteht aus den 2-fachen durch die Spur  $A$  von  $l$  in  $[w]$  verlaufenden isotropen Geraden, aus der 2-fachen reellen Axe und aus einer Kurve 4<sup>ten</sup> Grades, deren Gleichung lautet:

$$\frac{\xi_1(\xi_1 + a\xi_3)^2\xi_3^2 - \xi_2(\xi_2 + a\xi_3)^2\xi_3^2 - b'(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 + a\xi_3)^2(\xi_2 + a\xi_3)^2}{\xi_1 - \xi_2} = 0,$$

oder

$$\{(\xi_1^2 + \xi_1\xi_2 + \xi_2^2) + 2a(\xi_1 + \xi_2)\xi_3 + a^2\xi_3^2\}\xi_3^2 - b'(\xi_1 + a\xi_3)^2(\xi_2 + a\xi_3)^2 = 0. \quad (26c)$$

Diese Kurve hat in den Kreispunkten Doppelpunkte, deren Tangenten sich in den 4 Bildern  $B$  der Spur  $B'$  von  $l$  in  $[w]$  treffen.

Die Kurve enthält weder den Punkt  $A$  noch den Punkt  $E$ .

Der Punkt  $O$  dagegen ist ein gewöhnlicher Punkt; dies wird ersichtlich, wenn wir die Gleichung auf das Coordinatendreieck  $OIJ$  beziehen. Sie bekommt alsdann diese Gestalt:

$$b'x_1^2x_2^2 - (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)x_3^2 + a(x_1 + x_2)x_3^3 = 0. \quad (26'c)$$

Die Tangente von  $O$  fällt also mit der imaginären Axe zusammen.

Der Schnitt in  $[w']$  besteht aus den 2-fachen durch die Spur  $B'$  von  $l$  in  $[w']$  gehenden isotropen Geraden und aus einer Kurve 6<sup>ten</sup> Grades, welche dargestellt wird durch

$$\frac{\xi_1(\xi_1 + b'\xi_4)^{\frac{1}{2}}\xi_4^{\frac{1}{2}} - \xi_2(\xi_2 + b'\xi_4)^{\frac{1}{2}}\xi_4^{\frac{1}{2}} - a(\xi_1 - \xi_2)(\xi_1 + b'\xi_4)^{\frac{1}{2}}(\xi_2 + b'\xi_4)^{\frac{1}{2}}}{\xi_1 - \xi_2} = 0,$$

oder

$$\frac{[\xi_1^2(\xi_1 + b'\xi_4)\xi_4 + \xi_2^2(\xi_2 + b'\xi_4)\xi_4 - a^2(\xi_1 - \xi_2)^2(\xi_1 + b'\xi_4)(\xi_2 + b'\xi_4)]^2 - 4\xi_1^2\xi_2^2\xi_4^2(\xi_1 + b'\xi_4)(\xi_2 + b'\xi_4)}{(\xi_1 - \xi_2)^2} = 0,$$

oder auch

$$\{(\xi_1^2 + \xi_1\xi_2 + \xi_2^2) + b'(\xi_1 + \xi_2)\xi_4\}^2\xi_4^2 + a^4(\xi_1 - \xi_2)^2(\xi_1 + b'\xi_4)^2(\xi_2 + b'\xi_4)^2 - 2a^2(\xi_1 + b'\xi_4)(\xi_2 + b'\xi_4)\xi_1^2(\xi_1 + b'\xi_4) + \xi_2^2(\xi_2 + b'\xi_4)\xi_4 = 0. \quad (27c)$$

Die Kreispunkte sind auch hier Rückkehrpunkte; ihre Tangenten treffen sich im Bilde  $A'$  von  $A$ .

Der Punkt  $B'$  ist ein Doppelpunkt, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $l$  auf  $[w']$  der ausserhalb der Ebene der reellen Axen liegenden nach  $B'$  zielenden Congruenzstrahlen sind.

Der Punkt  $E$  ist ein gewöhnlicher; seine Tangente liegt im Unendlichen.

Der Punkt  $O'$  gehört der Kurve *nicht* an.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  ist eine Kurve 10<sup>ten</sup> Grades. Sie hat in den Kreispunkten 4-fache Punkte, deren Tangenten die Schnittlinien von  $\omega_\mu$  mit den Ebenen  $(8c)$ ,  $(8'c)$ ,  $(9c)$  und  $(9'c)$  sind (wo  $a_1 = a_2 = a$ ).

Der Schnittpunkt  $C_\mu$  von  $\omega_\mu$  mit  $l$  ist ein 6-facher, dessen Tangenten die axialen Projektionen aus  $l$  auf  $[w]$  der 6 ausserhalb der Ebene der reellen Axen liegenden, nach  $C_\mu$  zielenden Congruenzstrahlen sind.

Der unendlich ferne Punkt  $E$  der reellen Axe ist ein gewöhnlicher Punkt, mit der unendlich fernen Gerade als Tangente.

Die Kurve hat noch *Doppelpunkte* in den Schnittpunkten von  $\omega_\mu$  mit der *Doppelkurve*.

Auch hier wollen wir den Grad der Doppelkurve bestimmen.

Die Gleichung  $f(\pi) = 0$  hat hier diese Form:

$$f(\pi) \equiv \mu(\pi + a)^3 - (\mu a + b')(\pi + a)^2 + 1 = 0, \quad (28c)$$

oder

$$\mu\pi^3 + (2\mu a - b')\pi^2 + (\mu a - 2b')a\pi - (a^2 b' - 1) = 0,$$

wonach

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= -\frac{2\mu a - b'}{\mu}, \\ c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3 &= \frac{(\mu a - 2b')a}{\mu}, \\ c_1 c_2 c_3 &= \frac{a^2 b' - 1}{\mu}. \end{aligned}$$

Die Punkte  $D_{k,l}$ , welche, wie wir in der Abt.  $A$  dieses Abschnittes ersahen, durch

$$(c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3)(c_1 + c_2 + c_3) - c_1 c_2 c_3 = 0$$

bestimmt sind, ergeben sich somit hier aus der Gleichung

$$\frac{-a(2\mu a - b')(\mu a - 2b') - \mu(a^2 b' - 1)}{\mu^2} = 0,$$

also aus

$$\mu^2 = \infty$$

und

$$2a^3\mu^2 - (4a^2b' + 1)\mu + 2ab'^2 = 0. \quad . \quad (29c)$$

Die auf  $l$  liegenden Doppelpunkte der Doppelkurve, welche durch

$$(c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3)^3 - c_1 c_2 c_3 (c_1 + c_2 + c)^3 = 0$$

angewiesen werden, ergeben sich demnach aus

$$\frac{a^3(\mu a - 2b')\mu^3 + (a^2 b' - 1)(2\mu a - b')^3}{\mu^4} = 0,$$

also aus

$$\mu^4 = \infty$$

und

$$\begin{aligned} a^6\mu^4 + 2a^3(a^2b' - 4)\mu^3 + 12a^2b'\mu^2 - \\ - 2ab'^2(a^2b' + 3)\mu - b'^3(a^2b' - 1) = 0. \quad . \quad (30c) \end{aligned}$$

Es ist leicht ersichtlich, dass die Lösung  $\mu = \infty$ , welche den Punkt  $A$  liefert, weder für die einfachen Schnittpunkte noch für die Doppelpunkte Bedeutung hat. Es erhellt alsdann, dass auf

$l$  2 einfache und 4 Doppelpunkte der Doppelkurve liegen, welche also zusammen 10 gewöhnliche Punkte vertreten. Da ferner jede durch  $l$  gelegte Ebene noch 6 gewöhnliche Punkte der Doppelkurve trägt, so ist der Grad dieser Kurve  $10 + 6 = 16$ . Also:

*Auf der axialen Regelfläche einer in der Ebene  $\varepsilon$  befindlichen Gerade liegt eine Doppelkurve 16<sup>ten</sup> Grades.*

§ 7. *Die axiale Regelfläche einer in der Ebene der reellen Axen liegenden Gerade, welche durch  $O$  geht.*

Von der vorhergehenden Regelfläche wird nun 2 mal die Ebene  $[w]$  abgetrennt, wonach wir eine Fläche 8<sup>ten</sup> Grades erübrigen.

Die Kreispunkte sind jetzt Doppelpunkte; ihre Berührungsebenen werden durch  $(8'c)$  und  $(9'c)$  angewiesen.

Die Gerade  $OO'$  schneidet die Fläche 6 mal im Punkte  $O$  und einmal in den beiden Schnittpunkten  $X_c$  der Tangenten, welche man in den ausserhalb des Wendepunktes  $O$  liegenden Schnittpunkten von  $l$  mit der kubischen Fokalkurve an letztere legen kann.

Der Schnitt in  $[w]$  besteht aus der Kurve 4<sup>ten</sup> Grades, deren Gleichung lautet:

$$\frac{(x_1^3 - x_2^3)x_3^2 - b'(x_1 - x_2)x_1^2x_2^2}{x_1 - x_2} = 0,$$

oder

$$b'x_1^2x_2^2 - (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)x_3^2 = 0 \quad . \quad . \quad (32c)$$

und aus ihren im Doppelpunkte  $O$  gelegten Tangenten

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0,$$

jede 2-fach gerechnet.

Der Schnitt in  $[w']$  besteht aus den 2-fachen durch  $B'$  gehenden isotropen Geraden und aus dem 2-fachen Kegelschnitte, welcher durch

$$\frac{(x_1 - b'x_4)^2x_1 - (x_2 - b'x_4)^2x_2}{x_1 - x_2} = 0,$$

oder

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 2b'(x_1 + x_2)x_4 + b'^2x_4^2 = 0 \quad . \quad (33c)$$

dargestellt wird.

Dieser schneidet die unendlich ferne Gerade in den nämlichen Punkten wie die singulären Ebenen

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0.$$

Die Asymptoten treffen sich im Mittelpunkte

$$\frac{x_1}{2b'} = \frac{x_2}{2b'} = \frac{x_3}{3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (34c)$$

Der Punkt  $B'$  ist ein gewöhnlicher Punkt.

In Bezug auf  $B'IJ$  ist die Gleichung

$$\frac{(\xi_1 + b' \xi_4) \xi_1^2 - (\xi_2 - b' \xi_4) \xi_2^2}{\xi_1 - \xi_2} = 0,$$

oder

$$\xi_1^2 + \xi_1 \xi_2 + \xi_2^2 + b' (\xi_1 + \xi_2) \xi_4 = 0. \quad . \quad . \quad (33'c)$$

Hieraus folgt, dass die Tangente von  $B'$  durch

$$\xi_1 + \xi_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (35c)$$

bestimmt, somit zu der imaginären Axe parallel ist.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  ist eine Kurve 8<sup>ten</sup> Grades, welche in den Kreispunkten Doppelpunkte hat; ausserdem hat sie Doppelpunkte in den beiden durch

$$x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = 0$$

bestimmten unendlich fernen Punkten.

Die Doppelkurve enthält jetzt den 2-fachen Kegelschnitt in  $[w']$ .

Es zeigt sich nach der Substitution  $a = 0$  in (29c) und (30c), dass jetzt die 2 einfachen auf  $l$  liegenden Punkte der Doppelkurve durch

$$\mu = 0 \text{ und } \mu = \infty,$$

und die 4 Doppelpunkte durch

$$\mu^4 = \infty$$

bestimmt sind.

Die Lösung  $\mu = \infty$ , welche den Punkt  $O$  liefert, wird hinfällig.

Die Lösung  $\mu = 0$  liefert den Punkt  $B'$ , welcher dem 2-fachen Kegelschnitte angehört. Der übrige Teil der Doppelkurve hat also keinen Punkt mit  $l$  gemein. Da eine durch  $l$  gelegte Ebene ausser ihrer durch  $O$  gehenden Spur in  $[w]$  nur einen Strahl enthält, so ist, ausser dem 2-fachen Kegelschnitt und den 2-fachen isotropen Geraden durch  $B'$ , von einer Doppelkurve gar nicht mehr die Rede.

§ 8. Die axiale Regelfläche einer in der Ebene der reellen Axen liegenden Gerade, welche durch  $O'$  geht.

Von der Regelfläche des § 6 wird nun 2 mal die Ebene  $[w']$  abgetrennt. Wir erübrigen also wiederum eine Restfläche 8<sup>ten</sup> Grades.

Auf dieser Fläche sind die Kreispunkte uniplanare Doppelpunkte, deren Berührungsebenen die Ebenen (8c) und (9c) sind.

Die Gerade  $OO'$  schneidet die Fläche *einmal* im Punkte  $O$ , 6 mal im Punkte  $O'$  und *einmal* im Schnittpunkte der Tangente, welche man in dem ausserhalb des Rückkehrpunktes  $O'$  liegenden Schnittpunkte von  $l$  mit der kubischen Fokalkurve an letztere legen kann.

Der Schnitt in  $[w]$  besteht aus den 2-fachen durch  $A$  gehenden isotropen Geraden, aus der 2-fachen reellen Axe und aus dem einfachen Kegelschnitte

$$\frac{(x_1 - ax_3)x_1^2 - (x_2 - ax_3)x_2^2}{x_1 - x_2} = 0,$$

oder

$$(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) - a(x_1 + x_2)x_3 = 0. \quad . \quad . \quad (26'c)$$

Dieser Kegelschnitt enthält  $O$  und wird daselbst durch die imaginäre Axe berührt.

Der Punkt  $A$  gehört der Kurve *nicht* an.

Die unendlich fernen Punkte liegen in den singulären Ebenen.

Der Schnitt in  $[w']$  enthält die Kurve 6<sup>ten</sup> Grades, deren Gleichung ist

$$\frac{(x_1^{\frac{3}{2}} - x_2^{\frac{3}{2}})x_4^{\frac{1}{2}} - a(x_1 - x_2)x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}}{x_1 - x_2} = 0,$$

oder

$$a^4(x_1 - x_2)^2x_1^2x_2^2 - 2a^2(x_1^3 + x_2^3)x_1x_2x_4 + (x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)^2x_4^2 = 0, \quad (36c)$$

und ausserdem die Tangenten von  $O'$ , jede einfach gezählt.

Der Punkt  $O'$  ist ein 4-facher, von dessen Tangenten je 2 in einer der Spuren der singulären Ebenen

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0$$

vereinigt sind.

Die Kreispunkte sind Doppelpunkte.

Der unendlich ferne Punkt  $E$  der reellen Axe ist ein gewöhnlicher Punkt mit der unendlich fernen Gerade als Tangente.

Die einfachen Schnittpunkte der Doppelpunkte mit  $l$  werden jetzt (wo  $b' = 0$ ), durch

$$\mu \left( \mu - \frac{1}{2a^3} \right) = 0,$$

die Doppelpunkte aber durch

$$\mu^3 \left( \mu - \frac{8}{a^3} \right) = 0$$

geliefert.

Die Lösung  $\mu = 0$  giebt den Punkt  $O'$ . Dieser Punkt ist hier aber nicht zulässig. Auf  $l$  befinden sich deshalb ein gewöhnlicher und ein Doppelpunkt. Jede durch  $l$  gelegte Ebene enthält noch 4 Strahlen, also 6 Punkte der Doppelkurve, deren Grad demnach  $3 + 6 = 9$  ist.

§ 9. *Die axiale Regelfläche einer in der Ebene der reellen Axen liegenden und zu diesen parallelen Gerade  $l_\mu$ .*

Die Fläche ist vom 10<sup>ten</sup> Grade.

Die in  $[w]$  liegende Kurve wird jetzt ( $\alpha_2 = -\alpha_1$ ; siehe (19c), S. 443) durch

$$\mu x_1^2 x_2^2 - (x_1 + x_2) x_3^3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (38c)$$

dargestellt.

Die Kreispunkte sind Rückkehrpunkte, deren Tangenten sich in  $O$  treffen.

Der Punkt  $O$  ist ein gewöhnlicher mit der imaginären Axe als Tangente.

Die in  $[w']$  befindliche Kurve hat (siehe (20c), S. 443) die Gleichung

$$(x_1 - x_2)^2 x_1^2 x_2^2 - 2\mu^2 (x_1 + x_2) x_1 x_2 x_4^3 + \mu^4 x_4^6 = 0. \quad (39c)$$

Die Kreispunkte sind Rückkehrpunkte, deren Tangenten sich in  $O'$  schneiden.

Der Punkt  $E$  ist ein gewöhnlicher Punkt, mit der unendlich fernen Gerade als Tangente.

Der Punkt  $O'$  gehört der Kurve nicht an.

Die kubische Gleichung, welche die sich auf  $l_\mu$  schneidenden Strahlen liefert, ist hier

$$\mu c^3 - \rho c^2 + 1 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (42c)$$

Die Bedingung

$$2(c_1 + c_2 + c_3)^3 - 9(c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3)(c_1 + c_2 + c_3) + 27 c_1 c_2 c_3 = 0$$

gestaltet sich hier folgendermassen:

$$\frac{2\rho^3 - 27\mu^2}{\mu^3} = 0,$$

oder

$$\rho = \tau_3 \sqrt[3]{\frac{27\mu^2}{2}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43c)$$

wo  $\tau_3$  eine 3<sup>te</sup> Wurzel der Einheit darstellt.

Es befinden sich also auf  $l_\mu$  3 Punkte der Doppelkurve.

Jede durch  $l_\mu$  gelegte Ebene enthält deren ausserhalb  $l_\mu$  noch 6, wonach der Grad der Doppelkurve  $3 + 6 = 9$  ist.

#### § 10. Die axiale Regelfläche eines Congruenzstrahles $s$ .

Die Restfläche ist vom 7<sup>ten</sup> Grade.

Der Strahl  $s$  ist auf ihrer Regelfläche eine 4-fache Gerade.

Die Kreispunkte sind nun auf der Fläche *gewöhnliche* Punkte; ihre Berührungsebenen sind bez. durch

$$x_2 = -s_2 x_3 + s_2^{-2} x_4$$

und

$$x_1 = -s_1 x_3 + s_1^{-2} x_4$$

bestimmt.

Der Schnitt in  $[w]$  ist in die 4-fache Gerade  $OS$  ( $S \equiv$  Spur von  $s$  in  $[w]$ ) und in eine kubische Kurve ausgeartet. Letztere wird durch

$$(s_1^2 \xi_1 - s_2^2 \xi_2) \xi_1 \xi_2 + 2s_1 s_2 (s_1 \xi_1^2 - s_2 \xi_2^2) \xi_3 - 2(s_1^3 - s_2^3) \xi_1 \xi_2 \xi_3 + (4s_1^3 - s_2^3) s_2 \xi_1 - (4s_2^3 - s_1^3) s_1 \xi_2 \xi_3^2 + 2s_1 s_2 (s_1^3 - s_2^3) \xi_3^3 = 0 \quad (44c)$$

dargestellt.

Die Kreispunkte sind gewöhnliche; ihre Tangenten treffen sich im Punkte

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -s_1 x_3, \\ x_2 &= -s_2 x_3, \end{aligned} \right\} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45c)$$



welcher, zusammen mit  $S$ , der Spur  $S'$  von  $s$  in  $[w']$  entspricht.

Der dritte unendlich ferne Punkt ist der Punkt

$$s_1^2 \xi_1 - s_2^2 \xi_2 = 0,$$

d. h. der Punkt  $S'_4$  im Unendlichen auf  $O'S'$ ; die Tangente dieses Punktes geht durch  $S$ .

Der Punkt  $S$  selbst gehört der Kurve *nicht* an.

Der Punkt  $O$  ist ein Doppelpunkt; seine Tangenten sind die zwei Bilder der Gerade  $O'S_3$ , welche  $O'$  mit dem unendlich fernen Punkte  $S_3$  auf  $OS$  verbindet.

Der Schnitt in  $[w']$  besteht aus den einfachen durch  $S'$  gehenden isotropen Geraden, aus der einfachen Gerade  $O'S'$  und aus einer Kurve 4<sup>ten</sup> Grades, deren Gleichung ist

$$[s_1^2 s_2^2 (s_2 \xi_1 - s_1 \xi_2)^2 + \{s_2 (s_2^3 - 2 s_1^3) \xi_1 + s_1 (s_1^3 - 2 s_2^3) \xi_2\} \xi_4 - 2 s_1 s_2 \xi_4^2]^2 - 4 s_1^2 s_2^2 (s_1^2 \xi_1 + \xi_4)(s_2^2 \xi_2 + \xi_4) \xi_4^2 = 0. \quad (46c)$$

Die Kreispunkte gehören dieser Kurve *nicht* an.

Die unendlich ferne Gerade schneidet die Kurve 4 mal im *Doppelpunkte*  $S_3$ .

Der Punkt  $S'$  ist ein gewöhnlicher; seine Tangente ist die axiale Projektion aus  $s$  auf  $[w']$  des Punktes (45c).

Der Punkt  $O'$  ist ein Rückkehrpunkt, dessen Tangente das Bild von  $OS'_4$  ist.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  ist eine Kurve 7<sup>ten</sup> Grades, welche im Schnittpunkte  $S'_\mu$  von  $s$  mit  $\omega_\mu$  einen 4-fachen Punkt hat. Die Kreispunkte sind gewöhnliche. Der Punkt  $S'_4$  ist auch ein gewöhnlicher; seine Tangente verbindet  $S'_4$  mit  $S'_\mu$ . Der Punkt  $S_3$  ist ein Rückkehrpunkt, mit der unendlich fernen Gerade als Tangente.

Bei der Untersuchung der Doppelkurve bemerken wir, dass die Gleichungen  $s_1(\pi_1) = 0$  und  $s_2(\pi_2) = 0$  jetzt die folgende Form haben:

$$s_1(\pi_1) \equiv \mu s_1^2 \pi_1^2 + (2 \mu s_1^3 - 1) \pi_1 + (\mu s_1^3 - 2) s_1 = 0, \quad (47c)$$

$$s_2(\pi_2) \equiv \mu s_2^2 \pi_2^2 + (2 \mu s_2^3 - 1) \pi_2 + (\mu s_2^3 - 2) s_2 = 0. \quad (48c)$$

Die Schnittpunkte von  $s$  mit der Doppelkurve, welche durch

$$(c_1 + c_1')^2 c_2 c_2' - c_1 c_1' (c_2 + c_2')^2 = 0$$

bestimmt werden, ergeben sich also hier aus

$$\mu = \infty$$

und

$$4 s_1^3 s_2^3 \mu^2 + (s_1^3 + s_2^3) \mu - 2 = 0. \quad . \quad . \quad (49c)$$

Weil die Lösung  $\mu = \infty$  (welche den Punkt  $S$  liefert) nicht zulässig ist, so giebt es auf  $s$  2 gewöhnliche Punkte der Doppelkurve.

Auch die beiden Brennpunkte sind als solche zu betrachten. Im Ganzen befinden sich daher auf  $s$  4 Punkte der Doppelkurve. Da jede durch  $s$  gelegte Ebene noch 3 andere Strahlen trägt und also 3 Punkte der Doppelkurve enthält, so ist der Grad dieser letzteren  $4 + 3 = 7$ .

*Auf der Regelfläche eines Congruenzstrahles  $s$  liegt eine Doppelkurve 7<sup>ten</sup> Grades, mit  $s$  als Quadrisekante.*

§ 11. *Die axiale Regelfläche einer in der Ebene der reellen Axen liegenden Congruenzstrahles.*

Die Regelfläche ist vom 4<sup>ten</sup> Grade und trägt  $s$  als Doppelgerade.

Die Kreispunkte sind *gewöhnliche*, ihre Berührungsebenen sind durch

$$\begin{aligned} x_2 &= -sx_3 + s^{-2}x_4, \\ x_1 &= -sx_3 + s^{-2}x_4 \end{aligned}$$

angewiesen.

Der Schnitt in  $[w]$  besteht aus der 2-fachen reellen Axe und aus dem Kreise

$$\xi_1 \xi_2 + 2s(\xi_1 + \xi_2) \xi_3 + 3s^2 \xi_3^2 = 0, \quad . \quad . \quad (50c)$$

dessen Mittelpunkt im Punkte  $x_1 = x_2 = -sx_3$  liegt. Der Kreis enthält den Punkt  $O$  und wird daselbst durch die imaginäre Axe berührt.

Der Schnitt in  $[w']$  ist zusammengesetzt aus den beiden durch  $S'$  gehenden isotropen Geraden und aus einem Kegelschnitte

$$s^4(\xi_1 - \xi_2)^2 - 2s^2(\xi_1 + \xi_2) \xi_4 - 3\xi_4^2 = 0. \quad . \quad . \quad (54c)$$

Diese Kurve berührt die unendlich ferne Gerade im Punkte  $L$ . Sie ist offenbar eine Parabel, deren Axe mit der reellen Axe identisch ist.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  ist eine circulare Kurve 4<sup>ten</sup> Grades, deren Brennpunkt sich befindet im Schnittpunkte von  $\omega_\mu$  mit der Gerade  $x_1 = x_2 = -sx_3 + s^{-2}x_4$ .

Die Kurve berührt noch die unendlich ferne Gerade auf der reellen Axe.

Der Schnittpunkt  $S_\mu$  von  $s$  mit  $\omega_\mu$  ist ein *Doppelpunkt*.

Die Gleichung  $s(\pi) = 0$  hat hier diese Gestalt:

$$s(\pi) \equiv \mu s^2 \pi^2 + (2\mu s^3 - 1)\pi + (\mu s^3 - 2)s = 0.$$

Die Schnittpunkte von  $s$  mit der Doppelkurve werden durch die Bedingung

$$c + c' = 0,$$

also hier durch

$$2\mu s^3 - 1 = 0$$

oder

$$\mu = \frac{1}{2s^3}$$

geliefert.

Die Doppelkurve hat also nur einen Punkt mit  $s$  gemein. Da jede durch  $s$  gelegte Ebene nur noch 2 Strahlen, daher nur einen Punkt der Doppelkurve trägt, so ist die Doppelkurve ein *Kegelschnitt*.

§ 12. Die axiale Regelfläche einer in der Abbildungsebene  $[w]$  liegenden Geraden  $l_\infty$ .

Die Fläche ist vom 5<sup>ten</sup> Grade und trägt  $l_\infty$  als eine *einfache* Leitlinie.

Die Kreispunkte sind Doppelpunkte, deren Berührungsebenen zunächst in Betracht kommen.

Es möge  $l_\infty$  die unendlich ferne Gerade in  $L_3$ , die isotropen Geraden  $OJ$  und  $OI$  bez. in  $L_1$  und  $L_2$  schneiden.

Der Schnitt in  $[w]$  besteht nun aus der Geraden  $l_\infty$  und aus den 2-fachen Geraden  $L_1I$  und  $L_2J$ .

Die Gerade  $l_\infty$  werde durch

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

dargestellt.

Der Schnitt in  $[w']$  ist zusammengesetzt aus der einfachen durch  $O'$  zu  $l_\infty$  parallelen Geraden  $O'L_3$  und aus der Bildkurve 4<sup>ten</sup> Grades von  $l_\infty$ . Diese Bildkurve hat die Gleichung

$$\alpha_1 x_1^{-\frac{1}{2}} + \alpha_2 x_2^{-\frac{1}{2}} + \alpha_3 x_3^{-\frac{1}{2}} = 0,$$

oder

$$(\alpha_3^2 x_1 x_2 - \alpha_2^2 x_1 x_4 - \alpha_1^2 x_2 x_4)^2 - 4 \alpha_1^2 \alpha_2^2 x_1 x_2 x_4^2 = 0. \quad (57c)$$

Diese Kurve hat in den Kreispunkten Rückkehrpunkte, deren Tangenten die Bilder von  $IL_1$  und  $JL_2$  sind.

Es ist  $O'$  ebenfalls ein Rückkehrpunkt; seine Tangente ist das Bild der durch  $O$  zu  $l_\infty$  parallelen Gerade  $OL_3$ .

Die Berührungsebenen der Kreispunkte sind die Ebenen, welche  $IL_1$  und  $JL_2$  bez. mit ihren Bildern verbinden.

Der unendlich ferne Punkt  $L_3$  von  $l_\infty$  ist auf der Fläche ein gewöhnlicher, dessen Berührungsebene  $l_\infty$  mit  $O'$  vereinigt.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  ist eine Kurve 5<sup>ten</sup> Grades, welche in den Kreispunkten Rückkehrpunkte hat, deren Tangenten die Schnittlinien von  $\omega_\mu$  mit den Berührungsebenen sind.

Der Punkt  $L_3$  ist ein gewöhnlicher.

Es ist hier  $n = 1$ , wonach sich auf  $l_\infty$  kein Punkt der Doppelkurve befindet. Weil jede durch  $l_\infty$  gelegte Ebene 6 Punkte der Doppelkurve trägt, so ist diese vom 6<sup>ten</sup> Grade.

§ 13. Die axiale Regelfläche einer in der Abbildungsebene  $[w]$  liegenden Gerade  $l_\infty$ , welche durch  $O$  geht.

Es sei

$$x_2 = kx_1$$

die Gleichung der Gerade  $l_\infty$ .

Die Gleichung der axialen Regelfläche ist nun (siehe (144b), S. 307)

$$(kx_1 - x_2)(k^{-2}x_1 - x_2)^2 - (k - k^{-2})^3 x_3^2 x_4 = 0,$$

oder

$$k^2 (kx_1 - x_2)(x_1 - k^2 x_2)^2 - (k^3 - 1)^3 x_3^2 x_4 = 0. \quad (58c)$$

Die durch

$$x_1 - k^2 x_2 = 0, \quad x_3 = 0$$

dargestellte Bildgerade  $l'$  von  $l_\infty$  ist die Doppelgerade dieser kubischen Regelfläche.

Die Gerade  $l_\infty$  selbst ist die einfache Leitlinie.

Die Ebene  $[w]$  enthält ausser  $l_\infty$  noch die 2-fache Gerade

$$x_1 - k^2 x_2 = 0,$$

d. h. die durch  $O$  zu der Bildgerade  $l'$  parallel verlaufende Gerade;

diese ist offenbar eine *Torsallinie*. Der zugeordnete *Zwickpunkt* ist der unendlich ferne Punkt  $L_3'$  auf  $l'$ ; der Torsalpunkt ist  $O$ .

Die durch  $OO'$  und  $l_\infty$  gelegte Ebene

$$kx_1 - x_2 = 0$$

hat mit der Regelfläche die Gerade  $l_\infty$  und 2 mal die durch  $O'$  zu  $l_\infty$  parallel verlaufende Gerade gemein. Letztere ist demnach die zweite *Torsallinie*. Der entsprechende *Zwickpunkt* ist  $O'$ ; der Torsalpunkt ist mit dem unendlich fernen Punkte  $L_3$  von  $l_\infty$  identisch.

Eine zu den Abbildungsebenen parallele Ebene enthält eine kubische Kurve mit  $L_3'$  als Rückkehrpunkt und  $X_\mu L_3'$  als Rückkehrtangente. Die Kurve hat noch einen Wendepunkt in  $L_3$  mit  $X_\mu L_3$  als Tangente.

Die *axiale Regelfläche einer in  $[w']$  liegenden Gerade, welche durch  $O'$  geht*, besteht aus diesen 2 kubischen Regelflächen:

$$k(kx_1 - x_2)^2(x_1 - \sqrt{k}x_2) + (k\sqrt{k} - 1)^3 x_3 x_4^2 = 0$$

und

$$k(kx_1 - x_2)^2(x_1 + \sqrt{k}x_2) - (k\sqrt{k} + 1)^3 x_3 x_4^2 = 0.$$

Ihre Eigenschaften sind denen der vorigen Regelfläche analog.

#### § 14. Die axiale Regelfläche der zu $[w]$ gehörenden reellen Axe.

Diese Fläche besteht aus der 3-fachen Ebene der reellen Axen.

Die *axiale Regelfläche der zu  $[w']$  gehörenden reellen Axe* ist zerfallen in die 3-fache Ebene der reellen Axen und in die kubische Regelfläche

$$(x_1 - x_2)^2(x_1 + x_2) - 8 x_3 x_4^2 = 0.$$

#### § 15. Die Regelfläche der Strahlen, welche auf einem zu den Abbildungsebenen parallelen Kreise ruhen.

Die Fläche ist vom 18<sup>ten</sup> Grade und trägt den Kreis als eine 9-fache Kurve.

Der Kreis möge durch

$$\alpha_3 \beta_3 x_1 x_2 + x_1 (\alpha_2 \beta_3 x_3 + \alpha_3 \beta_2 x_4) + x_2 (\alpha_1 \beta_3 x_3 + \alpha_3 \beta_1 x_4) + (\alpha_0 \beta_3 x_3^2 + \alpha_3 \beta_0 x_4^2) = 0, \quad (59)$$

$$x_3 = \mu x_4 \quad (60)$$

dargestellt werden.

Wir benutzen wiederum die folgenden Bezeichnungen:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0 &= \alpha_3 \beta_3, \quad \gamma_0' = \mu \alpha_3 \beta_3, \quad \gamma_0'' = \mu^2 \alpha_3 \beta_3, \\ \gamma_1 &= \mu \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2, \quad \gamma_2 = \mu \alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1, \\ \gamma_1' &= \mu(\mu \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2), \quad \gamma_2' = \mu(\mu \alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1), \\ \gamma_3 &= \mu^2 \alpha_0 \beta_3 - \alpha_3 \beta_0. \end{aligned} \right\} \dots (61)$$

Die Ebene  $[w]$  enthält eine Kurve 6<sup>ten</sup> Grades und 3 zweifache durch jeden der Kreispunkte gelegte Geraden.

Die Kurve ist gegeben durch

$$\gamma_0' x_1^3 x_2^3 + \gamma_1' x_1^3 x_2^2 x_3 + \gamma_2' x_1^2 x_2^3 x_3 + \gamma_3 x_1^2 x_2^2 x_3^2 + \gamma_0' (x_1^3 + x_2^3) x_3^3 + \gamma_2 x_1^2 x_3^4 + \gamma_1 x_2^2 x_3^4 + \gamma_0 x_3^6 = 0. \quad (62c)$$

Die Tangenten der Kreispunkte sind durch

$$\gamma_0'' x_2^3 + \gamma_1' x_2^2 x_3 + \gamma_0' x_3^3 = 0 \quad (63c)$$

und

$$\gamma_0'' x_1^3 + \gamma_2' x_1^2 x_3 + \gamma_0' x_3^3 = 0 \quad (64c)$$

angewiesen.

Diese Gleichungen bestimmen ebenfalls (siehe (61)) die Schnittpunkte der Kurve bez. mit den isotropen Geraden  $OJ$  und  $OI$ .

Die Geraden (63c) (bez. (64c)) haben im 3-fachen Punkte  $I$  (bez.  $J$ ) 4 Punkte mit der Kurve gemein und berühren diese noch in den Schnittpunkten mit  $OJ$  (bez.  $OI$ ).

Der Schnitt in  $[w']$  besteht aus einer Kurve 12<sup>ten</sup> Grades und aus 3 einfachen durch jeden der Kreispunkte verlaufenden Geraden.

Die Gleichung der Kurve 12<sup>ten</sup> Grades lautet:

$$\gamma_0 x_1^{\frac{3}{2}} x_2^{\frac{3}{2}} + \gamma_1 x_1^{\frac{3}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} x_4 + \gamma_2 x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{3}{2}} x_4 + \gamma_3 x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} x_4^2 + \gamma_0' (x_1^{\frac{3}{2}} + x_2^{\frac{3}{2}}) x_4^{\frac{3}{2}} + \gamma_2' x_1^{\frac{1}{2}} x_4^{\frac{5}{2}} + \gamma_1' x_2^{\frac{1}{2}} x_4^{\frac{5}{2}} + \gamma_0'' x_4^3 = 0, \quad (65c)$$

oder

$$[x_1 x_2 (\gamma_0 x_1 x_2 + \gamma_1 x_1 x_4 + \gamma_2 x_2 x_4 + \gamma_3 x_4^2) - \{x_1 (\gamma_0' x_1 + \gamma_2' x_4)^2 + x_2 (\gamma_0' x_2 + \gamma_1' x_4)^2\} x_4^3 + \gamma_0'' x_4^6]^2 - 4 (\gamma_0'' \gamma_3 - \gamma_1' \gamma_2')^2 x_1 x_2 x_4^{10} = 0. \quad (66c)$$

Die Tangenten in den 6-fachen Kreispunkten ergeben sich aus

$$(\gamma_0 x_2 + \gamma_1 x_4)^2 x_2 - \gamma_0'^2 x_4^3 = 0. \quad (63'c)$$

und

$$(\gamma_0 x_1 + \gamma_2 x_4)^2 x_1 - \gamma_0'^2 x_4^3 = 0. \quad (64'c)$$

Diese Gleichungen liefern (siehe (61)) auch die Schnittpunkte der Kurve bez. mit den isotropen Geraden  $O'J$  und  $O'I$ . Diese Punkte sind alle gewöhnliche Punkte und haben die isotropen Geraden als Tangenten.

Die Geraden (63' $c$ ) (bez. (64' $c$ )) haben im 6-fachen Punkte  $I$  (bez.  $J$ ) 8 Punkte mit der Kurve gemein und enthalten noch die Punkte, wo die Kurve die Gerade  $O'J$  (bez.  $O'I$ ) schneidet.

Auf der Fläche sind die Kreispunkte 9-fache; von ihren Berührungsebenen sind je 3 bez. mit den Ebenen

$$(\gamma_0 x_2 + \gamma_1 x_4)^2 (\gamma_0' x_2 + \gamma_1 x_3) + \gamma_0^3 (x_3 - \mu x_4)^3 = 0 \quad (67c)$$

und

$$(\gamma_0 x_1 + \gamma_2 x_4)^2 (\gamma_0' x_1 + \gamma_2 x_3) + \gamma_0^3 (x_3 - \mu x_4)^3 = 0 \quad (68c)$$

zusammengefallen. Diese bilden bez. die Regelfläche der Strahlen, welche auf den durch den Mittelpunkt des Kreises verlaufenden isotropen Geraden ruhen.

§ 16. *Die Regelfläche der Strahlen, welche auf einem zu der Abbildungsebenen parallelen Kreise ruhen, dessen Mittelpunkt auf  $OO'$  liegt.*

Wir haben nun

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0, \quad \alpha_2 = 0, \\ \beta_1 &= 0, \quad \beta_2 = 0 \end{aligned}$$

einzusetzen, wonach der Kreis durch

$$\alpha_3 \beta_3 x_1 x_2 + \alpha_0 \beta_3 x_3^2 + \alpha_3 \beta_0 x_4^3 = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{array} \right. \quad (69)$$

$$x_3 = \mu x_4 \quad \left\{ \begin{array}{l} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{array} \right. \quad (70)$$

bestimmt ist.

Die in  $[w]$  liegende Kurve hat jetzt die Gleichung

$$\mu^2 x_1^3 x_2^3 + \frac{\gamma_3}{\gamma_0} x_1^2 x_2^2 x_3^2 + \mu (x_1^3 + x_2^3) x_3^3 + x_3^6 = 0. \quad (71c)$$

Die Tangenten der Kreispunkte, welche zugleich die Kurve zum Gesamtschnitte ergänzen, sind nun durch

$$\mu x_2^3 + x_3^3 = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (72c)$$

$$\mu x_1^3 + x_3^3 = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (73c)$$

angewiesen.

Die Gleichung der in  $[w']$  befindlichen Kurve ist

$$x_1^{\frac{3}{2}} x_2^{\frac{3}{2}} + \frac{\gamma_3}{\gamma_0} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} x_4^2 + \mu (x_1^{\frac{3}{2}} + x_2^{\frac{3}{2}}) x_4^{\frac{3}{2}} + \mu^2 x_4^3 = 0, \quad (74c)$$

oder

$$[x_1 x_2 (\gamma_0 x_1 x_2 + \gamma_3 x_4^2)^2 - \mu^2 \gamma_0^2 (x_1^3 + x_2^3) x_4^3 + \mu^4 \gamma_0^2 x_4^6]^2 - 4 \mu^2 \gamma_0^2 \gamma_3^2 x_1 x_2 x_4^{10} = 0. \quad (75c)$$

Die Tangenten der Kreispunkte ergeben sich aus

$$x_2^3 - \mu^2 x_4^3 = 0,$$

und

$$x_1^3 - \mu^2 x_4^3 = 0.$$

Die Berührungsebenen der Kreispunkte an der Fläche sind

$$\mu x_2^3 + (x_3 - \mu x_4)^3 = 0,$$

und

$$\mu x_1^3 + (x_3 - \mu x_4)^3 = 0.$$

§ 17. Die Regelfläche der Strahlen, welche auf einem zu den Abbildungsebenen parallelen Kreise ruhen, der  $OO'$  schneidet.

Es gilt hier

$$\alpha_0 = 0, \beta_0 = 0,$$

mithin

$$\gamma_3 = 0.$$

Die Gleichungen des Kreises sind also

$$\alpha_3 \beta_3 x_1 x_2 + x_1 (\alpha_2 \beta_3 x_3 + \alpha_3 \beta_2 x_4) + x_2 (\alpha_1 \beta_3 x_3 + \alpha_3 \beta_1 x_4) = 0, \quad (76)$$

$$x_3 = \mu x_4. \quad (77)$$

Die in  $[w]$  befindliche Kurve hat nun die Gleichung

$$\gamma_0'' x_1^3 x_2^3 + \gamma_1' x_1^3 x_2^2 x_3 + \gamma_2' x_1^2 x_2^3 x_3 + \gamma_0' (x_1^3 + x_2^3) x_3^3 + \gamma_2 x_1^2 x_3^4 + \gamma_1 x_2^2 x_3^4 + \gamma_0 x_3^6 = 0. \quad (78c)$$

Die Tangenten der Kreispunkte behalten ihre Gleichungen (63c) und (64c).

Die in  $[w']$  liegende Kurve wird durch



$$x_1 x_2 (\gamma_0 x_1 x_2 + \gamma_1 x_1 x_4 + \gamma_2 x_2 x_4)^2 - \{x_1 (\gamma_0' x_1 + \gamma_2' x_4)^2 + x_2 (\gamma_0' x_2 + \gamma_1' x_4)^2\} x_4^3 + \gamma_0'' x_4^6 \}^2 - \\ - 4 \gamma_1'^2 \gamma_2'^2 x_1 x_2 x_4^{10} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81c)$$

dargestellt. Die Tangenten der Kreispunkte sind auch hier durch die Gleichungen (63'*c*) und (64'*c*) angewiesen.

§ 18. *Die Regelfläche der Strahlen, welche auf einem in der Abbildungsebene  $[w]$  liegenden Kreise ruhen.*

Die vorhergehende Regelfläche ist zerfallen in 12 mal die Abbildungsebene  $[w]$  und in eine Fläche 6<sup>ten</sup> Grades.

Auf dieser Fläche ist der Kreis eine *einfache* Kurve.

Es gilt hier  $\mu = \infty$ , wonach der Kreis durch

$$\alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_2 x_1 x_3 + \alpha_1 x_2 x_3 + \alpha_0 x_3^2 = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} . \quad . \quad (83) \\ x_4 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} . \quad . \quad (84) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

bestimmt ist.

Wenn der Kreis die isotrope Gerade  $OJ$  (bez.  $OI$ ) in  $M_1$  (bez.  $M_2$ ) schneidet, so besteht der Schnitt in  $[w]$  aus dem gegebenen Kreise und aus den 2-fachen Geraden  $IM_1$  und  $JM_2$ .

Der Schnitt in  $[w']$  besteht aus den einfachen isotropen Geraden

$$\alpha_2^2 x_2 - \alpha_3^2 x_4 = 0$$

und

$$\alpha_1^2 x_1 - \alpha_3^2 x_4 = 0$$

und aus der *Bildkurve* 4<sup>ten</sup> Grades des Kreises. Diese Bildkurve hat die Gleichung

$$\alpha_3 x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{1}{2}} + \alpha_2 x_1^{-\frac{1}{2}} x_4^{-\frac{1}{2}} + \alpha_1 x_2^{-\frac{1}{2}} x_4^{-\frac{1}{2}} + \alpha_0 x_4^{-1} = 0, \quad (85c)$$

oder

$$[\alpha_0^2 x_1 x_2 - \alpha_1^2 x_1 x_4 - \alpha_2^2 x_2 x_4 + \alpha_3^2 x_4^2]^2 - 4(\alpha_0 \alpha_3 - \alpha_1 \alpha_2) x_1 x_2 x_4^2 = 0. \quad (86c)$$

Die Kreispunkte sind *Rückkehrpunkte*, deren Tangenten durch

$$\alpha_0^2 x_2 - \alpha_1^2 x_4 = 0$$

und

$$\alpha_0^2 x_1 - \alpha_2^2 x_4 = 0$$

gegeben, sonach mit den Bildern von  $IM_1$  und  $JM_2$  identisch sind.

Die Bildkurve berührt die durch  $O'$  gehenden isotropen Geraden

in den Punkten, wo die Ausartungselemente diese Geraden treffen.

Auf der Fläche sind die Kreispunkte 3-fache; von den Berührungsebenen von  $I$  (bez.  $J$ ) sind 2 zusammengefallen in die Ebene, welche  $IM_1$  (bez.  $JM_2$ ) mit ihrem Bilde verbindet; die dritte Ebene verbindet die in  $I$  (bez.  $J$ ) an den Kreis gelegte Tangente mit ihrem in  $[w']$  liegenden Bilde.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  ist eine *trirculare* Kurve 6<sup>ten</sup> Grades.

§ 19. *Die Regelfläche der Strahlen, welche auf einem in der Abbildungsebene  $[w]$  liegenden Kreise ruhen, dessen Mittelpunkt  $O$  ist.*

Man hat jetzt

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0,$$

wonach der Kreis diese Gleichungen hat:

$$\alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_0 x_3^2 = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} . . . . . \end{array} \right. \quad (87)$$

$$x_4 = 0. \quad \left\{ \begin{array}{l} . . . . . \end{array} \right. \quad (88)$$

Die Regelfläche ist wiederum vom 6<sup>ten</sup> Grade und trägt den Kreis als eine *einfache* Kurve.

Der Schnitt in  $[w]$  besteht aus der 4-fachen unendlich fernen Gerade und aus dem einfachen Kreise.

Die Fläche schneidet  $[w']$  in der 2-fachen unendlich fernen Gerade und im 2-fachen Bildkreise des in  $[w]$  gegebenen Kreises.

Die Gleichung des Bildkreises lautet

$$\alpha_0^2 x_1 x_2 - \alpha_3^2 x_4^2 = 0. \quad . . . . . \quad (89c)$$

Der Mittelpunkt ist  $O'$ .

Die unendlich ferne Gerade der Abbildungsebenen ist eine *Doppelgrade* der Fläche,

Die Kreispunkte sind 3-fache; von ihren Berührungsebenen fallen 2 mit  $[w']$  und *eine* mit  $[w]$  zusammen.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  besteht aus der 2-fachen unendlich fernen Gerade und aus einer *circularen* Kurve 4<sup>ten</sup> Grades.

§ 20. *Die Regelfläche der Strahlen, welche ruhen auf einem in der Abbildungsebene  $[w]$  liegenden Kreise, der  $O$  enthält.*

Jetzt hat man

$$\alpha_0 = 0.$$

Der Kreis hat die Gleichungen

$$\alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_2 x_1 x_3 + \alpha_1 x_2 x_3 = 0, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \end{array} \quad (90)$$

$$x_4 = 0. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} . \quad . \quad . \\ . \quad . \quad . \end{array} \quad (91)$$

Die Ebene  $[w]$  wird 2 mal abgetrennt. Es erübrigt also eine Fläche 4<sup>ten</sup> Grades, welche den Kreis als eine einfache Kurve trägt.

Der Schnitt in  $[w]$  besteht aus dem gegebenen Kreise und aus der 2-fachen Gerade, welche  $O$  mit dem Bilde des  $O$  vorangehenden Punktes verbindet, also aus der Gerade

$$\alpha_2^2 x_1 - \alpha_1^2 x_2 = 0.$$

Die in  $[w']$  liegende *Bildkurve* ist ein Kegelschnitt und wird durch

$$(\alpha_1^2 x_1 + \alpha_2^2 x_2 - \alpha_3^2 x_4)^2 - 4 \alpha_1^2 \alpha_2^2 x_1 x_2 = 0 \quad . \quad (93c)$$

dargestellt. Er wird durch die Geraden

$$\alpha_2^2 x_2 - \alpha_3^2 x_4 = 0$$

und

$$\alpha_1^2 x_1 - \alpha_3^2 x_4 = 0$$

zu einem Gebilde 4<sup>ten</sup> Grades ergänzt. Diese Geraden schneiden bez. die isotropen Geraden  $O'J$  und  $O'I$  in denselben Punkten, wo die Bildkurve letztere berührt.

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene  $\omega_\mu$  ist eine circulare Kurve 4<sup>ten</sup> Grades.

## SECHSTER ABSCHNITT.

*Funktionen, welche in Bezug auf ihre conforme Abbildung  
mit den parabolischen und hyperbolischen Congruenzen  
zusammenhangen.*

§ 1. Im vorliegenden Abschnitte werden wir eine Übersicht liefern über die Art und Weise, in welcher die Strahlencongruenzen bei der conformen Abbildung von Funktionen zu verwerthen sind.

Betrachten wir zunächst die einfachste Funktion, nämlich die lineare Beziehung

$$w' = \gamma w + b,$$

wo  $\gamma$  und  $b$  reell gedacht werden.

Wir setzen

$$b = -\gamma a$$

und erhalten somit

$$w' = \gamma(w - a).$$

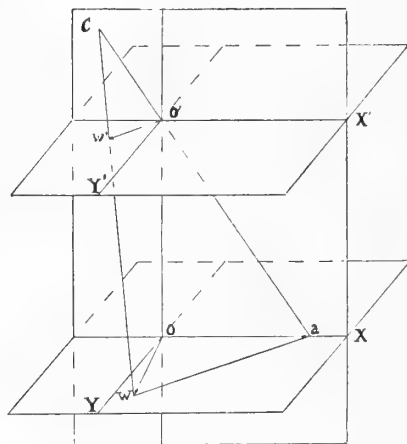


Fig. 16.

Indem wir  $w'$ ,  $w$  und  $a$  als Vektoren auffassen, ist die reelle Grösse  $a$  ein der  $X$ -Axe der reellen Zahlen paralleler Vektor.

Der Vektor  $(w - a)$  ist die Gerade, welche den Punkt  $a(x = a, y = 0)$  mit dem Punkte  $w(x = u, y = v)$  verbindet.

Weil  $\gamma$  eine reelle Zahl ist, so ist der Vektor  $w'$  in der Ebene  $[w']$  zu dem Vektor  $(w - a)$  in  $[w]$  parallel; dabei ist der Tensor von  $w'$  das  $\gamma$ -fache von dem Tensor von  $(w - a)$ .

Demzufolge schneidet die Verbindungslinie  $w w'$  die Verbindungslinie  $a O'$  in einem solchen Punkte  $C$ , wofür

$$aC : O'C = 1 : \gamma.$$

Hieraus ist sogleich ersichtlich, dass  $C$  ein fester Punkt auf der festen Gerade  $a O'$  ist.

Jeder Congruenzstrahl  $w w'$  der Funktion  $w' = \gamma w + b$  zielt also nach diesem festen Punkte  $C$ , welcher sich in der Ebene der reellen Axen befindet. Also:

*Die Funktion*

$$w' = \gamma w + b$$

wird vertreten durch einen Strahlenbündel, dessen Scheitel  $C$  in der Ebene der reellen Axen liegt.

§ 2. Es handelt sich nunmehr um die Frage, wie eine nämliche Congruenz zur Abbildung mehrerer Funktionen dienen kann.

Es sei  $h$  der Abstand der Ebenen  $[w]$  und  $[w']$ .

Wir legen eine Ebene  $[W]$  parallel zu den Ebenen  $[w]$  und  $[w']$ , in einem Abstände  $ph$  von der Ebene  $[w]$ .

Ein Congruenzstrahl  $w w'$  schneidet die neue Ebene  $[W]$  in einem Punkte  $W = U + iV$ , und zwar so, dass zwischen den Vektoren  $w$ ,  $w'$  und  $W$  der folgende Verband besteht:

$$\frac{W - w}{w' - w} = p,$$

wonach

$$W = pw' + (1 - p)w. \quad (1)$$

Indem wir eine zweite Ebene  $[W']$  parallel zu  $[w]$  und  $[w']$  legen, in einem Abstände  $p'h$  von  $[w]$ , so gilt für den Vektor des Schnittpunktes  $W' = U' + iV'$  dieser Ebene mit dem Congruenzstrahle  $ww'$ :

$$W' = p'w' + (1 - p')w. \quad (2)$$

Die Grössen  $w$  und  $w'$  mögen durch die Funktion

$$\varphi(w, w') = 0 \quad (3)$$

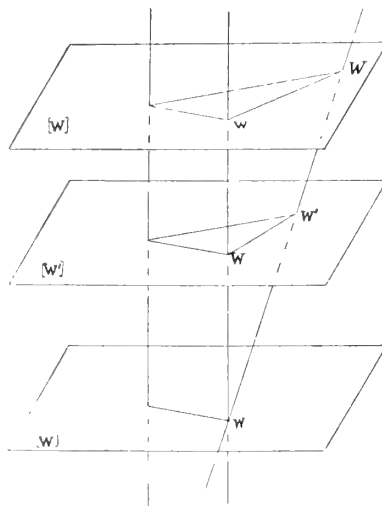


Fig. 17.

verknüpft sein. Alsdann sind auch die Grössen  $W$  und  $W'$  durch eine gewisse Beziehung

$$\Phi(W, W') = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

einander zugeordnet.

Die Gestalt der Funktion  $\Phi$  wird ermittelt, indem man aus den drei Gleichungen

$$\begin{aligned} W &= pw' + (1 - p)w, \\ W' &= p'w' + (1 - p')w, \\ \varphi(w, w') &= 0 \end{aligned}$$

die Grössen  $w$  und  $w'$  eliminiert.

Da aus (1) und (2) folgt

$$w = \frac{p'W - pW'}{p' - p}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$w' = \frac{(p' - 1)W - (p - 1)W'}{p' - p}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

so liefern (3) und (4)

$$\Phi(W, W') \equiv \varphi\left(\frac{p'W - pW'}{p' - p}, \frac{(p' - 1)W - (p - 1)W'}{p' - p}\right) = 0. \quad (7)$$

Setzen wir noch

$$\frac{p'}{p' - p} = \alpha, \quad \frac{p' - 1}{p' - p} = \alpha', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

wonach

$$\frac{p}{p' - p} = \alpha - 1, \quad \frac{p - 1}{p' - p} = \alpha' - 1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

so verwandelt sich (7) in

$$\Phi(W, W') \equiv \varphi(\alpha W + (1 - \alpha)W', \alpha' W + (1 - \alpha')W'). \quad (10)$$

Wir wollen nunmehr die Punkte  $W$  um eine Strecke  $\delta$  verschieben, wonach wir einen Punkt erhalten, dessen Affix  $\overline{W}$  durch

$$\overline{W} = W + \delta$$

bestimmt ist; sodann wollen wir alle Vektoren  $\overline{W}$  in demselben

Verhältniss  $\gamma$  vergrössern, wonach wir zu Punkten gelangen, deren Affixen durch

$$\bar{w} = \gamma \bar{W}$$

gegeben sind; im letzteren Falle haben wir also

$$\bar{w} = \gamma(W + \delta)$$

oder

$$W = \frac{\bar{w}}{\gamma} - \delta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Wenn wir in derselben Weise mit den Punkten  $w'$  verfahren, so bekommen wir ein durch

$$\bar{w}' = \gamma'(W' + \delta')$$

bestimmtes Punktsystem  $\bar{w}'$ ; im Letzteren hat man daher

$$W' = \frac{\bar{w}'}{\gamma'} - \delta'. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Die Ausdrücke, welche in (10) erscheinen, werden somit folgendermassen umgeformt:

$$\alpha W + (1 - \alpha) W' = \frac{\alpha}{\gamma} \bar{w} + \frac{1 - \alpha}{\gamma'} \bar{w}' - \{\alpha \delta + (1 - \alpha) \delta'\},$$

$$\alpha' W + (1 - \alpha') W' = \frac{\alpha'}{\gamma} \bar{w} + \frac{1 - \alpha'}{\gamma'} \bar{w}' - \{\alpha' \delta + (1 - \alpha') \delta'\}.$$

Indem wir

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha}{\gamma} = a, \quad \frac{1 - \alpha}{\gamma'} = b, \quad - \{\alpha \delta + (1 - \alpha) \delta'\} = c, \\ \frac{\alpha'}{\gamma} = a', \quad \frac{1 - \alpha'}{\gamma'} = b', \quad - \{\alpha' \delta + (1 - \alpha') \delta'\} = c', \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

setzen, verwandelt sich die Gleichung (10) in

$$\bar{\varphi}(\bar{w}, \bar{w}') \equiv \varphi(a\bar{w} + b\bar{w}' + c, a'\bar{w} + b'\bar{w}' + c') = 0. \quad (14)$$

Hieraus ersehen wir, dass die Funktion  $\bar{\varphi}$  aus der Funktion  $\varphi$  hergeleitet werden kann, indem die Veränderlichen  $w$  und  $w'$  von  $\varphi$  durch ganze lineare Formen dieser Grössen ersetzt werden.

Die Gleichung  $\varphi(w, w') = 0$  möge auch durch die Kurve ver-

treten worden, welche durch diese Gleichung in den Cartesischen Coordinaten  $w, w'$  dargestellt wird; diese Kurve wollen wir als das *Diagram von  $\varphi(w, w') = 0$*  bezeichnen.

Wir können alsdann Folgendes behaupten:

*Das Diagram von  $\bar{\varphi}(\bar{w}, \bar{w}') = 0$  wird aus dem Diagram von  $\varphi(w, w') = 0$  durch eine projective Transformation hergeleitet, bei der die unendlich fernen Gebilde im Unendlichen bleiben.*

Von dieser *affinen* Transformation bildet die Verschiebung nebst Drehung einen besonderen Fall. In diesem Falle ist nämlich

$$\begin{aligned} a &= \cos \theta, & b &= -\sin \theta, \\ a' &= \sin \theta, & b' &= \cos \theta. \end{aligned}$$

Wenn diese Bedingungen nicht erfüllt werden, so setzen wir

$$\left. \begin{aligned} a &= \rho r \cos \theta, & b &= -\rho r' \sin \theta, & c &= \rho \lambda, \\ a' &= \rho' r \sin \theta, & b' &= \rho' r' \cos \theta, & c' &= \rho' \lambda'. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Durch die Substitution dieser Ausdrücke in (14) gestaltet letztere sich in

$$\bar{\varphi}(\bar{w}, \bar{w}') \equiv \varphi[\rho(r\bar{w} \cos \theta - r'\bar{w}' \sin \theta + \lambda), \rho'(r\bar{w} \sin \theta + r'\bar{w}' \cos \theta + \lambda')],$$

wonach

$$\left. \begin{aligned} w &= \rho(r\bar{w} \cos \theta - r'\bar{w}' \sin \theta + \lambda), \\ w' &= \rho'(r\bar{w} \sin \theta + r'\bar{w}' \cos \theta + \lambda'). \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Der Übergang vom Diagram von  $\varphi(w, w') = 0$  zum Diagram von  $\bar{\varphi}(\bar{w}, \bar{w}')$  besteht also zuerst in einer Verkleinerung der Coordinaten  $w$  und  $w'$  bez. im Verhältniss  $1:\rho$  und  $1:\rho'$ , sodann in einer Verschiebung  $(\lambda, \lambda')$  und einer Drehung um  $\theta$ , und schliesslich in einer Verkleinerung der zuletzt erhaltenen Coordinaten bez. im Verhältniss  $1:r$  und  $1:r'$ .

Dies sind die Operationen, welche ein gegebenes Diagram in ein anderes umformen, das derselben Strahlencongruenz entspricht.

In den Beziehungen (13) sind alle Grössen  $\alpha, \alpha', \gamma, \gamma', \delta$  und  $\delta'$  reell gedacht, wonach auch  $a, a', b, b', c$  und  $c'$  reell sind.

Umgekehrt: setzen wir  $\rho, \rho', \lambda, \lambda', r, r'$  und  $\theta$  als reell voraus, so werden auch  $a, b, c, a', b'$  und  $c'$  reell sein; da ferner die Gleichungen (13) in  $\alpha, \alpha', \gamma, \gamma', \delta$  und  $\delta'$  linear sind, so werden auch diese Grössen reelle Werte bekommen.

Wir schliessen, dass jede reelle Transformation (16) durch **reelle Operationen mit den Abbildungsebenen und den in diesen befindlichen Kurven dargestellt werden kann.**



Damit die Operationen mit den Abbildungsebenen und den in diesen befindlichen Kurven reell seien, genügt es, dass  $\alpha$  und  $\alpha'$  reell sind. Wenn  $\gamma$  und  $\gamma'$  complex sind, so bedeutet dies, dass eine durch den Punkt  $\bar{w}$  bez.  $\bar{w}'$  beschriebene Kurve nebst ihrer ähnlichen Vergrößerung noch eine Drehung erfährt, während complexe Werte von  $\delta$  und  $\delta'$  einer zu der Axe der reellen Zahlen *nicht*-parallelen Verschiebung entsprechen.

Wir sind also im Stande mit einer Strahlencongruenz Operationen zu bewerkstelligen, welche imaginären Transformationen des Diagrams entsprechen (z. B. die Multiplikation einer Coordinate mit einem imaginären Faktor). Diese Eigenschaft ermöglicht uns aus dem Diagram ein anderes herzuleiten, welches zwar in rein geometrischer, nicht aber in metrischer Hinsicht dem ursprünglichen Diagram verwandt ist.

Betrachten wir z. B. die Ellipse und die Hyperbel, welche, auf ihren Axen bezogen, durch die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dargestellt werden. Es erhellt, dass wir die Ordinaten der Ellipse nur mit  $\sqrt{-1}$  zu multipliciren haben, um die Hyperbel zu erhalten.

Dieses Verfahren wird aber jetzt ausser Betracht bleiben, weil die Anwendung dieses Prinzips für jede Art von Kurven eine andere ist.

§ 3. Die Gleichung  $\varphi(w, w') = 0$  kann noch weitere Umstellungen erfahren, ohne dass die Strahlencongruenzen aufhören ihre Dienste zu leisten.

Zuerst bemerken wir, dass die Coordinaten  $\bar{w}$  und  $\bar{w}'$  durch gewisse Funktionen

$$\begin{aligned} \bar{w} &= f(w_1), \\ \bar{w}' &= f'(w_1') \end{aligned}$$

in Coordinaten  $w_1$  und  $w_1'$  übergeführt werden können.

Wenn  $\bar{w}$  und  $\bar{w}'$  der Beziehung

$$\bar{\varphi}(\bar{w}, \bar{w}') \equiv \bar{\varphi}(a\bar{w} + b\bar{w}' + c, a'\bar{w} + b'\bar{w}' + c') = 0$$

genügen, so werden  $w_1$  und  $w_1'$  durch die Beziehung

$$\varphi_1(w_1, w_1') = \varphi[af(w_1) + bf'(w_1') + c, a'f(w_1) + b'f'(w_1') + c'] = 0 \quad (17)$$

verknüpft sein.

Um die conforme Abbildung dieser Funktion  $\varphi_1$  zu ermitteln betrachten wir zuerst eine durch die (complexe) Coordinate  $w_1$  beschriebene Kurve  $[w_1]$ . Die entsprechende Bahn  $[\bar{w}]$  der Coordinate  $\bar{w}$  ergibt sich alsdann vermittelst der Congruenz  $\bar{w} = f(w_1)$ .

Wenn wir diese Bahn, nötigenfalls nach Verschiebung, Vergrößerung und Drehung, in die erforderliche Abbildungsebene (Parallelebene) der Congruenz  $\varphi(w, w') = 0$  legen, so werden wir die Kurve  $[\bar{w}']$  von  $\bar{w}'$  (eventuell in verschobenem, verkleinertem und gedrehtem Stande) in einer anderen Abbildungsebene, jedoch in der nämlichen Congruenz, auffinden. Die Bahn  $[\bar{w}']$  von  $\bar{w}'$  wird schliesslich durch die Strahlencongruenz  $\bar{w}' = f'(w_1')$  in die Bahn  $[w_1']$  von  $w_1'$  umgestaltet. Es ist alsdann diese Kurve  $[w_1']$  in  $\varphi_1(w_1, w_1') = 0$  der Bahn  $[w_1]$ , von welcher wir ausgingen, zugeordnet.

Noch allgemeiner verfahren wir, wenn wir jede Funktion als die Beziehung zwischen zwei Abbildungsebenen einer anderen Funktion betrachten.

Es sei z. B. gegeben:

$$\left. \begin{aligned} \psi(a_1 w_1 + \bar{a} \bar{w} + a_0, b_1 w_1 + \bar{b} \bar{w} + b_0) &= 0, \\ \psi'(a_1' w_1' + \bar{a}' \bar{w}' + a_0', b_1' w_1' + \bar{b}' \bar{w}' + b_0') &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

mit dieser Beziehung zwischen  $\bar{w}$  und  $\bar{w}'$ :

$$\varphi(a\bar{w} + b\bar{w}' + c, a'\bar{w} + b'\bar{w}' + c') = 0. \quad (19)$$

Durch die Elimination von  $\bar{w}$  und  $\bar{w}'$  findet man die Beziehung

$$\psi_1(w_1, w_1') = 0, \quad (20)$$

welche noch allgemeiner als die oben hergeleitete ist.

Wenn wir in diesem Falle die conforme Abbildung von  $\psi_1(w_1, w_1') = 0$  erörtern wollen, so betrachten wir eine Kurve  $[w_1]$  als die Bahn der Coordinate  $w_1$ . Durch Verschiebung, Vergrößerung und eventuelle Drehung verwandelt sich diese Bahn in eine neue, welche in eine Abbildungsebene der Congruenz  $\psi(w, w')$  zu legen ist; es befindet sich alsdann in einer anderen Abbildungsebene eine Kurve, welche nach Verschiebung, Vergrößerung (und Drehung) in die Bahn  $[\bar{w}]$  von  $\bar{w}$  übergeht. Indem wir nun diese Bahn  $[\bar{w}]$ , nötigenfalls umgeformt, in die Congruenz  $\varphi(w, w') = 0$  legen, so finden wir in einer anderen Abbildungsebene, nach even-

tueller Umgestaltung, die Bahn  $[\bar{w}']$  von  $\bar{w}'$ . Diese Bahn wird schliesslich mittels der Congruenz  $\Psi'(w, w') = 0$  in die Bahn  $[w_1']$  von  $w_1'$  umgeformt. Die zuletzt erhaltene Bahn ist sodann die Bildkurve der Bahn  $[w_1]$  von  $w_1$  in der conformen Abbildung der Funktion  $\Psi_1(w_1, w_1') = 0$ .

Es leuchtet ein, dass wir in dieser Weise mit Hülfe immer neuer Congruenzen fortfahren können.

Das schwierige ist hierbei die gegebene Funktion  $\Psi_1(w_1, w_1') = 0$  so zu zerlegen, dass sie die Anwendung von Strahlencongruenzen *einfacher* Funktionen ermöglicht.

§ 4. Im Folgenden wird nur von *parabolischen* und *hyperbolischen* Congruenzen die Rede sein; sie gehören, wie wir ersahen, den Funktionen

$$w' = w^{\frac{m}{n}}$$

und

$$w' = w^{-\frac{m}{n}}$$

an.

Es wird sich zeigen dass wir mit Hülfe dieser Congruenzen die conformen Abbildungen einer ziemlich ausgedehnten Gruppe von Funktionen zu ermitteln im Stande sind.

Wenn wir zuerst den allgemeinen Fall des vorigen § ins Auge fassen, so sind, falls *nur parabolische* Congruenzen in Betracht kommen, den Funktionen  $\Psi, \Psi'$  und  $\varphi$  die folgenden Gestalten zu verleihen

$$\begin{aligned}\Psi(w, w') &\equiv w^m - w'^n = 0, \\ \Psi'(w, w') &\equiv w^{m'} - w'^{n'} = 0, \\ \varphi(w, w') &\equiv w^M - w'^N = 0.\end{aligned}$$

Wir setzen voraus, dass immer die Bedingungen

$$m > n, \quad m' > n', \quad M > N$$

erfüllt sind.

Indem wir den Funktionen  $\Psi, \Psi'$  und  $\varphi$  in (18) und (19) die obigen Formen erteilen, finden wir

$$f(w, \bar{w}) \equiv (a_1 w_1 + \bar{a} \bar{w} + a_0)^m - (b_1 w_1 + \bar{b} \bar{w} + b_0)^n = 0, \quad (21)$$

$$f'(w_1', \bar{w}') \equiv (a_1' w_1' + \bar{a}' \bar{w}' + a_0')^{m'} - (b_1' w_1' + \bar{b}' \bar{w}' + b_0')^{n'} = 0, \quad (22)$$

$$F(\bar{w}, \bar{w}') \equiv (a \bar{w} + b \bar{w}' + c)^M - (a' \bar{w} + b' \bar{w}' + c')^N = 0. \quad (23)$$

Die Elimination von  $\bar{w}$  und  $\bar{w}'$  ergibt im Allgemeinen eine Gleichung vom Grade  $mm'M$  in  $w_1$  und  $w_1'$ , d.h. es ist  $\Psi_1(w_1, w_1') = 0$  im Allgemeinen vom Grade  $mm'M$ . Da  $m, m'$  und  $M$  alle grösser als 1 sind, so wird der Grad von  $\Psi_1$  durch eine Zahl mit drei Teilern angewiesen. Gleichungen, deren Grad unteilbar ist, oder nur zwei Faktoren hat, können somit in dieser Weise nicht analysiert werden.

Wir wollen deshalb nunmehr untersuchen, in welchen Fällen diese Methode einen Grad für  $\Psi_1$  liefert, welcher weniger Faktoren enthält.

Zuerst setzen wir

$$w_1 = \frac{x_1}{x_5}, \quad w_1' = \frac{x_2}{x_5}, \quad \bar{w} = \frac{x_3}{x_5}, \quad \bar{w}' = \frac{x_4}{x_5},$$

und ändern die Bezeichnungen der Coefficienten folgendermassen ab:

$$f(x_1, x_3, x_5) \equiv (p_1 x_1 + p_3 x_3 + p_5 x_5)^m - (q_1 x_1 + q_3 x_3 + q_5 x_5)^n x_5^{m-n} = 0, \quad (24)$$

$$f'(x_2, x_4, x_5) \equiv (p_2' x_2 + p_4' x_4 + p_5' x_5)^{m'} - (q_2' x_2 + q_4' x_4 + q_5' x_5)^{n'} x_5^{m'-n'} = 0, \quad (25)$$

$$F(x_3, x_4, x_5) \equiv (P_3 x_3 + P_4 x_4 + P_5 x_5)^M - (Q_3 x_3 + Q_4 x_4 + Q_5 x_5)^N x_5^{M-N} = 0. \quad (26)$$

Wir betrachten jetzt  $x_1, x_2, x_3, x_4$  und  $x_5$  als die auf das Fünfeck  $X_1 X_2 X_3 X_4 X_5$  bezogenen Coordinaten eines Punktes in einem vierdimensionalen Raume.

In diesem Falle stellt  $f(x_1, x_2, x_5) = 0$  einen Raum  $m^{\text{ten}}$  Grades dar, welcher aus Ebenen zusammengesetzt ist, die alle die Gerade  $X_2 X_4$  enthalten.

Die Ebene  $\lambda$

$$\lambda \left\{ \begin{array}{l} (p) \equiv p_1 x_1 + p_3 x_3 + p_5 x_5 = 0, \\ (q) \equiv q_1 x_1 + q_3 x_3 + q_5 x_5 = 0 \end{array} \right.$$

ist eine  $n$ -fache Ebene dieses Raumes; sämtliche Berührungsräume sind mit dem Raume  $(q) = 0$  zusammengefallen.

Die durch  $(p) = 0$  und  $x_5 = 0$  bestimmte Ebene  $\theta$  ist eine  $(m - n)$ -fache Ebene, deren Berührungsräume alle in  $x_5 = 0$  vereinigt sind.

Aus demselben Grunde stellt  $f'(x_2, x_4, x_5) = 0$  einen Raum vom Grade  $m'$  dar, welcher besteht aus Ebenen, die alle die Gerade  $X_1 X_3$  tragen.

Die Ebene  $\lambda'$

$$\lambda' \left\{ \begin{array}{l} (p') \equiv p_2' x_2 + p_4' x_4 + p_5' x_5 = 0, \\ (q') \equiv q_2' x_2 + q_4' x_4 + q_5' x_5 = 0 \end{array} \right.$$

ist eine  $n'$ -fache Ebene dieses Raumes, deren sämtliche Berührungsräume in dem Raume  $(q') = 0$  vereinigt sind.

Die durch  $(p') = 0$  und  $x_5 = 0$  angewiesene Ebene  $\theta'$  ist eine  $(m' - n')$ -fache Ebene, mit  $x_5 = 0$  als einzigem Berührungsräume.

Schliesslich bestimmt  $F(x_3, x_4, x_5) = 0$  einen Raum  $M^{\text{ten}}$  Grades, welcher aus Ebenen zusammengesetzt ist, die alle auf der Gerade  $X_1 X_2$  ruhen.

Die Ebene  $\Lambda$

$$\Lambda \begin{cases} (P) \equiv P_3 x_3 + P_4 x_4 + P_5 x_5 = 0, \\ (Q) \equiv Q_3 x_3 + Q_4 x_4 + Q_5 x_5 = 0 \end{cases}$$

ist eine  $N$ -fache Ebene dieses Raumes, deren Berührungsräume alle im Raume  $(Q) = 0$  zusammengefallen sind.

Die durch  $(P) = 0$  und  $x_5 = 0$  bestimmte Ebene  $\Theta$  ist eine  $(M - N)$ -fache Ebene, deren sämtliche Berührungsräume in  $x_5 = 0$  vereinigt sind.

Die Elimination von  $x_3$  und  $x_4$  bedeutet in geometrischem Sinne eine Projektion aus der Gerade  $X_3 X_4$  auf die Ebene  $X_1 X_2 X_5$  der vierdimensionalen Kurve, welche die drei Räume  $f = 0$ ,  $f' = 0$  und  $F = 0$  gemein haben.

Die gemeinschaftliche Kurve ist vom Grade  $mm'M$ . Wenn die Gerade  $X_3 X_4$  nichts mit dieser Kurve gemein hat (wie im allgemeinen Falle), so ist der projizirende Raum und deshalb ebenso die in der Ebene  $X_1 X_2 X_5$  befindliche Projektionskurve vom Grade  $mm'M$ .

Wenn aber die vierdimensionale Kurve einige, entweder einfache oder vielfache, zusammen  $\mu$  einfache Punkte vertretende Punkte mit der Gerade  $X_3 X_4$  gemein hat, so ist der Grad der Projektionskurve  $mm'M - \mu$ .

Die Gerade  $X_3 X_4$  wird durch die Gleichungen

$$x_1 = x_2 = x_5 = 0$$

angewiesen.

Indem man diese Ausdrücke in (24), (25) und (26) substituirt, erhält man

$$\begin{aligned} p_3 x_3 &= 0, \\ p_4' x_4 &= 0, \\ P_3 x_3 + P_4 x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Soll es einen Schnittpunkt der Schnittkurve mit  $X_3 X_4$  geben, so muss er durch eine der obigen Gleichungen bestimmt sein.

Der Fall, wo allen Gleichungen identisch genügt wird, d. h. wo  $p_3 = p_4' = P_3 = P_4 = 0$  ist, ist hier ausgeschlossen, weil alsdann die Gleichung  $F(x_3, x_4, x_5) = 0$  in die beiden Gleichungen  $x_5^{M-N} = 0$  und  $(Q_3 x_3 + Q_4 x_4 + Q_5 x_5)^N = P_5^M x_5^N$ , oder  $Q_3 x_3 + Q_4 x_4 + Q_5 x_5 - \sqrt[N]{P_5^M} x_5 = 0$  d. h. in  $x_5^{M-N} = 0$  und  $N$  lineare Beziehungen zwischen  $x_3$ ,  $x_4$  und  $x_5$  zerfallen würde.

Es sind also die folgenden drei Fälle zu unterscheiden:

I. der Schnittpunkt  $S$  ist durch

$$x_3 = 0$$

bestimmt; man hat alsdann

$$p_4' = 0 \text{ und } P_4 = 0;$$

II. der Schnittpunkt  $S'$  ist durch

$$x_4 = 0$$

angewiesen; es gilt sodann

$$p_3 = 0 \text{ und } P_3 = 0;$$

III. Der Schnittpunkt  $S''$  ist durch

$$P_3 x_3 + P_4 x_4 = 0$$

gegeben; es giebt alsdann die Bedingungen

$$p_3 = 0 \text{ und } p_4' = 0.$$

I. Im ersten Falle lauten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_3, x_5) &\equiv (p_4 x_1 + p_3 x_3 + p_5 x_5)^m - (q_1 x_1 + q_3 x_3 + q_5 x_5)^n x_5^{m-n} = 0, \\ f'(x_2, x_4, x_5) &\equiv (p_2' x_2 + p_5' x_5)^{m'} - (q_2' x_2 + q_4' x_4 + q_5' x_5)^{n'} x_5^{m'-n'} = 0, \\ F(x_3, x_4, x_5) &\equiv (P_3 x_3 + P_5 x_5)^M - (Q_3 x_3 + Q_4 x_4 + Q_5 x_5)^N x_5^{M-N} = 0. \end{aligned}$$

Da weder  $f' = 0$  noch  $F = 0$  die Coordinate  $x_1$  enthält, so können diese Gleichungen auch die Flächen vertreten, in welchen die Räume  $f' = 0$  und  $F = 0$  den Raum  $x_1 = 0$  schneiden. Wir haben sodann zu erforschen, wie sich der Punkt  $X_4$  als Punkt der Schnittkurve der Flächen  $f' = 0$  und  $F = 0$  verhält. Die Fläche  $f' = 0$  wird durch die Ebene  $x_5 = 0$  in der  $(m' - n')$ -fachen Gerade  $X_3 X_4$  berührt; die Ebene  $x_5 = 0$  berührt die Fläche  $F = 0$  in der  $(M - N)$ -fachen Gerade  $X_2 X_4$ .

In der Nähe von  $X_4$  sind die Gleichungen folgendermassen umzugestalten:

$$p_2' x_2 + p_5' x_5 = (q_2' x_2 + q_4' x_4 + q_5' x_5)^{\frac{n'}{m'}} x_5^{\frac{m'-n'}{m'}},$$

$$P_3 x_3 + P_5 x_5 = (Q_3 x_3 + Q_4 x_4 + Q_5 x_5)^{\frac{N}{M}} x_5^{\frac{M-N}{M}}.$$

Es erhellt, dass  $p_2' x_2$  verschwindend klein wird wie  $q_4'^{\frac{n'}{m'}} x_5^{\frac{m'-n'}{m'}}$ , und dass  $P_3 x_3$  sich der Null nähert wie  $Q_4^{\frac{N}{M}} x_5^{\frac{M-N}{M}}$ . Die Elimination von  $x_5$  aus

$$p_2' x_2 = q_4'^{\frac{n'}{m'}} x_5^{\frac{m'-n'}{m'}}$$

und

$$P_3 x_3 = Q_4^{\frac{N}{M}} x_5^{\frac{M-N}{M}}$$

ergibt alsdann eine Beziehung zwischen  $x_2$  und  $x_3$ , welche zu betrachten ist als die Darstellung der Projektion der Raumkurve auf  $x_5 = 0$  in der Nähe von  $X_4$ . Die erwähnte Elimination liefert

$$p_2'^{\frac{m'}{m'-n'}} q_4'^{\frac{n'}{m'-n'}} x_2^{\frac{m'}{m'-n'}} = P_3^{\frac{M}{M-N}} Q_4^{\frac{N}{M-N}} x_3^{\frac{M}{M-N}}$$

oder

$$p_2'^{m'(M-N)} Q_4^{N(m'-n')} x_2^{m'(M-N)} = P_3^{M(m'-n')} q_4'^{n'(M-N)} x_3^{M(m'-n')}.$$

Es ist jetzt die Frage, welche von den Exponenten  $m'(M-N)$  und  $M(m'-n')$  der grössere ist; wir gelangen also zu zwei Fällen.

A.  $m'N > Mn'$ , wonach  $m'(M-N) < M(m'-n')$ .

Der Punkt  $X_4$  ist ein  $m'(M-N)$ -facher mit  $x_2 = 0$  als Tangente.

Auf der Raumkurve ist  $X_4$  sodann ebenfalls ein  $m'(M-N)$ -facher Punkt.

Die beiden Räume  $f' = 0$  und  $F = 0$  durchbohren sich in einer Fläche, welche die Gerade  $X_1 X_4$  als eine  $m'(M-N)$ -fache Gerade trägt.

Betrachten wir jetzt den Schnitt des Raumes  $f = 0$  mit dem Raume  $x_4 = 0$  (welcher *nicht* ein Berührungsraum ist), so finden wir für die Schnittfläche

$$(p_3 x_3 + p_5 x_5)^m - (q_3 x_3 + q_5 x_5)^n x_5^{m-n} = 0;$$

diese Fläche besteht also aus  $m$  durch die Gerade  $X_2 X_4$  gelegten Ebenen, deren keine die Raumkurve berührt, weil  $x_2 = 0$  die einzige Tangente in  $X_4$  ist.

Jede der  $m$  Ebenen hat in  $X_4$   $m'(M-N)$  Punkte mit der Raumkurve gemein. Der Punkt  $X_4$  ist also im Ganzen als ein  $mm'(M-N)$ -

facher Punkt der in  $x_1 = 0$  befindlichen Raumkurve, daher auch der vierdimensionalen Kurve zu betrachten.

Im Falle A finden wir demnach für die Ordnung des vielfachen Schnittpunktes  $X_4$  von  $X_3 X_4$  mit der Schnittkurve

$$\mu = mm'(M - N),$$

wonach der Grad des diese Kurve aus  $X_3 X_4$  projizierenden Raumes ist

$$m'mM - \mu = mm'M - mm'(M - N) = mm'N.$$

B.  $m'N < Mn'$ , wonach  $m'(M - N) > M(m' - n')$ .

Der Punkt  $X_4$  der in  $x_5 = 0$  liegenden Projektionskurve ist jetzt ein  $M(m' - n')$ -facher. Die Überlegungen des vorigen Falles führen uns hier zum Schluss, dass die Ordnung des vielfachen Punktes  $X_4$ , als Punkt der vierdimensionalen Schnittkurve betrachtet, ist

$$\mu = mM(m' - n').$$

Demnach ist der Grad des projizierenden Raumes

$$mm'M - \mu = mm'M - mM(m' - n') = mMn'.$$

II. Im zweiten Falle gilt

$$p_3 = 0 \text{ und } P_3 = 0.$$

Die Gleichungen der Räume sind nunmehr

$$\begin{aligned} f(x_1, x_3, x_5) &\equiv (p_1 x_1 + p_5 x_5)^m - (q_1 x_1 + q_3 x_3 + q_5 x_5)^n x_5^{m-n} = 0, \\ f'(x_2, x_4, x_5) &\equiv (p_2' x_2 + p_4' x_4 + p_5' x_5)^{m'} - (q_2' x_2 + q_4' x_4 + q_5' x_5)^{n'} x_5^{m'-n'} = 0, \\ F(x_3, x_4, x_5) &\equiv (P_4 x_4 + P_5 x_5)^M - (Q_3 x_3 + Q_4 x_4 + Q_5 x_5)^N x_5^{M-N} = 0. \end{aligned}$$

Est ist  $X_3$  jetzt ein vielfacher Punkt der vierdimensionalen Schnittkurve. Wir können die Betrachtungen des vorigen Falles ganz und gar wiederholen, wenn wir nur  $m'$  und  $n'$  bez. durch  $m$  und  $n$  ersetzen. Also:

A.  $mN > Mn$ .

Der Punkt  $X_3$  ist ein  $m(M - N)$ -facher.

Der projizierende Raum ist vom Grade

$$mm'N.$$

B.  $mN < Mn$ .

Der Punkt  $X_3$  ist ein  $M(m - n)$ -facher.



Der projizierende Raum ist vom Grade

$$m'Mn.$$

III. Der dritte Fall ergibt

$$p_3 = 0 \text{ und } p_4' = 0.$$

Die Räume haben jetzt die Gleichungen:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_3, x_5) &\equiv (p_1 x_1 + p_5 x_5)^m - (q_1 x_1 + q_3 x_3 + q_5 x_5)^n x_5^{m-n} = 0, \\ f'(x_2, x_4, x_5) &\equiv (p_2' x_2 + p_5' x_5)^{m'} - (q_2' x_2 + q_4' x_4 + q_5' x_5)^{n'} x_5^{m'-n'} = 0, \\ F(x_3, x_4, x_5) &\equiv (P_3 x_3 + P_4 x_4 + P_5 x_5)^M - (Q_3 x_3 + Q_4 x_4 + Q_5 x_5)^N x_5^{M-N} = 0. \end{aligned}$$

Die Gerade  $X_3 X_4$  gehört in ihrem ganzen Umfang sowohl dem Raume  $f = 0$  wie dem Raume  $f' = 0$  an. Es giebt wiederum zwei Fälle, nl.

A.  $mn' > m'n.$

Die Gerade  $X_3 X_4$  ist als Schnittlinie der beiden Räume eine  $m(m' - n')$ -fache; sämtliche Berührungsräume sind mit  $x_1 = 0$  zusammengefallen.

B.  $mn' < m'n.$

Die Gerade  $X_3 X_4$  ist eine  $m'(m - n)$ -fache, deren Berührungsräume alle in  $x_2 = 0$  vereinigt sind.

Weil der Raum  $F = 0$  weder den Raum  $x_2 = 0$  noch den Raum  $x_2 = 0$  berührt, so schliessen wir, dass im Falle A der Schnittpunkt  $S'' = 0$  mit  $X_3 X_4$  (wofür gilt  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_5 = 0, P_3 x_3 + P_4 x_4 = 0$ ) ein  $mM(m' - n')$ -facher Punkt und im Falle B ein  $m'M(m - n)$ -facher Punkt der vierdimensionalen Kurve ist.

Der Grad des projizierenden Raumes ist also

im Falle A

$$mMn',$$

im Falle B

$$m'Mn.$$

Es sind hiermit alle Fälle erledigt, wo eine Funktion  $\Psi(x_1, x_2, x_5) = 0$  durch die Elimination von  $x_3$  und  $x_4$  aus den Gleichungen  $f = 0, f' = 0$  und  $F = 0$  erhalten ist.

Wir ersahen, dass im allgemeinen Falle der Grad von  $\Psi$   $mm'M$  ist, in besonderen Fällen aber  $mm'N, mMn'$ , oder  $m'Mn$  werden kann.

Jedenfalls enthält, weil  $n$ ,  $n'$  oder  $N$  den Wert 1 haben können, die Zahl, welche den Grad anweist, mindestens *zwei* Faktoren.

Gleichungen deren Grad unteilbar ist, können in dieser Weise noch ebensowenig zerlegt werden. M. a. W.:

Wenn eine Funktion

$$\psi_1(w_1, w_1') = 0$$

von unteilbarem Grade gegeben ist, so kann diese nicht entstanden gedacht werden durch die Elimination von  $\bar{w}$  und  $\bar{w}'$  aus

$$\begin{aligned} f(w_1, \bar{w}) &\equiv (a_1 w_1 + \bar{a} \bar{w} + a_0)^m - (b_1 w_1 + \bar{b} \bar{w} + b_0)^n = 0, \\ f'(w_1', \bar{w}') &\equiv (a_1' w_1' + \bar{a}' \bar{w}' + a_0')^{m'} - (b_1' w_1' + \bar{b}' \bar{w}' + b_0')^{n'} = 0, \\ F(\bar{w}, \bar{w}') &\equiv (a \bar{w} + b \bar{w}' + c) - (a' \bar{w} + b' \bar{w}' + c')^N = 0 \end{aligned}$$

(es wäre denn, dass  $F(\bar{w}, \bar{w}')$  in  $M$  linearen Gleichungen zerfiele).

Weil unser Hauptziel ist die Gleichungen *zweiten* und *dritten* Grades zu untersuchen, deren conforme Abbildung mittelst *parabolischer* und *hyperbolischer* Congruenzen studirt werden kann, so werden wir, so bald wir nach der Elimination zu Gleichungen von teilbarem Grade gelangen, unsere Untersuchung abbrechen.

Falls  $F = 0$  eine lineare Gleichung ist, können wir mittelst ihrer  $\bar{w}'$  in  $f' = 0$  durch  $\bar{w}$  ersetzen, wodurch weder der Grad noch die Gestalt von  $f'$  eine Änderung erfährt.

Es handelt sich also darum, die Gleichungen

$$f(w_1, \bar{w}) \equiv (a_1 w_1 + \bar{a} \bar{w} + a_0)^m - (b_1 w_1 + \bar{b} \bar{w} + b_0)^n = 0, \quad (27)$$

$$f'(w_1', \bar{w}) \equiv (a_1' w_1' + \bar{a}' \bar{w} + a_0')^{m'} - (b_1' w_1' + \bar{b}' \bar{w} + b_0')^{n'} = 0 \quad (28)$$

zu betrachten.

Zuerst wollen wir die Bezeichnungen abändern, indem wir setzen

$$w_1 = \frac{x_1}{x_4}, \quad w_1' = \frac{x_2}{x_4}, \quad \bar{w} = \frac{x_3}{x_4},$$

wodurch unsere Gleichungen sich verwandeln in:

$$f(x_1, x_3, x_4) \equiv (p_1 x_1 + p_3 x_3 + p_4 x_4)^m - (q_1 x_1 + q_3 x_3 + q_4 x_4)^n x_4^{m-n} = 0, \quad (29)$$

$$f'(x_2, x_3, x_4) \equiv (p_2' x_2 + p_3' x_3 + p_4' x_4)^{m'} - (q_2' x_2 + q_3' x_3 + q_4' x_4)^{n'} x_4^{m'-n'} = 0. \quad (30)$$

Die Fläche  $f = 0$  ist ein Kegel mit  $X_2$  als Spitze; die Gleichung  $f' = 0$  stellt einen Kegel mit  $X_1$  als Spitze dar.

Auf dem Kegel  $f = 0$  ist die durch

$$l \left\{ \begin{array}{l} (p) \equiv p_1 x_1 + p_3 x_3 + p_4 x_4 = 0, \\ (q) \equiv q_1 x_1 + q_3 x_3 + q_4 x_4 = 0 \end{array} \right.$$

gegebene Gerade  $l$  eine  $n$ -fache Kante, mit der Ebene  $(q) = 0$  als einziger Berührungsebene.

Die Gerade  $t$   $((p) = 0, x_4 = 0)$  ist eine  $(m - n)$ -fache Kante mit  $x_4 = 0$  als einziger Berührungsebene.

Der Kegel  $f' = 0$  hat die durch

$$l' \dots \left\{ \begin{array}{l} (p') \equiv p'_2 x_2 + p'_3 x_3 + p'_4 x_4 = 0, \\ (q') \equiv q'_2 x_2 + q'_3 x_3 + q'_4 x_4 = 0 \end{array} \right.$$

bestimmte Gerade  $l'$  als eine  $n'$ -fache Kante, deren sämtliche Berührungsebenen in  $(q') = 0$  vereinigt sind.

Die Gerade  $t'$   $((p') = 0, x_4 = 0)$  ist eine  $(m' - n')$ -fache Kante, deren einzige Berührungsebene  $x_4 = 0$  ist.

Die Elimination von  $x_3$  aus (29) und (30) bedeutet geometrisch: Projektion aus  $X_3$  (z. B. auf  $x_3 = 0$ ) der beiden Kegeln gemeinsamen Schnittkurve.

Die Raumkurve, in der  $f = 0$  und  $f' = 0$  sich schneiden, ist vom Grade  $mn'$ . Falls  $X_3$  dieser Kurve *nicht* angehört, ist auch der projizierende Kegel vom Grade  $mn'$ . Durch die Elimination von  $\bar{w}$  aus (27) und (28) erhält man also im Allgemeinen eine Gleichung in  $w_1$  und  $w'_1$  von *teilbarem* Grade; wir brauchen daher diesen Fall nicht weiter zu betrachten.

Wenn  $X_3$  beiden Kegeln angehören soll, so muss die Bedingung

$$p_3 = 0 \text{ und } p'_3 = 0$$

erfüllt sein. Wir haben alsdann die folgenden Gleichungen zu betrachten

$$\begin{aligned} f(x_1, x_3, x_4) &\equiv (p_1 x_1 + p_4 x_4)^m - (q_1 x_1 + q_3 x_3 + q_4 x_4)^n x_4^{m-n} = 0, \\ f'(x_2, x_3, x_4) &\equiv (p'_2 x_2 + p'_4 x_4)^{m'} - (q'_2 x_2 + q'_3 x_3 + q'_4 x_4)^{n'} x_4^{m'-n'} = 0. \end{aligned}$$

Die Ordnung der Singularität von  $X_3$  ist nunmehr

- |    |                 |                            |
|----|-----------------|----------------------------|
| A. | für $mn' > m'n$ | $m(m' - n')$ ,             |
| B. | „ $mn' < m'n$   | $m'(m - n)$ ,              |
| C. | „ $mn' = m'n$   | $m(m' - n') = m'(m - n)$ . |

Da die Fälle  $A$  und  $B$  nicht wesentlich verschieden sind, wollen wir uns nur mit den Fällen  $A$  und  $C$  beschäftigen.

Im Falle  $A$  ist der Grad des projizierenden Kegels

$$mn',$$

im Falle  $C$  ist dieser

$$mn' = m'n.$$

Bevor wir die Gleichungen  $f = 0$  und  $f' = 0$  eingehender betrachten, wollen wir zuerst die folgende Coordinatentransformation bewerkstelligen:

$$\begin{aligned} p_1 x_1 + p_4 x_4 &= y_1, \\ p_2' x_2 + p_4' x_4 &= y_2, \\ x_3 &= y_3, \\ x_4 &= y_4, \end{aligned}$$

woher die Gleichungen diese Gestalt annehmen:

$$f(y_1, y_3, y_4) \equiv y_1^m - (c_1 y_1 + c_3 y_3 + c_4 y_4)^n y_4^{m-n} = 0, \quad (31)$$

$$f'(y_2, y_3, y_4) \equiv y_2^{m'} - (c_2' y_2 + c_3' y_3 + c_4' y_4)^{n'} y_4^{m'-n'} = 0. \quad (32)$$

A.  $mn' > m'n$  oder  $\frac{m}{n} > \frac{m'}{n'}:$

$$y_1^{\frac{m}{n}} = (c_1 y_1 + c_3 y_3 + c_4 y_4) y_4^{\frac{m-n}{n}}, \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

$$y_2^{\frac{m'}{n'}} = (c_2' y_2 + c_3' y_3 + c_4' y_4) y_4^{\frac{m'-n'}{n'}}. \quad . \quad . \quad . \quad (34)$$

Die Elimination von  $y_3$  ergibt

$$c_3' \{ y_1^{\frac{m}{n}} - (c_1 y_1 + c_4 y_4) y_4^{\frac{m-n}{n}} \} = c_3 \{ y_2^{\frac{m'}{n'}} - (c_2' y_2 + c_4' y_4) y_4^{\frac{m'-n'}{n'}} \} y_4^{\frac{m}{n} - \frac{m'}{n'}},$$

oder

$$c_3' y_1^{\frac{m}{n}} - c_3' (c_1 y_1 + c_4 y_4) y_4^{\frac{m-n}{n}} = c_3 y_2^{\frac{m'}{n'}} y_4^{\frac{m}{n} - \frac{m'}{n'}} - c_3 (c_2' y_2 + c_4' y_4) y_4^{\frac{m-n}{n}}. \quad (35)$$

Es zeigt sich, dass der Grad dieser Gleichung  $mn'$  ist, und zwar am leichtesten, wenn wir einen Strahlenbüschel durch die *nicht* auf der Kurve liegende Coordinatenecke  $Y_1(y_2 = 0, y_4 = 0)$  legen.

Die Substitution

$$y_2 = \lambda y_4$$

ergibt

$$c_3' y_1^{\frac{m}{n}} - c_3' (c_1 y_1 + c_4 y_4) y_4^{\frac{m-n}{n}} = c_3 \lambda^{\frac{m'}{n'}} y_4^{\frac{m}{n}} - c_3 (c_2' \lambda + c_4') y_4^{\frac{m}{n}},$$

oder

$$c_3' y_1^{\frac{m}{n}} = \{ c_3' (c_1 y_1 + c_4 y_4) + c_3 \lambda^{\frac{m'}{n'}} y_4 - c_3 (c_2' \lambda + c_4') y_4 \} y_4^{\frac{m-n}{n}},$$

also

$$c_3'^n y_1^m = \{c_3' c_1 y_1 + (c_3' c_4 + c_3 \lambda^{\frac{m'}{n'}} - c_3 c_2' \lambda - c_3 c_4') y_4\}^n y_4^{m-n}.$$

Ein Wert von  $\lambda$  bestimmt  $n'$  Werte für  $\lambda^{\frac{m'}{n'}}$ , und ein Paar  $(\lambda, \lambda^{\frac{m'}{n'}})$  liefert  $m$  Werte für  $y_1 : y_4$ , wonach ein durch  $Y_1$  gelegter Strahl  $mn'$  Schnittpunkte mit der Kurve gemein hat.

Die Gleichung (35), wenn geschrieben in der Form

$$c_3' y_1^{\frac{m}{n}} + \{-c_3' c_1 y_1 + c_3 c_2' y_2 + (c_3 c_4' - c_3' c_4) y_4\} y_4^{m-n} - c_3 y_2^{\frac{m'}{n'}} y_4^{\frac{m}{n} - \frac{m'}{n'}} = 0, \quad (36)$$

zeigt uns, dass die höchste Potenz von  $y_2$  den Exponent  $\frac{m'}{n'}$  hat,

wonach  $Y_2$  ein  $nn' \left( \frac{m}{n} - \frac{m'}{n'} \right) = (mn' - m'n)$ -facher Punkt ist, dessen sämtliche Tangenten mit  $y_4 = 0$  zusammengefallen sind; es hat diese Gerade in  $Y_2$   $mn'$  Punkte mit der Kurve gemein.

Unser Schluss ist, dass die Elimination von  $y_3$  aus (31) und (32) eine Gleichung in  $y_1, y_2$  und  $y_4$  veranlasst, welche eine Kurve vom Grade  $mn'$  darstellt, während die Gerade  $y_4 = 0$  diese Kurve nur im einzigen  $((mn' - m'n)$ -fachen) Punkte  $Y_2$  trifft.

In der ursprünglichen Fassung lautet dieser Schluss:

Damit eine Funktion

$$\psi_1(w_1, w_1') = 0$$

vom Grade  $mn'$  als durch die Elimination von  $\bar{w}$  aus

$$f(w_1, \bar{w}) \equiv (a_1 w_1 + a_0)^m - (b_1 w_1 + \bar{b} \bar{w} + b_0)^n = 0,$$

$$f'(w_1', \bar{w}) \equiv (a_1' w_1' + a_0')^{m'} - (b_1' w_1' + \bar{b}' \bar{w} + b_0')^{n'} = 0$$

entstanden zu betrachten sei, ist es nötig (nicht ausreichend) dass  $mn' > m'n$  sei, und dass das Diagramm von  $\psi_1$  nur den  $(mn' - m'n)$ -fachen unendlich fernen Punkt der  $w'$ -Axe mit der unendlich fernen Gerade gemein habe.

Von den Kegelschnitten kommen nur die Parabeln in Betracht, von den kubischen Kurven nur die, welche im Unendlichen auf der Axe der Ordinaten einen *Wendepunkt* oder einen *Rückkehrpunkt* haben, dessen Tangenten mit der unendlich fernen Gerade zusammenfällt.

Wir wenden uns jetzt dem Falle  $C$  zu.

$$C. \quad mn' = m'n \text{ oder } \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}.$$

Es sei  $p$  der grösste gemeine Teiler von  $m$  und  $n$ ,  $p'$  derjenige von  $m'$  und  $n'$ . Man hat alsdann

$$m = p\mu, \quad n = p\nu,$$

$$m' = p'\mu, \quad n' = p'\nu,$$

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} = \frac{\mu}{\nu}.$$

wo  $\frac{\mu}{\nu}$  einen unhebbaren Bruch darstellt.

Die Gleichungen (31) und (32) lassen sich nun folgendermassen schreiben:

$$y_1^{p\mu} - (c_1 y_1 + c_3 y_3 + c_4 y_4)^{p\nu} y_4^{p(\mu-\nu)} = 0,$$

$$y_2^{p'\mu} - (c_2' y_2 + c_3' y_3 + c_4' y_4)^{p'\nu} y_4^{p'(\mu-\nu)} = 0,$$

oder

$$y_1^\mu - (\sqrt[p]{1})(c_1 y_1 + c_3 y_3 + c_4 y_4)^\nu y_4^{\mu-\nu} = 0, \quad . \quad . \quad (37)$$

$$y_2^{\mu} - (\sqrt[p']{1})(c_2' y_2 + c_3' y_3 + c_4' y_4)^\nu y_4^{\mu-\nu} = 0. \quad . \quad . \quad (38)$$

Wir haben also  $p$  Gleichungen (37) mit  $p'$  Gleichungen (38) zu combiniren. Unter allen diesen Combinationen, wollen wir nur diejenige behandeln, wofür

$$\sqrt[p]{1} = 1, \quad \sqrt[p']{1} = 1.$$

Wir finden alsdann nach Elimination von  $y_3$  (siehe (35)):

$$c_3' y_1^{\frac{\mu}{\nu}} - c_3' (c_1 y_1 + c_4 y_4) y_4^{\frac{\mu-\nu}{\nu}} = c_3 y_2^{\frac{\mu}{\nu}} - c_3 (c_2' y_2 + c_4' y_4) y_4^{\frac{\mu-\nu}{\nu}},$$

oder

$$c_3' y_1^{\frac{\mu}{\nu}} - c_3 y_2^{\frac{\mu}{\nu}} + \{-c_3' c_1 y_1 + c_3 c_2' y_2 + (c_3 c_4' - c_3' c_4) y_4\} y_4^{\frac{\mu-\nu}{\nu}} = 0. \quad (39)$$

Diese Gleichung ist nach Rationalisirung vom Grade  $\mu\nu$ .

Durch die Elimination von  $y_3$  aus (31) und (32) finden wir also, in der Annahme  $mn' = m'n$ ,  $pp'$  Gleichungen (39) vom Grade  $\mu\nu$ .

Da wir im Allgemeinen solche Gleichungen, wie (31) und (32), wo  $m$  und  $n$ , oder  $m'$  und  $n'$  unter sich teilbar sind, ausser Betracht lassen, so handelt es sich um zwei Gleichungen (31) und (32), wo  $m = m' = \mu$  und  $n = n' = \nu$  ( $\mu$  und  $\nu$  unter sich unteilbar). Durch die Elimination von  $y_3$  ergibt sich alsdann eine Gleichung von der Form (39), welche eine Kurve vom Grade  $\mu\nu$  darstellt. Die Schnittpunkte dieser Kurve mit  $y_4 = 0$  werden durch

$$c_3' y_1^{\frac{\mu}{\nu}} - c_3 y_2^{\frac{\mu}{\nu}} = 0,$$

oder

$$c_3'^{\nu} y_1^{\mu} - c_3^{\nu} y_2^{\mu} = 0$$

bestimmt. Die Gerade  $y_4 = 0$  hat also an  $\mu$  Stellen einen  $\nu$ -fachen Schnittpunkt mit der Kurve.

Um das Verhalten dieser Schnittpunkte zu erörtern verlegen wir eine Coordinatenecke in einen dieser Punkte, setzen aber vorher

$$c_3' = \gamma_1^{\mu}, \quad c_3 = \gamma_2^{\mu},$$

wonach (39) sich verwandelt in

$$\gamma_1^{\mu} y_1^{\frac{\mu}{\nu}} = \gamma_2^{\mu} y_2^{\frac{\mu}{\nu}} + \{c_1 \gamma_1^{\mu} y_1 - c_2' \gamma_2^{\mu} y_2 + (c_4 \gamma_1^{\mu} - c_4' \gamma_2^{\mu}) y_4\} y_4^{\frac{\mu-\nu}{\nu}} = 0,$$

oder

$$\begin{aligned} \gamma_1^{\mu\nu} y_1^{\mu} &= \gamma_2^{\mu\nu} y_2^{\mu} + \nu \gamma_2^{\mu(\nu-1)} y_2^{\frac{\mu(\nu-1)}{\nu}} \{c_1 \gamma_1^{\mu} y_1 - c_2' \gamma_2^{\mu} y_2 + \\ &+ (c_4 \gamma_1^{\mu} - c_4' \gamma_2^{\mu}) y_4\} y_4^{\frac{\mu-\nu}{\nu}} + \dots \end{aligned}$$

Jetzt setzen wir

$$\gamma_1^{\nu} y_1 = \gamma_2^{\nu} y_2 + y_1',$$

und bekommen sodann

$$\begin{aligned} \gamma_2^{\mu\nu} y_2^{\mu} + \mu \gamma_2^{(\mu-1)\nu} y_2^{\mu-1} y_1' + \dots &= \gamma_2^{\mu\nu} y_2^{\mu} + \nu \gamma_2^{\mu(\nu-1)} y_2^{\frac{\mu(\nu-1)}{\nu}} \times \\ \times \{c_1 \gamma_1^{\mu-\nu} \gamma_2^{\nu} y_2 + c_1 \gamma_1^{\mu-\nu} y_1' - c_2' \gamma_2^{\mu} y_2 &+ (c_4 \gamma_1^{\mu} - c_4' \gamma_2^{\mu}) y_4\} y_4^{\frac{\mu-\nu}{\nu}} + \dots \end{aligned}$$

Der Exponent der höchsten Potenz von  $y_2$  ist nun entweder  $\mu - 1$ , oder  $\mu - \frac{\mu - \nu}{\nu}$ .

a)  $\frac{\mu - \nu}{\nu} > 1$ , oder  $\mu > 2\nu$ ; es ist  $y_2^{\mu-1}$  die höchste Potenz von  $y_2$ .

Der Punkt  $Y_2'$  ( $y_1' = 0$ ,  $y_4 = 0$ ) ist ein  $\nu$ -facher, dessen sämtliche Tangenten vereinigt sind in  $y_1' = 0$ , d. h. in der Verbindungslinie dieses Punktes mit  $Y_4$ . Es hat diese Tangente in ihrem Berührungspunkte  $\mu - \nu$  Punkte mit der Kurve gemein.

b)  $\frac{\mu - \nu}{\nu} < 1$ , oder  $\mu < 2\nu$ ; es ist  $y_2^{\frac{\mu - \nu}{\nu}}$  die höchste Potenz von  $y_2$ .

Der Punkt  $Y_2'$  ist jetzt ein  $(\mu - \nu)$ -facher, dessen Tangenten alle mit  $y_4 = 0$  zusammengefallen sind; diese Gerade hat im Berührungspunkte  $\nu$  Punkte mit der Kurve gemein.

c)  $\frac{\mu - \nu}{\nu} = 1$ , oder  $\mu = 2\nu$ ; also  $\mu = 2$ ,  $\nu = 1$ , wonach (39) lautet:

$$c_3' y_1^2 - c_3 y_2^2 + \{-c_3' c_1 y_1 + c_3 c_2' y_2 + (c_3 c_4' - c_3' c_4) y_4\} y_4 = 0,$$

und demnach einen Kegelschnitt darstellt.

Wir wollen diesen Fall nicht weiter erledigen, da wir zunächst die quadratische Gleichung eingehend erörtern werden.

Die letzten Ergebnisse zusammenfassend, können wir behaupten, dass die durch die Elimination von  $y_3$  aus (31) und (32) erhaltene Gleichung bei der Annahme  $m = m' = \mu$ ,  $n = n' = \nu$  eine Kurve vom Grade  $\mu\nu$  darstellt, welche für  $\mu > 2\nu$  mit der Gerade  $y_4 = 0$   $\mu - \nu$ -fache Punkte gemein hat, deren einzige Tangenten sich alle in  $Y_4$  treffen und in ihren Berührungspunkten je  $\mu - \nu$  Punkte mit der Kurve gemein haben, dagegen für  $\nu < \mu < 2\nu$  mit der Gerade  $y_4 = 0$   $\mu$   $(\mu - \nu)$ -fache Punkte gemein hat, deren jeder  $y_4 = 0$  als Tangente mit  $\nu$ -fachem Kontakte hat.

Übersetzen wir dies in die ursprüngliche Fassung, so folgt:

Für Behandlung mit der Strahlencongruenz  $w^\mu = w'^\nu$  vermöge der Gleichungen (31) und (32) kommt in Betracht:

1° für  $\mu > 2\nu$  ein Diagramm vom Grade  $\mu\nu$ , welches im Unendlichen  $\mu - \nu$ -fache Punkte hat, die sich aus einer Binomialgleichung ergeben, und deren Asymptoten alle nach dem Ursprung convergiren;

2° für  $\nu < \mu < 2\nu$  ein Diagramm vom Grade  $\mu\nu$ , welches im Unendlichen  $\mu$   $(\mu - \nu)$ -fache Punkte hat, welche durch eine Binomialgleichung bestimmt werden, und deren sämtliche Tangenten im Unendlichen liegen, und eine  $\nu$ -fache Berührung aufweisen.

§ 5. Wir wollen jetzt die Darlegungen des vorigen § nur auf *hyperbolischen Congruenzen* anwenden. Wir haben demnach den Funktionen  $\Psi$ ,  $\Psi'$  und  $q$  diese Formen zu erteilen:

$$\begin{aligned}\Psi(w, w') &\equiv w^m w'^n - 1 = 0, \\ \Psi'(w, w') &\equiv w^{m'} w'^{n'} - 1 = 0, \\ q(w, w') &\equiv w^M w'^N - 1 = 0.\end{aligned}$$



Die Funktionen  $f$ ,  $f'$  und  $F$  erhalten somit die folgende Gestalt:

$$f(w_1, \bar{w}) \equiv (a_1 w_1 + \bar{a} \bar{w} + a_0)^m (b_1 w_1 + \bar{b} \bar{w} + b_0)^n - 1 = 0, \quad (40)$$

$$f'(w'_1, \bar{w}') \equiv (a'_1 w'_1 + \bar{a}' \bar{w}' + a'_0)^{m'} (b'_1 w'_1 + \bar{b}' \bar{w}' + b'_0)^{n'} - 1 = 0, \quad (41)$$

$$F(\bar{w}, \bar{w}') \equiv (a \bar{w} + b \bar{w}' + c)^M (a' \bar{w} + b' \bar{w}' + c')^N - 1 = 0. \quad (42)$$

Wir setzen voraus

$$m \geq n, \quad m' \geq n', \quad M \geq N.$$

Die Elimination von  $\bar{w}$  und  $\bar{w}'$  ergibt im Allgemeinen eine Gleichung vom Grade  $(m+n)(m'+n')(M+N)$  in  $w_1$  und  $w'_1$ , d. h. es ist  $\Psi_1(w_1, w'_1) = 0$  im Allgemeinen vom Grade  $(m+n)(m'+n')(M+N)$ .

Der Grad ist sonach eine Zahl mit drei Teilern. Es handelt sich wieder um die Frage, in welchem Falle dieser Grad erniedrigt wird.

Wir bringen zuvor die Gleichungen (40), (41) und (42) in diese Form:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_3, x_5) &\equiv (p_1 x_1 + p_3 x_3 + p_5 x_5)^m (q_1 x_1 + q_3 x_3 + q_5 x_5)^n - x_5^{m+n} = 0, \\ f'(x_2, x_4, x_5) &\equiv (p'_2 x_2 + p'_4 x_4 + p'_5 x_5)^{m'} (q'_2 x_2 + q'_4 x_4 + q'_5 x_5)^{n'} - x_5^{m'+n'} = 0, \\ F(x_3, x_4, x_5) &\equiv (P_3 x_3 + P_4 x_4 + P_5 x_5)^M (Q_3 x_3 + Q_4 x_4 + Q_5 x_5)^N - x_5^{M+N} = 0. \end{aligned}$$

Es stellt  $f = 0$  einen Raum vom Grade  $m+n$  dar.

Die Ebene  $(x_5 = 0, (p) = 0)$  ist eine  $m$ -fache und hat  $(p) = 0$  als einzigen Berührungsraum.

Die Ebene  $(x_5 = 0, (q) = 0)$  ist eine  $n$ -fache und hat  $(q) = 0$  als einzigen Berührungsraum.

Die Betrachtungen betreffende  $f' = 0$  und  $F = 0$  sind völlig analog.

Es fragt sich auch hier, ob die Gerade  $X_3 X_4$  einen Punkt mit der vierdimensionalen Schnittkurve gemein hat.

Der Raum  $f = 0$  schneidet  $X_3 X_4$  im  $(m+n)$ -fachen Punkt  $X_4$ , wenn nicht  $p_3 = 0$  oder  $q_3 = 0$ .

Ist  $p_3 = 0$ , so ist  $X_3 X_4$  eine  $m$ -fache Gerade von  $f = 0$ ;  $q_3 = 0$ , ergibt  $X_3 X_4$  als eine  $n$ -fache Gerade.

Wenn man sowohl  $p_3 = 0$  wie  $q_3 = 0$  hat, so kann  $f = 0$  in  $m+n$  linearen Gleichungen  $r_1 x_1 + r_5 x_5$  zerlegt werden.

Der Raum  $f' = 0$  schneidet  $X_3 X_4$  im  $(m'+n')$ -fachen Punkt  $X_3$ , wenn nicht  $p'_4 = 0$  oder  $q'_4 = 0$ .

Hat man  $p'_4 = 0$ , so ist  $X_3 X_4$  eine  $m'$ -fache Gerade;  $q'_4 = 0$  macht  $X_3 X_4$  zu einer  $n'$ -fachen Gerade.

Ist zugleich  $p_4' = 0$  und  $q_4' = 0$ , so ist  $f' = 0$  in  $m' + n'$  Gleichungen  $r_2'x_2 + r_5'x_5 = 0$  zu zerlegen.

Der Raum  $F = 0$  trifft  $X_5X_4$   $M$  mal in  $S(P_3x_3 + P_4x_4 = 0)$  und  $N$  mal in  $T(Q_3x_3 + Q_4x_4 = 0)$ .

Ist  $P_3 = 0$ , so ist  $X_3$  ein  $M$ -facher Punkt; für  $Q_3 = 0$  wird  $X_3$  ein  $N$ -facher Punkt;  $P_4 = 0$  ergibt  $X_4$  als einen  $M$ -fachen Punkt;  $Q_4 = 0$  macht  $X_4$  zu einem  $N$ -fachen Punkte.

Wenn  $S$  mit  $T$  identisch ist, so hat man  $P_3 : Q_3 = P_4 : Q_4$ . Setzen wir  $P_3x_3 + P_4x_4 = y_3$ , so ist  $Q_3x_3 + Q_4x_4 = py_3$ , wonach die Gleichung  $F = 0$  in  $M + N$  Gleichungen  $R_3y_3 + R_5x_5 = 0$  zu zerlegen ist.

Die Berührungsräume coincidiren niemals.

Schneiden die Räume sich in  $X_3$ , so sind die Bedingungen

$$p_3 = 0 \text{ oder } q_3 = 0$$

und

$$P_3 = 0 \text{ oder } Q_3 = 0$$

zu erfüllen.

Die Combination  $p_3 = 0$ ,  $P_3 = 0$  ergibt  $X_3$  als einen  $mM(m' + n')$ -fachen Punkt. Der projizirende Raum ist nun vom Grade

$$(m + n)(m' + n')(M + N) - mM(m' + n') = (m' + n')(mN + nM + nN).$$

Diese Zahl hat mindestens zwei Faktoren.

In derselben Weise finden wir, dass auch die anderen zu  $X_3$  gehörenden Combinationen, und ebenso, dass alle zu  $X_4$  gehörenden Combinationen Zahlen von mindestens zwei Teilern veranlassen.

Wenn der Schnittpunkt mit  $S$  identisch ist, so ist dieser Punkt ein  $mm'M$ -facher. Der projizirende Raum ist alsdann vom Grade  $(m + n)(m' + n')(M + N) - mm'M$ , also mindestens vom 7<sup>ten</sup> Grade.

Auch dieser Fall findet deshalb für uns keine Anwendung.

Wir schliessen daher, dass auch hier keine Gleichung von niedrigerem Grade abzuleiten ist.

Wir wollen uns deshalb mit den zwei Gleichungen

$$f(w_1, \bar{w}) \equiv (a_1w_1 + \bar{a}\bar{w} + a_0)^m (b_1w_1 + \bar{b}\bar{w} + b_0)^n - 1 = 0, \quad (43)$$

$$f'(w_1', \bar{w}) \equiv (a_1'w_1' + \bar{a}'\bar{w} + a_0')^{m'} (b_1'w_1' + \bar{b}'\bar{w} + b_0')^{n'} - 1 = 0 \quad (44)$$

beschäftigen, oder mit den homogenen Formen

$$f(x_1, x_3, x_4) \equiv (p_1x_1 + p_3x_3 + p_4x_4)^m (q_1x_1 + q_3x_3 + q_4x_4)^n - x_4^{m+n} = 0, \quad (45)$$

$$f'(x_2, x_3, x_4) \equiv (p_2'x_2 + p_3'x_3 + p_4'x_4)^{m'} (q_2'x_2 + q_3'x_3 + q_4'x_4)^{n'} - x_4^{m'+n'} = 0. \quad (46)$$

Die Fläche  $f = 0$  ist ein Kegel mit  $X_2$  als Spitze.

Die Gerade  $((p) = 0, x_4 = 0)$  ist eine  $m$ -fache Kante mit  $(p) = 0$  als einziger Berührungsebene.

Die Gerade  $((q) = 0, x_4 = 0)$  ist eine  $n$ -fache Kante mit  $(q) = 0$  als einziger Berührungsebene.

Analoges ergibt sich für  $f' = 0$ .

Die Schnittkurve ist vom Grade  $(m + n)(m' + n')$

Wir fordern wiederum, dass  $X_3$  auf dieser Kurve liege.

Dann hat man die Bedingungen

$$p_3 = 0 \text{ oder } q_3 = 0,$$

und

$$p_3' = 0 \text{ oder } q_3' = 0.$$

Die Combination  $p_3 = 0, p_3' = 0$  giebt  $X_3$  als einen  $mm'$ -fachen Punkt. Der projizierende Kegel ist alsdann vom Grade

$$(m + n)(m' + n') - mm' = mn' + m'n + nn'.$$

Behalten wir die Annahme

$$m \geq n, m' \geq n',$$

so leuchtet ein, dass die Combination  $p_3 = 0, p_3' = 0$  eine Projektionskurve vom niedrigsten Grade liefert; dieser Grad ist wenigstens 3.

Wir wollen diesen Fall eingehend betrachten.

Für  $p_3 = 0, p_3' = 0$  lauten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_3, x_4) &\equiv (p_1 x_1 + p_4 x_4)^m (q_1 x_1 + q_3 x_3 + q_4 x_4)^n - x_4^{m+n} = 0, \\ f'(x_2, x_3, x_4) &\equiv (p_2' x_2 + p_4' x_4)^{m'} (q_2' x_2 + q_3' x_3 + q_4' x_4)^{n'} - x_4^{m'+n'} = 0. \end{aligned}$$

Die Coordinatentransformation

$$\begin{aligned} p_1 x_1 + p_4 x_4 &= y_1, \\ p_2' x_2 + p_4' x_4 &= y_2, \\ x_3 &= y_3, \\ x_4 &= y_4 \end{aligned}$$

verwandelt die obigen Gleichungen in die folgenden:

$$f(y_1, y_3, y_4) \equiv y_1^m (c_1 y_1 + c_3 y_3 + c_4 y_4)^n - y_4^{m+n} = 0, \quad (47)$$

$$f'(y_2, y_3, y_4) \equiv y_2^{m'} (c_2' y_2 + c_3' y_3 + c_4' y_4)^{n'} - y_4^{m'+n'} = 0. \quad (48)$$

Die Elimination von  $y_3$  liefert

$$c_3 y_1^{\frac{m}{n}} y_4^{\frac{m'+n'}{n'}} - c_3' y_2^{\frac{m'}{n'}} y_4^{\frac{m+n}{n}} + \{c_3' c_1 y_1 - c_3 c_2' y_2 + (c_3' c_4 - c_3 c_4') y_4\} y_1^{\frac{m}{n}} y_2^{\frac{m'}{n'}} = 0. \quad (49)$$

Diese Gleichung stellt eine Kurve vom Grade  $mn' + m'n + nn'$  dar.

Der Punkt  $Y_1$  ist ein  $m'n$ -facher; seine Tangenten sind mit der Gerade  $y_2 = 0$  zusammengefallen, welche in ihrem Berührungspunkte  $Y_1$   $(m' + n')n$  Punkte mit der Kurve gemein hat.

Der Punkt  $Y_2$  ist ein  $mn'$ -facher, während seine Tangenten in der Gerade  $y_1 = 0$  vereinigt sind; diese Gerade hat in  $Y_2$   $(m + n)n'$  Punkte mit der Kurve gemein.

Die Gerade  $Y_1 Y_2$  schneidet die Kurve ausserdem  $n'$  mal im Punkte

$$c_3' c_1 y_1 - c_3 c_2' y_2 = 0, \quad y_4 = 0.$$

Dieser Punkt ist ein  $nn'$ -facher; seine einzige Tangente ist durch

$$c_3' c_1 y_1 - c_3 c_2' y_2 + (c_3' c_4 - c_3 c_4') y_4 = 0$$

angewiesen; diese Gerade hat, falls  $m'n > mn'$ , in ihrem Berührungspunkte  $(m' + n')n$  Punkte und falls  $mn' < m'n$ ,  $(m + n)n'$  Punkte mit der Kurve gemein.

Der Punkt  $Y_4$  ist ein  $m'n$ - oder ein  $mn'$ -facher, je nachdem  $m'n < mn'$  oder  $m'n > mn'$  ist.

A.  $m'n < mn', \text{ oder } \frac{m'}{n'} < \frac{m}{n};$

der Punkt  $Y_4$  ist ein  $m'n$ -facher; seine Tangenten sind in  $y_2 = 0$  vereinigt, welche in ihrem Berührungspunkte  $Y_4$   $mn'$  Punkte mit der Kurve gemein hat.

B.  $m'n > mn', \text{ oder } \frac{m'}{n'} > \frac{m}{n};$

der Punkt  $Y_4$  ist ein  $mn'$ -facher; seine Tangenten sind in  $y_1 = 0$  vereinigt, welche in ihrem Berührungspunkte  $Y_4$   $m'n$  Punkte mit der Kurve gemein hat.

C.  $m'n = mn', \text{ oder } \frac{m'}{n'} = \frac{m}{n} = \frac{\mu}{\nu}.$

Wir nehmen wiederum an, dass  $\mu$  und  $\nu$  unter sich unteilbar sind.

Die Gleichung (49) erhält diese Gestalt:

$$c_3 y_1^{\frac{\mu}{\nu}} y_4^{\frac{\mu+\nu}{\nu}} - c_3' y_2^{\frac{\mu}{\nu}} y_4^{\frac{\mu+\nu}{\nu}} + \{c_3' c_1 y_1 - c_3 c_2' y_2 + (c_3' c_4 - c_3 c_4') y_4\} y_1^{\frac{\mu}{\nu}} y_2^{\frac{\mu}{\nu}} = 0. \quad (50)$$

Die Kurve ist vom Grade  $(2\mu + \nu)\nu$ .

Der Punkt  $Y_k$  ist ein  $\mu\nu$ -facher; seine Tangenten sind durch

$$c_3 y_1^{\frac{\mu}{\nu}} - c_3' y_2^{\frac{\mu}{\nu}} = 0,$$

oder

$$c_3^{\nu} y_1^{\mu} - c_3'^{\nu} y_2^{\mu} = 0$$

bestimmt und demnach zu je  $\nu$  in  $\mu$  Geraden vereinigt. Die Rechnung weist nach, dass jede dieser Tangenten in  $Y_k$   $\mu(\nu + 1)$  Punkte mit der Kurve gemein hat.

Die Gerade  $Y_1 Y_2$  schneidet die Kurve noch im  $\nu^2$ -fachen Punkte

$$c_3' c_1 y_1 - c_3 c_2' y_2 = 0, \quad y_4 = 0,$$

dessen Tangente durch

$$c_3' c_1 y_1 - c_3 c_2' y_2 + (c_3' c_k - c_3 c_k') y_4 = 0$$

angewiesen wird, und in ihrem Berührungspunkte  $(\mu + \nu)\nu$  Punkte mit der Kurve gemein hat.

Indem wir unsere Ergebnisse kurz wiederholen, dürfen wir sagen, dass durch die Elimination von  $y_3$  aus (47) und (48) eine Kurve vom Grade  $mn' + m'n + nn'$  entsteht, welche in  $Y_1$  einen  $m'n$ -fachen Punkt hat mit  $y_2 = 0$  als einziger Tangente, während diese Gerade in  $Y_1$   $(m' + n')n$  Punkte mit der Kurve gemein hat, — welche in  $Y_2$  einen  $mn'$ -fachen Punkt hat, dessen  $y_1 = 0$  die einzige Tangente ist und in ihrem Berührungspunkte  $Y_2$   $(m + n)n'$  Punkte mit der Kurve gemein hat, — welche auf  $Y_1 Y_2$  noch einen

$nn'$ -fachen Punkt hat, dessen einzige Tangente für  $\frac{m}{n} > \frac{m'}{n'} (m + n)n'$ ,

für  $\frac{m}{n} < \frac{m'}{n'} (m' + n')n$ , und für  $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} = \frac{\mu}{\nu}$   $(\mu + \nu)\nu$  Punkte mit der Kurve gemein hat, — und welche schliesslich in  $Y_4$ :

— falls  $\frac{m}{n} > \frac{m'}{n'}$ , einen  $m'n$ -fachen Punkt hat, dessen einzige Tangente  $y_2 = 0$  ist und in  $Y_4$  mit der Kurve  $mn'$  Punkte gemein hat, —

— falls  $\frac{m}{n} < \frac{m'}{n'}$ , einen  $mn'$ -fachen Punkt hat, mit  $y_1 = 0$  als einziger Tangente, während diese in  $Y_1$  mit der Kurve  $m'n$  Punkte gemein

hat, — falls  $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} = \frac{\mu}{\nu}$ , einen  $\mu\nu$ -fachen Punkt hat mit  $\mu$  ver-

schiedenen  $\nu$ -fachen Tangenten, deren jede in  $Y_4$  mit der Kurve  $\mu(\nu + 1)$  Punkte gemein hat.

Oder, in der ursprünglichen Fassung:

Die Behandlung mit den Strahlencongruenzen  $w^m w'^n = 1$  und  $w^{m'} w'^{n'} = 1$  vermöge der Gleichungen (43) und (44) ist anzuwenden auf:

ein Diagram vom Grade  $mn' + m'n' + nn'$ , das im Unendlichen auf der  $w'$ -Axe einen  $m'n$ -fachen Punkt hat mit der  $w$ -Axe als einziger Asymptote, während diese in jenem Berührungspunkte  $(m' + n')n$  Punkte mit dem Diagram gemein hat, — das im Unendlichen auf der  $w'$ -Axe einen  $mn'$ -fachen Punkt hat, mit der  $w'$ -Axe als einziger Asymptote, welche in diesem Berührungspunkte  $(m + n)n'$  Punkte mit dem Diagram gemein hat, — das im Unendlichen noch einen  $nn'$ -fachen Punkt hat, dessen Tangente für  $\frac{m}{n} > \frac{m'}{n'}$   $(m + n)n'$ , für  $\frac{m}{n} < \frac{m'}{n'}$   $(m' + n')n$  und für  $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} = \frac{\mu}{\nu}$   $(\mu + \nu)\nu$  Punkte mit dem Diagram gemein hat, — und das schliesslich im Ursprunge: — falls  $\frac{m}{n} > \frac{m'}{n'}$ , einen  $m'n$ -fachen Punkt hat, dessen Tangenten alle mit der  $w$ -Axe zusammenfallen, welche in diesem Berührungspunkte  $mn'$  Punkte mit der Kurve gemein hat, — falls  $\frac{m}{n} < \frac{m'}{n'}$ , einen  $mn'$ -fachen Punkt hat, dessen Tangenten alle mit der  $w'$ -Axe zusammenfallen, während diese in dem vorliegenden Berührungspunkte  $m'n$  Punkte mit der Kurve gemein hat, — falls  $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} = \frac{\mu}{\nu}$ , einen  $\mu\nu$ -fachen Punkt hat, von dessen Tangenten je  $\nu$  in  $\mu$  Geraden vereinigt sind, welche durch eine Binomialgleichung bestimmt sind, und deren jede im Ursprunge  $\mu(\nu + 1)$  Punkte mit der Kurve gemein hat.

§ 6. Wir wollen schliesslich gewisse Combinationen von *hyperbolischen* und *parabolischen* Congruenzen betrachten.

Es sind, bei drei gegebenen Funktionen  $f = 0$ ,  $f' = 0$  und  $F = 0$  zwei Voraussetzungen möglich, n.1. zwei Funktionen parabolisch und die dritte hyperbolisch, oder zwei Funktionen hyperbolisch und die dritte parabolisch. Aus dem Vorhergehenden wird ersichtlich sein, dass in Bezug auf die Erniedrigung des Grades des projizirenden Raumes, die drei Funktionen  $f = 0$ ,  $f' = 0$  und  $F = 0$  gleichbedeutend sind; wir haben uns also nur mit zwei Fällen zu beschäftigen.

Diese Untersuchung wird hier nicht eingehend beschrieben werden, weil sich dabei kein neues Moment darbietet. Es genüge zu bemerken, dass die vielfachen Ebenen der hyperbolischen Räume niemals mit denjenigen der parabolischen Räume den Berührungsraum gemein haben, wonach die Singularität eines eventuellen Schnittpunktes auf  $X_3 X_4$  immer von niedriger Ordnung bleibt. Diese Ordnung ist z. B.  $mM(m'-n')$ , oder  $m'N(m-n)$ , u.s.w. Der Grad des projizierenden Raumes ist jedenfalls noch immer eine Zahl mit mindestens zwei Teilern. Wir lassen demnach diesen Fall ausser Betracht und wenden uns dem Falle *zweier* Funktionen, einer *hyperbolischen* und einer *parabolischen*, zu.

Es sei gegeben

$$f(w_1, \bar{w}) \equiv (a_1 w + \bar{a} \bar{w} + a_0)^m (b_1 w + \bar{b} \bar{w} + b_0)^n = 0, \quad (51)$$

$$f'(w'_1, \bar{w}) \equiv (a'_1 w + \bar{a}' \bar{w} + a'_0)^{m'} (b'_1 w + \bar{b}' \bar{w} + b'_0)^{n'} = 0, \quad (52)$$

oder in homogener Form

$$f(x_1, x_3, x_4) \equiv (p_1 x_1 + p_3 x_3 + p_4 x_4)^m (q_1 x_1 + q_3 x_3 + q_4 x_4)^n - x_4^{m+n} = 0, \quad (53)$$

$$f'(x_2, x_3, x_4) \equiv (p'_2 x_2 + p'_3 x_3 + p'_4 x_4)^{m'} - (q'_2 x_2 + q'_3 x_3 + q'_4 x_4)^{n'} x_4^{m'-n'} = 0. \quad (54)$$

Soll jede dieser Flächen den Punkt  $X_3$  enthalten, so muss den Bedingungen

$$p_3 = 0, \quad p'_3 = 0$$

oder den Bedingungen

$$q_3 = 0, \quad p'_3 = 0$$

genügt sein.

Weil die Zahlen  $m$  und  $n$  gleichwertig sind, so dürfen wir uns auf einen dieser Fälle beschränken. Wir setzen also voraus

$$p_3 = 0, \quad p'_3 = 0.$$

Durch Coordinatentransformation gelangen wir zu

$$f(y_1, y_3, y_4) \equiv y_1^m (c_1 y_1 + c_3 y_3 + c_4 y_4)^n - y_4^{m+n} = 0, \quad (55)$$

$$f'(y_2, y_3, y_4) \equiv y_2^{m'} - (c'_2 y_2 + c'_3 y_3 + c'_4 y_4)^{n'} y_4^{m'-n'} = 0. \quad (56)$$

Die Elimination von  $y_3$  ergibt

$$c_3 y_1^m y_2^{n'} + \{c'_3 c_1 y_1 - c_3 c'_2 y_2 + (c'_3 c_4 - c_3 c'_4) y_4\} y_1^{\frac{m}{n}} y_4^{\frac{n'-n}{n'}} - c'_3 y_4^{\frac{m}{n} + \frac{m'}{n'}} = 0. \quad (57)$$

Diese Kurve ist vom Grade  $mn' + m'n$  (weil  $m' > n'$  und  $m \geq n$  ist, so ist der niedrigste Wert dieses Grades 3).

Der Punkt  $Y_1$  ist ein  $n(m' - n')$ -facher; seine einzige Tangente ist  $y_4 = 0$ ; sie hat in  $Y_1$   $m'n$  Punkte mit der Kurve gemein.

Der Punkt  $Y_2$  ist ein  $mn'$ -facher; seine einzige Tangente ist  $y_1 = 0$ , welche in  $Y_2$   $mn' + m'n$  Punkte mit der Kurve gemein hat.

Der Punkt  $Y_4$  gehört der Kurve nicht an.

Wir behaupten daher:

Für Behandlung mit den Strahlencongruenzen  $w^m w'^n = 1$  und  $w^m = w'^n$ , vermöge der Gleichungen (51) und (52), kommt in Betracht:

ein Diagramm vom Grade  $mn' + m'n$ , das im Unendlichen auf der  $w$ -Axe einen  $n(m' - n')$ -fachen Punkt hat, mit der unendlich fernen Gerade als einziger Tangente, während diese im vorliegenden Berührungspunkte  $m'n$  Punkte mit dem Diagramm gemein hat, — oder das im Unendlichen auf der  $w'$ -Axe einen  $mn'$ -fachen Punkt hat mit der  $w'$ -Axe als einziger Tangente, während diese in ihrem Berührungspunkte  $mn' + m'n$  Punkte mit dem Diagramm gemein hat.

§ 7. Der Vollständigkeit wegen haben wir noch den Fall *einer* Gleichung  $f = 0$  zu erörtern, wo  $\bar{w}$  durch  $w_1'$  ersetzt wird. Betrachten wir zuerst die parabolische Gleichung

$$f(w_1, w_1') \equiv (aw_1 + a'w_1' + a_0)^m - (bw_1 + b'w_1' + b_0)^n = 0.$$

Das Diagramm ist offenbar eine Kurve vom Grade  $m$ , welche im Schnittpunkte der Geraden  $aw_1 + a'w_1' + a_0 = 0$  und  $bw_1 + b'w_1' + b_0 = 0$  einen  $n$ -fachen Punkt hat, mit letzterer Gerade als einziger Tangente, — und welche im unendlich fernen Punkte der Gerade  $aw_1 + a'w_1' + a_0 = 0$  einen  $(m - n)$ -fachen Punkt hat, mit der unendlich fernen Gerade als einziger Tangente.

Dagegen weist eine hyperbolische Gleichung, z.B.

$$f(w_1, w_1') \equiv (aw_1 + a'w_1' + a_0)^m (bw_1 + b'w_1' + b_0)^n - 1 = 0,$$

als Diagramm eine Kurve vom Grade  $m + n$  an, welche im unendlich fernen Punkte auf  $aw_1 + a'w_1' + a_0 = 0$  einen  $m$ -fachen Punkt hat, mit dieser Gerade als einziger Tangente, während die Gerade  $bw_1 + b'w_1' + b_0 = 0$  die einzige Asymptote eines  $n$ -fachen unendlich fernen Punktes ist.

§ 8. In den vorhergehenden Paragraphen haben wir die Frage erledigt, welchen Bedingungen das Diagramm von  $\Psi_1(w_1, w_1') = 0$  genügen muss, damit diese Gleichung zu einer Erörterung mittels



einer oder zweier parabolischen oder hyperbolischen Strahlencongruenzen geeignet sei.

Es leuchtet ohne Weiteres ein, dass wir das erhaltene Diagramm noch um einen willkürlichen Betrag verschieben und jede der Coordinaten in einem willkürlichen sogar imaginären Verhältnisse vergrössern dürfen.

Alle einem solchen Diagramme aufgelegten Bedingungen sind überhaupt einer Vergrösserung jeder der Coordinaten fähig, während bei der Coordinatentransformation von  $x_k$  in  $y_k$  das Prinzip der Verschiebung schon herangezogen ist.

### § 9. Die Gleichung zweiten Grades.

Wir wollen, auch im Folgenden, die verschiedenen Gleichungen der geometrischen Eigenschaften ihrer Diagrammen nach unterscheiden.

Statt  $w$  und  $w'$  werden wir uns nachher häufig von  $x$  und  $y$  bedienen.

Betrachten wir zuerst die Gleichung der *Parabel*.

Es sei gegeben

$$(a_0x + b_0y)^2 + a_1x + b_1y + c_2 = 0.$$

Wir erkennen in dieser Gleichung unmittelbar die Form

$$(aw + a'w' + a_0)^m - (bw + b'w' + b_0)^n = 0$$

(siehe S. 492); wir benutzen deshalb die Strahlencongruenz

$$kw' = w^2,$$

wo der Faktor  $k$  der Homogeneität wegen eingeführt ist.

Wir setzen nun

$$\begin{aligned} a_0x + b_0y &= w, \\ a_1x + b_1y + c_2 &= kw'. \end{aligned}$$

Die Transformation

$$\begin{aligned} x &= x' - \frac{b_0c_2}{a_1b_0 - a_0b_1} = x' + \xi, \\ y &= y' + \frac{a_0c_2}{a_1b_0 - a_0b_1} = y' + \eta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= k a_0', \\ b_1 &= k b_0' \end{aligned}$$

ergiebt

$$\begin{aligned} a_0 x' + b_0 y' &= w, \\ a_0' x' + b_0' y' &= w', \end{aligned}$$

wonach

$$\begin{aligned} x' &= \frac{b_0' w - b_0 w'}{a_0 b_0' - a_0' b_0}, \\ y' &= \frac{-a_0' w + a_0 w'}{a_0 b_0' - a_0' b_0}, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{a_0 b_0' - a_0' b_0}{b_0' - b_0} x' &= \frac{b_0'}{b_0' - b_0} w + \frac{-b_0}{b_0' - b_0} w', \\ \frac{a_0 b_0' - a_0' b_0}{a_0 - a_0'} y' &= \frac{-a_0'}{a_0 - a_0'} w + \frac{a_0}{a_0 - a_0'} w'. \end{aligned}$$

Setzen wir noch

$$\begin{aligned} \frac{a_0 b_0' - a_0' b_0}{b_0' - b_0} &= \alpha, \quad \frac{a_0 b_0' - a_0' b_0}{a_0 - a_0'} = \beta, \\ \frac{-b_0}{b_0' - b_0} &= p, \quad \frac{a_0}{a_0 - a_0'} = q, \end{aligned}$$

wonach

$$\frac{b_0'}{b_0' - b_0} = 1 - p, \quad \frac{-a_0'}{a_0 - a_0'} = 1 - q,$$

so folgt

$$\begin{aligned} x'' &= \alpha x' = p w' + (1 - p) w, \\ y'' &= \beta y' = q w' + (1 - q) w. \end{aligned}$$

In dieser Weise ist die gegebene Gleichung der Congruenz  $k w' = w^2$  angepasst.

Die hier angewandte Rechnungsweise würde scheitern, wenn die Grössen  $p$  und  $q$  unendlich gross wären, oder wenn eine der Grössen  $\alpha$  und  $\beta$  unendlich gross oder null würde; die Beziehungen

$$\begin{aligned}b_0' - b_0 &= 0, \\a_0' - a_0 &= 0, \\a_0 b_0' - a_0' b_0 &= 0\end{aligned}$$

dürfen also *nicht* erfüllt sein.

Die letzte Gleichung bedingt

$$\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_0'}{b_0'} = \frac{a_1}{b_1};$$

sie würde besagen, dass die Gleichung der Parabel zwei parallele Geraden darstellte; dies ist aber ausgeschlossen.

Den Gleichungen  $b_0' = b_0$  und  $a_0' = a_0$ , oder  $b_1 = kb_0$  und  $a_1 = ka_0$  kann vorgebeugt werden, indem man einen anderen Wert für  $k$  wählt; auch hierin braucht also keine Schwierigkeit zu liegen.

*Beispiel.* Man fragt nach der Bahn von  $y$ , wenn  $x$  die reelle Axe beschreibt.

Aus

$$\begin{aligned}x' &= x - \xi, \\x'' &= \alpha x',\end{aligned}$$

wo  $\xi$  und  $\alpha$  beide reell sind, folgt, dass auch  $x''$  die reelle Axe beschreibt.

Die Ebene von  $x''$  wird in der Höhe  $ph$  parallel zur Abbildungsebene  $[w]$  gestellt.

Den Bezeichnungen in homogenen Coordinaten entsprechend, haben wir alsdann

$$\mu = \frac{x_3}{x_4} = \frac{h - z}{z} = \frac{1 - p}{p}.$$

Die Ebene von  $y''$  wird durch

$$x_3 - \nu x_4 = 0$$

angewiesen, wenn  $\nu$  sich ergibt aus

$$\nu = \frac{1 - q}{q}.$$

Es handelt sich nun offenbar um die Regelfläche der Gerade

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 &= 0, \\x_3 - \mu x_4 &= 0.\end{aligned}$$

Diese Regelfläche besteht aus der 2-fachen Ebene der reellen Axen, aus der einfachen Abbildungsebene  $[w]$  und aus der kubischen Regelfläche (siehe S. 126,  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = -1$ ,  $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$ )

$$(x_1 - x_2)^2 x_4 - 2(x_1 + x_2)(x_3 - \mu x_4)^2 - \mu(2x_3 - \mu x_4)(x_3 - \mu x_4)^2 = 0.$$

Der Schnitt dieser Fläche mit der Ebene  $x_3 = \nu x_4$  besteht aus der unendlich fernen Gerade und aus dem Kegelschnitte

$$(x_1 - x_2)^2 - 2(\nu - \mu)^2(x_1 + x_2)x_4 - \mu(2\nu - \mu)(\nu - \mu)^2 x_4^2 = 0,$$

der also in cartesischen Coordinaten durch

$$\dot{y}^2 + \frac{k(p - q)^2}{p^2 q} x + \frac{k^2(1 - p)(2p - q - pq)(p - q)^2}{p^4 q} = 0,$$

oder

$$y^2 = 2m(x - t)$$

dargestellt wird.

Die Bahn von  $y''$  ist daher eine in Bezug auf die reelle Axe symmetrische Parabel.

Die Transformationen

$$\begin{aligned} y'' &= \beta y' \\ y' &= y - \eta \end{aligned}$$

vergrössern diese Parabel gleichförmig und verschieben sie längs der reellen Axe, wobei sie in Bezug auf diese Axe symmetrisch bleibt.

Also: die Bahn, welche die Ordinate  $y$  beschreibt, wenn  $x$  die reelle Axe durchläuft, ist aus einer in Bezug auf die reelle Axe symmetrischen Parabel, aus der reellen Axe selbst und aus der unendlich fernen Gerade zusammengesetzt.

Wenn wir also in der Gleichung

$$(a_0 x + b_0 y)^2 + a_1 x + b_1 y + c_2 = 0$$

die Abscisse  $x$  alle reelle Werte von  $+\infty$  an durchlaufen lassen, so werden jedem Werte von  $x$  während einiger Zeit reelle Werte von  $y$  entsprechen, und zwar so lange, bis die Tangente der  $y$ -Axe parallel geworden ist; in diesem Augenblicke verlässt die Ordinate in ihrer complexen Ebene die reelle Axe und bewegt sich weiter längs einer Parabel.

So bald  $x$  einen unendlich grossen Wert erhält, ist die Tangente

wiederum der  $y$ -Axe parallel geworden; die Ordinate verlässt sodann die Parabel und kehrt (längs der unendlich fernen Gerade) zu der reellen Axe zurück. Indem wir dieses Verfahren wiederholen, dürfen wir die Ordinate, wenn sie zum zweiten Male die Parabel betritt, längs dem anderen Teil dieser Kurve fortbewegen, wonach sie abermals (längs der unendlich fernen Gerade) in die reelle Axe gelangt.

Bei dieser Wiederholung dürfen wir auch die reellen Werte der Abscisse den anderen reellen Werten der Ordinate zuordnen.

In Fig. 18 (hinten angefügte Figurentafel) sind die entsprechende Punkte der Diagrammparabel und der Bahn der Ordinate durch übereinstimmende Ziffern angewiesen.

Jeder *Punkt* der Diagrammparabel, d.h. jede Combination  $(x, y)$  wird natürlich durch einen Strahl vertreten; dieser Strahl umhüllt, sofern der reelle Teil des Diagrams beschrieben wird, einen Kegelschnitt in der Ebene der reellen Axen; sobald der Punkt  $(x, y)$  aber den reellen Teil verlässt, betritt der Strahl die kubische Regelfläche. Auch hierbei können wir dem Strahle eine stetige Bahn anweisen.

Wir wollen jetzt die Gleichung des Mittelpunktskegelschnittes erledigen.

Durch eine Verschiebung lässt sich der Mittelpunkt stets in den Ursprung verlegen. Wir werden auch ausschliesslich diese Lage betrachten.

Es sei also gegeben

$$a_0 x^2 + 2 b_0 xy + c_0 y^2 + c_2 = 0.$$

Falls die Gesamtheit der quadratischen Glieder in reelle Faktoren zerlegt werden kann, ist die Behandlung sehr einfach.

Wir betrachten alsdann die Gleichung

$$(ax + by)(a'x + b'y) - c^2 = 0,$$

wo  $a, b, a', b'$  und  $c$  reelle Werte haben.

Wir setzen nun

$$\begin{aligned} ax + by &= w, \\ a'x + b'y &= w', \end{aligned}$$

und können offenbar die Congruenz  $ww' = c^2$  anwenden.

Wir finden sodann

$$x = \frac{b'w - bw'}{ab' - a'b},$$

$$y = \frac{-a'w + aw'}{ab' - a'b},$$

oder

$$\frac{ab' - a'b}{b' - b} x = \frac{b'}{b' - b} w + \frac{-b}{b' - b} w',$$

$$\frac{ab' - a'b}{a - a'} y = \frac{-a'}{a - a'} w + \frac{a}{a - a'} w'.$$

Setzen wir noch

$$\frac{ab' - a'b}{b' - b} = \alpha, \quad \frac{ab' - a'b}{a - a'} = \beta,$$

$$\frac{-b}{b' - b} = p, \quad \frac{a}{a - a'} = q,$$

wonach

$$\frac{b'}{b' - b} = 1 - p, \quad \frac{-a'}{a - a'} = 1 - q,$$

so bekommen wir

$$x' = \alpha x = pw' + (1 - p)w,$$

$$y' = \beta y = qw' + (1 - q)w.$$

Diese Zerlegung der gegebenen Gleichung würde scheitern, wenn eine der Grössen  $p$  und  $q$  unendlich gross wäre, oder wenn eine der Grössen  $\alpha$  und  $\beta$  unendlich gross oder null würde; es gälte dann eine der Beziehungen

$$b' - b = 0,$$

oder

$$a' - a = 0,$$

oder

$$ab' - a'b = 0.$$

Diese letzte Bedingung ist aber niemals erfüllt, da sie ausdrückt, dass das quadratische Glied ein Quadrat ist.

Die Gleichung  $b' - b = 0$  oder  $a' - a = 0$  kann beseitigt werden, indem man z. B. der Gleichung diese Form verleiht:

$$\left(\frac{a}{\rho}x + \frac{b}{\rho}y\right)(\rho a'x + \rho b'y) - c^2 = 0.$$

Damit ist die Gleichung der Hyperbel zur Anwendung der Congruenz  $ww' = c^2$  geeignet geworden.

*Beispiel.* Man fragt die Bahn von  $x$  und  $y$ , wenn der Punkt  $(x, y)$  der Schnittpunkt ist der Hyperbel mit den reellen Geraden eines Strahlenbüschels mit reellem Scheitel  $P(X, Y)$ .

Um diese Frage zu lösen, wollen wir zuerst untersuchen, wie eine reelle Gerade durch eine Strahlencongruenz dargestellt wird.

Die Gerade möge durch

$$w' = \gamma(w - u_0)$$

angewiesen sein, wo  $\gamma$  und  $u_0$  reelle Grössen sind.

Wir haben auf S. 465 gefunden, dass die lineare Funktion mit reellen Constanten durch einen Strahlenbündel vertreten wird, dessen Scheitel  $C$  in der Ebene der reellen Axen liegt und zwar auf der Gerade, welche den Punkt  $W_0$  (wofür  $w = u_0$  gilt) mit  $O'$  verbindet.

Die Lage von  $C$  auf dieser Gerade wird durch die Beziehung

$$W_0 C : O' C = 1 : \gamma$$

bestimmt.

Ist  $w = X$ ,  $w' = Y$  ( $X$  und  $Y$  reell) ein der linearen Gleichung genügendes System, so muss der Strahl  $XY$  nach dem Punkte  $C$  zielen.

Umgekehrt, soll

$$w' = \gamma(w - u_0)$$

eine Beziehung sein, welche durch  $w = X$ ,  $w' = Y$  erfüllt wird, so muss der Scheitel  $C$  sich auf der Gerade  $XY$  befinden.

Das System  $(X, Y)$  weist in gewöhnlichen cartesischen Coordinaten einen reellen Punkt  $P$  an,  $w' = \gamma(w - u_0)$  eine reelle Gerade.

Die Bedingung, dass  $(X, Y)$  auf der Gerade  $w' = \gamma(w - u_0)$  liegen soll, wird also ersetzt durch die Forderung, dass  $C$  sich auf  $XY$  befinde.

*Alle reelle Geraden  $w' = \gamma(w - u_0)$ , welche sich in  $P(X, Y)$  treffen, werden also vertreten durch die Gesamtheit aller Strahlen, welche auf  $XY$  ruhen,*

oder auch:

*jeder, reelle oder imaginäre, Punkt  $Q$  ( $w = \xi$ ,  $w' = \eta$ ), welcher mit  $P$  durch eine reelle Gerade verbunden wird, wird durch einen auf  $XY$  ruhenden Strahl dargestellt.*

Soll ein solcher Punkt  $Q(\xi, \eta)$  überdies einer anderen Kurve angehören, so muss die Gerade  $\xi\eta$  zugleich ein Strahl derjenigen Congruenz sein, welche die Gleichung der gegebenen Diagrammkurve vertritt.

Also: die Gesamtheit aller, reellen oder imaginären, Punkte einer gegebenen Kurve, welche mit  $P$  durch eine reelle Gerade verbunden werden, oder auch: *die Gesamtheit aller Schnittpunkte der gegebenen Kurve mit dem reellen durch  $P$  gelegten Strahlenbüschel wird dargestellt durch alle Strahlen der zugehörigen Congruenz, welche auf der (in der Ebene der reellen Axen liegenden) Gerade  $XY$  ruhen.*

Es ist also unsere Aufgabe für die genannte Congruenz die *axiale Regelfläche* der Gerade  $XY$  zu bestimmen.

Wir wollen jetzt dieses Prinzip anwenden auf die Congruenz von

$$(ax + by)(a'x + b'y) - c^2 = 0.$$

Durch die Transformation

$$x = \frac{x'}{\alpha}, \quad y = \frac{y'}{\beta}$$

wird diese Strahlencongruenz übergeführt in die von

$$ww' = c^2.$$

Die Gerade  $XY$  verwandelt sich in die Gerade, welche den Punkt  $X'$  der  $x'$ -Ebene ( $z = ph$ ) mit dem Punkte  $Y'$  der  $y'$ -Ebene ( $z = qh$ ) verbindet. Diese Gerade  $X'Y'$  schneidet die Ebene  $[w]$  in einem Punkte  $A(w = A)$  und die Ebene  $[w']$  in einem Punkte  $B'(w' = B')$ .

Vermöge der herbeigeführten Substitutionen sind  $A$  und  $B'$  durch

$$\begin{aligned} A &= aX + bY, \\ B' &= a'X + b'Y \end{aligned}$$

bestimmt.

Die axiale Regelfläche einer in der Ebene der reellen Axe liegenden Gerade wurde auf S. 62 (Gl. (71)) abgeleitet. Wir haben in der dort gefundenen Gleichung (71) nur  $\alpha$  durch  $A$  und  $b'$  durch  $B'$  zu ersetzen, und erhalten sodann die Gleichung der hier in Frage kommenden Regelfläche. Diese Gleichung lautet:



$$\begin{vmatrix} B' & , & Ax_3 + B'x_4 & , & -1 & , & -1 \\ -x_3 & , & Ax_1x_3 & , & Ax_3 & , & x_1 - B'x_4 \\ -x_3 & , & Ax_2x_3 & , & x_2 - B'x_4 & , & Ax_3 \\ Ax_3 - B'x_4, & (x_1 + x_2)x_4 - Ax_1x_2, & -Ax_2 + 2x_4, & -Ax_1 + 2x_4 \end{vmatrix} = 0,$$

oder, nach Reduktion:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & , & x_1 + x_2 - 2(Ax_3 + B'x_4), 0 & , & 0 \\ x_1 + x_2 - 2(Ax_3 - B'x_4), x_1 - x_2 & , & -2x_3 & , & 2A(Ax_3 - B'x_4)x_3 \\ -2 & , & 0 & , & B' & , & -(Ax_3 - B'x_4) \\ 2A^2x_3 - 2(AB' - 2)x_4, 0 & , & -(Ax_3 + B'x_4), -Ax_1x_2 + (x_1 + x_2)(A^2x_3 + x_4) - \\ & & & & -2A^2x_3 - (AB' - 2)x_4x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Bahn von  $x'$  befindet sich nun in der Ebene

$$x_3 = \mu x_4,$$

wenn

$$\mu = \frac{1 - p}{p};$$

die Bahn von  $y'$  liegt in der Ebene

$$x_3 = \nu x_4,$$

wenn

$$\nu = \frac{1 - q}{q}.$$

Indem wir diese Werte für  $x_3$  in die obige Gleichung einsetzen und ausserdem

$$x_1 + x_2 = \frac{2x}{c}$$

$$x_1 - x_2 = \frac{2iy}{c}$$

$$x_4 = \frac{h}{z} (= p \text{ oder } q)$$

setzen, bekommen wir die bez. durch  $x'$  und  $y'$  beschriebenen Kurven.

Beide sind *bicircular Kurven* 4<sup>ten</sup> Grades mit einem Doppelpunkt. Dieser Doppelpunkt  $C_\mu$ , bez.  $C_\nu$ , ist der Schnittpunkt der Gerade  $AB'$

mit der Ebene von  $x'$ , bez.  $y'$ ; er befindet sich auf der reellen Axe.

Die beiden Kurven sind symmetrisch in Bezug auf die reellen Axen.

Die Bahnen von  $x$  und  $y$  zeigen dieselben Eigenschaften.

In Fig. 19 (hinten angefügte Figurentafel) sind dargestellt:

a) die Gerade  $AB'$  mit der Fokalellipse in der Ebene  $\varepsilon$ ,

b) die Diagramhyperbel mit den Transversalen durch  $P$ ,

c) die Bahn von  $x'$ ,

d) die Bahn von  $y'$ .

Die entsprechenden Punkte dieser Figuren sind durch die nämlichen Ziffern angedeutet.

Im Allgemeinen ist ein imaginäres  $y$  einem imaginären  $x$  zugeordnet.

Wenn  $y'$  im Doppelpunkte  $C_v$  seiner Bahn die reelle Axe trifft (also  $y'$  reell ist), so ist die durch  $P$  gelegte Gerade senkrecht zur  $y$ -Axe. Zu diesem Werte von  $y'$  gehören zwei imaginäre Werte von  $x'$ .

Die Bahn von  $x'$  hat einen isolirten Punkt  $C_\mu$ ; dieser entspricht derjenigen durch  $P$  gelegten Gerade, welche auf der  $x$ -Axe senkrecht steht, und deren Schnittpunkte mit der Hyperbel somit dieselbe Abscisse haben.

Auch hier dürfen wir sowohl  $x'$  wie  $y'$  einer stetigen Bahn folgen lassen.

Die reellen Schnittpunkten werden durch die den Fokalkegelschnitt umhüllenden, in der Ebene der reellen Axen liegenden Strahlen vertreten.

Sobald der Scheitel  $C$  des eine durch  $P$  gehende Gerade darstellenden Strahlenbündels in seiner Bewegung längs  $AB'$  innerhalb des Fokalkegelschnittes gelangt, giebt es aus  $C$  keine reelle Tangenten an dieser Kurve. Im Augenblicke, wo  $C$  den Fokalkegelschnitt trifft, verlässt der Strahl die Ebene der reellen Axen und betritt die biquadratische axiale Regelfläche von  $AB'$ .

Wenn der Punkt  $P$  innerhalb der Diagramhyperbel liegt, so liefert jede durch  $P$  gelegte Transversale zwei reelle Schnittpunkte; die Gerade  $AB'$  liegt alsdann in ihrer ganzen Ausdehnung *außerhalb* des Fokalkegelschnittes, sodass aus *jedem* ihrer Punkte zwei reelle Tangenten an diese Kurve zu legen sind. Die axiale Regelfläche von  $AB'$  ist alsdann *imaginär*, wonach auch die durch  $x$  und  $y$  beschriebenen biquadratischen Kurven *verschwinden*.

Wir wollen uns nunmehr der Erörterung der Gleichung einer Ellipse zuwenden.

Wir bringen sie in die Gestalt

$$x^2 + 2 \cos \beta xy + y^2 = c^2$$

oder

$$(x + e^{i\beta} y)(x + e^{-i\beta} y) = c^2,$$

und setzen noch

$$\begin{aligned} x + e^{i\beta} y &= \rho w, \\ x + e^{-i\beta} y &= \frac{1}{\rho} w'; \end{aligned}$$

wir sind also zu der Beziehung

$$ww' = c^2$$

zurückgelangt.

Für  $x$  und  $y$  finden wir die Ausdrücke

$$\begin{aligned} x &= \frac{e^{-i\beta} \rho w - e^{i\beta} \rho^{-1} w'}{-2i \sin \beta}, \\ y &= \frac{\rho w - \rho^{-1} w'}{2i \sin \beta}. \end{aligned}$$

Wenn wir mit den beiden Ausdrücken in derselben Weise verfahren wollten wie in den vorigen Fällen, so würden wir bei der Behandlung von  $x$  imaginäre Werte für  $\rho$  erhalten, welche doch für unsere Darstellungsweise unbrauchbar sind. Der Wert von  $q$  bei  $y$  ist aber reell; wir finden nl.

$$q = \frac{-\rho^{-1}}{\rho - \rho^{-1}} = \frac{1}{1 - \rho^2}.$$

Die Grösse  $y$  ist sodann aus

$$\frac{2i \rho \sin \beta}{\rho^2 - 1} y = qw' + (1 - q) w = y'$$

bestimmt.

Hieraus ergibt sich bei gegebenem  $w$  der Wert für  $iy$ , welcher durch Drehung der ganzen  $y$ -Ebene um seinen Nullpunkt, durch einen Winkel  $-\frac{\pi}{2}$ , in den Wert von  $y$  verwandelt wird.

Ist umgekehrt der Wert von  $y$ , oder die Bahn von  $y$  gegeben, so drehen wir diese(n) zuerst durch einen Winkel  $+\frac{\pi}{2}$  um den Nullpunkt und vergrössern ihn (sie) nachher im Verhältnisse 1 zu  $\frac{2\rho \sin \beta}{\rho^2 - 1}$ .

Wir erhalten alsdann den Wert oder die Bahn der Grösse  $y' = \frac{2i\rho \sin\beta}{\rho^2 - 1} y$ , welche(r), in die Ebene  $z = qh$  gelegt, die entsprechenden Congruenzstrahlen bestimmt und somit auch die Werte oder die Bahn von  $w$  (und  $w'$ ).

Es handelt sich nun darum, die zugeordneten Werte oder die Bahn von  $x$  zu finden. Zu diesem Zweck ziehen wir zwei neue Veränderlichen  $\bar{w}$  und  $\bar{w}'$  heran, welche durch

$$\begin{aligned}\bar{w} &= e^{-i\beta} w, \\ \bar{w}' &= e^{i\beta} w'\end{aligned}$$

bestimmt sind.

Weil diese Grössen auch der Beziehung

$$\bar{w} \bar{w}' = c^2$$

genügen, so haben wir uns mit derselben Strahlencongruenz zu beschäftigen, oder auch, indem wir die Grösse  $w$  in  $[w]$  durch eine Drehung um den Winkel  $-\beta$  durch die Grösse  $\bar{w}$  ersetzen, so stimmt in derselben Congruenz mit  $\bar{w}$  eine Grösse  $\bar{w}'$  in der Ebene  $[w']$  überein, welche der Beziehung

$$\bar{w}' = e^{i\beta} w'$$

genügt.

Es ist jetzt  $x$  bestimmt durch

$$\frac{-2i\rho \sin\beta}{\rho^2 - 1} x = \frac{1}{1 - \rho^2} \bar{w}' + \frac{-\rho^2}{1 - \rho^2} \bar{w},$$

oder, wenn wir setzen

$$\frac{1}{1 - \rho^2} = p,$$

durch

$$\frac{-2i\rho \sin\beta}{\rho^2 - 1} x = p \bar{w}' + (1 - p) \bar{w} = x'.$$

In der Congruenz  $\bar{w} \bar{w}' = c^2$  finden wir alsdann in der Ebene  $z = p h$  für einen gegebenen Wert (Bahn) von  $\bar{w}$  den entsprechenden Wert (Bahn) von  $x'$ ; wenn wir diese(n) im Verhältniss 1 zu  $\frac{2\rho \sin\beta}{\rho^2 - 1}$

*verkleinern* und nachher die  $x'$ -Ebene um einen Winkel  $+\frac{\pi}{2}$  drehen, so erhalten wir den fraglichen Wert (Bahn) von  $x$ .

Die obigen Überlegungen lassen sich folgendermassen zusammenfassen:

Um zu einem gegebenen Wert (Bahn) von  $y$  den zugeordneten Wert (Bahn) von  $x$  zu finden, haben wir

1° den Wert (Bahn) von  $y$  im Verhältniss 1 zu  $\frac{2\rho \sin \beta}{\rho^2 - 1}$  zu vergrössern;

2° diesen Wert (Bahn) um einen Winkel  $+\frac{\pi}{2}$  zu drehen, wonach wir den Wert (Bahn) der Grösse  $y'$  erhalten;

3° den Wert (Bahn) von  $y'$  in die Ebene  $z = qh$  zu legen, in der Congruenz von  $ww' = c^2$ , und die Punkte (Bahn) zu bestimmen, wo die sich auf den Punkten  $y'$  stützenden Strahlen (die Regelfläche der Bahn von  $y'$ ) die Ebene  $[w]$  schneiden;

4° die Werte (Bahn) von  $w$  um einen Winkel  $-\beta$  zu drehen, wonach wir die Werte (Bahn) von  $\bar{w}$  erhalten;

5° die Strahlen (die Regelfläche der Strahlen) zu bestimmen, welche den Punkten  $\bar{w}$  entstammen (auf der Bahn von  $\bar{w}$  ruhen);

6° diese Strahlen (diese Regelfläche) mit der Ebene  $z = ph$  zu schneiden, wodurch die Werte (Bahn) von  $x'$  sich ergeben;

7° die  $x'$ -Ebene um einen Winkel  $+\frac{\pi}{2}$  zu drehen, und die so erhaltenen Werte (Bahn) im Verhältniss 1 zu  $\frac{2\rho \sin \beta}{\rho^2 - 1}$  zu *verkleinern*, wonach wir die Werte (Bahn) von  $x$  bekommen.

Wir können noch über  $\rho$  verfügen; jedoch dürfen wir nicht  $\rho = +1$ , oder  $\rho = -1$  setzen. Wir wählen  $\rho$  so, dass

$$\frac{2\rho \sin \beta}{\rho^2 - 1} = 1,$$

wonach  $\rho$  sich ergibt aus der Beziehung

$$\rho^2 - 2\rho \sin \beta - 1 = 0,$$

also

$$\rho = \sin \beta \pm \sqrt{1 + \sin^2 \beta}. \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

Durch diese Wahl von  $\rho$  verschwindet die Vergrösserung und die Verkleinerung in den Ebenen von  $x'$  und  $y'$ .

Es erhellt, dass der Wert (58) von  $\rho$  unbrauchbar wird, wenn  $\sin \beta = 0$  ist. Es ist dann aber  $\cos \beta = \pm 1$ , wonach die linke Seite der gegebenen Gleichung der Ellipse ein Quadrat wird, und die Gleichung somit in zwei lineare Gleichungen zu zerlegen ist.

Wir bemerken noch, dass wir für  $p$  und  $q$  dieselben Werte erhalten haben; die Ebenen von  $x'$  und  $y'$  fallen daher zusammen.

Würde diese Coincidenz eventuelle Schwierigkeiten veranlassen, so können wir für  $\rho$  einen anderen Wert wählen; wir dürfen alsdann für die Bestimmung von  $y$  den einen Wert (58) nehmen, und für die Bestimmung von  $x$  den anderen.

Bevor wir zu einem Beispiel übergehen, haben wir noch zu untersuchen, in welcher Weise die Frage der Schneidung des Diagrammes mit den Strahlen eines reellen Strahlenbüschels in diesem Falle zu lösen ist.

Der Scheitel des Strahlenbüschels sei durch

$$x = X, y = Y$$

angewiesen, wo  $X$  und  $Y$  reell sind.

Die diesen entsprechenden Werte  $W$  und  $W_0'$  sind aus

$$\begin{aligned}\rho W &= X + e^{i\beta} Y, \\ \rho^{-1} W_0' &= X + e^{-i\beta} Y\end{aligned}$$

bestimmt.

Ein Punkt  $(x, y)$  der Ellipse wird in den Ebenen  $[w]$  und  $[w']$  durch

$$\begin{aligned}\rho w &= x + e^{i\beta} y \\ \rho^{-1} w' &= x + e^{-i\beta} y\end{aligned}$$

vertreten.

Wenn dieser Punkt  $(x, y)$  mit dem Scheitel  $(X, Y)$  durch eine *reelle* Gerade verbunden wird, so gilt die Beziehung

$$y - Y = m(x - X),$$

wo  $m$  reell ist.

Übersetzen wir sie in eine Beziehung zwischen den Punkten der Ebenen  $[w]$  und  $[w']$ , so finden wir

$$\begin{aligned}\rho(w - W) &= (1 + me^{i\beta})(x - X), \\ \rho^{-1}(w' - W_0') &= (1 + me^{-i\beta})(x - X),\end{aligned}$$

woraus sich durch Teilung ergibt

$$\frac{\rho(w - W)}{\rho^{-1}(w' - W_0')} = \frac{1 + me^{i\beta}}{1 + me^{-i\beta}} = e^{2i\psi}.$$

Hieraus folgt, dass  $\rho(w - W)$  und  $\rho^{-1}(w' - W_0')$  gleiche Moduln haben.

Wenn wir noch

$$\begin{aligned} \rho w &= w_1, \quad \rho W = W_1, \\ \rho^{-1} w' &= w_1', \quad \rho^{-1} W_0' = W_{10}' \end{aligned}$$

setzen, so bekommen wir

$$\text{mod}(w_1 - W_1) = \text{mod}(w_1' - W_{10}').$$

Ausserdem sind  $W_1$  und  $W_{10}'$  conjugirt complex.

Aus diesen Bedingungen folgt nun eine Bahn für den Punkt  $w_1$  und eine solche für den Punkt  $w_1'$ .

Um diese Bahn zu ermitteln, legen wir zuerst die Ebene  $[w_1']$  in die Ebene  $[w_1]$ ; überdies ersetzen wir jedes  $w_1'$  durch seinen conjugirt complexen Wert  $w_1''$ .

Es fällt  $W_{10}''$  mit  $W_1$  zusammen, also

$$W_{10}'' = W_1.$$

Die Punkte  $w_1$  und  $w_1''$  liegen nun mit dem Nullpunkt in einer Geraden und sind ihre gegenseitigen Inversionen in Bezug auf den Kreis  $\gamma$  mit Radius  $c$ .

Bekanntlich sind zwei Punkte, welche durch Inversion in Bezug auf den Kreis  $\gamma$  zusammenhängen, zu betrachten als die Schnittpunkte einer durch den Nullpunkt (Mittelpunkt von  $\gamma$ ) gehenden Geraden mit einem Orthogonalkreise von  $\gamma$ .

Die Bedingung

$$\text{mod}(w_1 - W_1) = \text{mod}(w_1'' - W_1)$$

fordert nun, dass diese Punkte auch auf einem Kreise mit  $W_1$  als Mittelpunkt liegen.

Der geometrische Ort der Punkte  $w_1$  und  $w_1''$  ist somit der Orthogonalkreis von  $\gamma$ , dessen Mittelpunkt  $W_1$  ist.

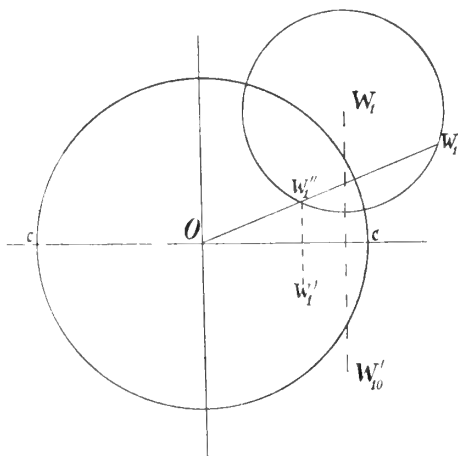


Fig. 20.

Wir haben also den Ort der Punkte  $w_1$  gefunden. Durch gleichförmige Verkleinerung im Verhältniss 1 zu  $\rho$ , mit dem Nullpunkt als Ähnlichkeitspunkt, erhalten wir für den Ort der Punkte  $w$  den Orthogonalkreis ( $w$ ) des Kreises, dessen Radius  $\frac{c}{\rho}$  und dessen Mittelpunkt  $W$  ist.

Die Bahn von  $y'$  erscheint nun als die Schnittkurve der Ebene  $z = qh$  ( $q = \frac{1}{1 - \rho^2}$ ,  $\rho = \sin \beta \pm \sqrt{1 + \sin^2 \beta}$ ) mit der Regelfläche der Strahlen, welche auf dem in der Ebene  $[w]$  liegenden Kreise ( $w$ ) ruhen; die Bahn von  $y$  wird erhalten, indem man die Bahn von  $y'$  um den Winkel  $-\frac{\pi}{2}$  dreht.

Um die Bahn von  $x$  zu bekommen, müssen wir zuerst den Kreis ( $w$ ) durch den Winkel  $-\beta$  um den Nullpunkt drehen, bis er in die Lage ( $\bar{w}$ ) gelangt, sodann die Regelfläche bestimmen der Strahlen, welche auf ( $\bar{w}$ ) ruhen, und schliesslich die Schnittkurve dieser Fläche mit der Ebene  $z = ph$  ( $p = \frac{1}{1 - \rho^2} = q$ ) um den Winkel  $+\frac{\pi}{2}$  drehen.

*Beispiel I.* Man fragt die Bahn von  $y$ , wenn  $x$  die reelle Axe beschreibt.

Wir betrachten also die reelle Axe in der Ebene  $z = ph$ . Die Bahn von  $x' = ix$  ist alsdann die imaginäre Axe.

Die axiale Regelfläche der in der Ebene  $z = ph$  liegenden imaginären Axe, also der Gerade

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_3 &= \mu x_4 \quad (\mu = \frac{1 - p}{p} = -\rho^2) \end{aligned}$$

zerfällt in die Ebene der imaginären Axen und in eine Fläche 4<sup>ten</sup> Grades, auf welcher die gegebene Gerade eine Doppelgerade ist und die Kreispunkte Doppelpunkte sind.

Die biquadratische Fläche schneidet die Ebene  $[w]$  in der 2-fachen unendlich fernen Gerade und in einem Kreise, dessen Mittelpunkt mit dem Nullpunkte identisch ist (siehe z. B. S. 54).

Die durch den Punkt  $\bar{w}$  beschriebene Bahn besteht demnach aus der imaginären Axe, aus der unendlich fernen Gerade und aus einem Kreise, dessen Mittelpunkt im Nullpunkte liegt, und dessen Gleichung lautet:

$$\mu x_1 x_2 + x_3^2 = 0,$$

oder



$$u^2 + v^2 = \rho^2 c^2.$$

Weil reelle Combinationen  $(x, y)$  complexe Werte von  $\bar{w}$  und  $\bar{w}'$  liefern, so ist dieser Kreis, welcher mit  $I'$  bezeichnet werde, die Abbildung der reellen Punkte der Ellipse.

Dieser Kreis ändert sich nicht bei der Drehung  $+\beta$ , welche auszuführen ist um die Bahn von  $w$  zu erhalten.

Die auf  $I'$  ruhenden Strahlen schneiden die Ebene von  $y$  wiederum in der imaginären Axe, wonach die entsprechende Bahn von  $y$  die *reelle* Axe ist.

Von grosser Bedeutung ist aber die Bahn der complexen Werte von  $y$ , welche zu reellen Werten von  $x$  gehören.

Diese Bahn rührt von der imaginären Axe in der Ebene  $[\bar{w}]$  her.

Die imaginäre Axe der  $\bar{w}$ -Ebene entspricht in der  $w$ -Ebene einer Gerade, welche den Winkel  $+\beta$  mit der imaginären Axe bildet, deren Gleichung somit lautet:

$$x \cos \beta + y \sin \beta = 0.$$

Wenn wir sie durch

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = 0$$

darstellen wollen, so haben wir zu setzen

$$\alpha_1 = \frac{e^{-i\beta}}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{e^{i\beta}}{2}.$$

Die axiale Regelfläche dieser Geraden ist ein Hyperboloid, dessen Gleichung sich ergibt, indem man in (78) (S. 66)  $\alpha_3 = 0$  einsetzt und nachher durch  $x_4$  teilt. Man findet alsdann

$$\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) (\alpha_2 x_1 + \alpha_1 x_2) - (\alpha_1^2 - \alpha_2^2)^2 x_3 x_4 = 0.$$

Wenn diese Gleichung in cartesische Coordinaten übergeführt wird, verwandelt sie sich in

$$(x \cos \beta + y \sin \beta) (x \cos \beta - y \sin \beta) = \frac{c^2}{h^2} \sin^2 2\beta \cdot z(z - h).$$

Diese Regelfläche schneidet  $z = qh$  in der Kurve

$$(x \cos \beta + y \sin \beta) (x \cos \beta - y \sin \beta) = c^2 \sin^2 2\beta \cdot q(q - 1),$$

oder

$$\frac{x^2}{4c^2 \sin^2 \beta \cdot q(q-1)} - \frac{y^2}{4c^2 \cos^2 \beta \cdot q(q-1)} = 1,$$

also in einer Hyperbel, welche die reelle und die imaginäre Axe als Axen hat.

Diese Hyperbel ist nun die Bahn von  $y'$ . Die Bahn von  $y$  wird ermittelt, indem man jene Kurve um den Winkel  $\frac{\pi}{2}$  dreht.

Man findet sodann

$$\frac{y^2}{4c^2 \sin^2 \beta \cdot q(q-1)} - \frac{x^2}{4c^2 \sin^2 \beta \cdot q(q-1)} = 1.$$

*Beispiel II.* Man fragt die Bahnen von  $x$  und  $y$ , wenn der Punkt  $(x, y)$  der Schnittpunkt ist der Ellipse mit den reellen Geraden eines Strahlenbüschels mit reellem Scheitel  $P(X, Y)$ .

Nach dem auf S. 506 u. 507 Dargelegten, haben wir nur noch die Regelfläche zu bestimmen der Strahlen, welche auf dem Orthogonalkreise ( $w$ ) ruhen.

Da der Radius  $r$  dieses Kreises durch

$$r^2 = (\text{mod } W)^2 - \frac{c^2}{\rho^2}$$

angewiesen ist, und man hat

$$\rho W = X + e^{i\beta} Y,$$

also

$$\rho^2 (\text{mod } W)^2 = (X + \cos \beta Y)^2 + \sin^2 \beta Y^2 = X^2 + 2 \cos \beta X Y + Y^2,$$

so finden wir für die Gleichung von ( $w$ )

$$(w) \equiv u^2 + v^2 - 2 \frac{X + \cos \beta Y}{\rho} u - 2 \frac{\sin \beta Y}{\rho} v + \frac{c^2}{\rho^2} = 0.$$

Setzen wir, der Kürze wegen,

$$\begin{aligned} X + \cos \beta Y &= cR \cos \Theta, \\ \sin \beta Y &= cR \sin \Theta, \end{aligned}$$

so lässt sich die Gleichung bringen in die Gestalt

$$\alpha_3 x_1 x_2 + \alpha_2 x_1 x_3 + \alpha_1 x_2 x_3 + \alpha_0 x_3^2 = 0,$$

wo

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= \rho^2, \\ \alpha_2 &= -\rho R e^{-i\Theta}, \\ \alpha_1 &= -\rho R e^{i\Theta}, \\ \alpha_0 &= 1. \end{aligned}$$

Die Gleichung der fraglichen Regelfläche in dieser Form finden wir in (141) auf S. 84.

Die Bahn von  $y'$  ergibt sich nach der Substitution  $x_3 = -\rho^2 x_4$ .

Die vorliegende Regelfläche ist vom 4<sup>ten</sup> Grade und trägt eine circulare kubische Raumkurve (kubischen Kreis).

Der Schnitt mit einer zu den Abbildungsebenen parallelen Ebene ist demnach eine Kurve 4<sup>ten</sup> Grades, welche in den Kreispunkten Doppelpunkte und ausserdem noch einen Doppelpunkt hat.

Die Rechnung weist nach, dass der Schnitt mit der Ebene

$$z = \frac{1}{1 - \rho^2} h$$

eine solche biquadratische Kurve ist, dessen Brennpunkte symmetrisch in Bezug auf die imaginäre Axe liegen. Ihre Coordinate sind

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\rho c (1 + R^2)}{R} \cos \Theta, \\ y &= -\frac{\rho c (1 + R^2)}{R} \sin \Theta. \end{aligned}$$

Der Doppelpunkt im Endlichen liegt auf der imaginären Axe und ist durch

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ y &= 2 \rho c R \sin \Theta \end{aligned}$$

bestimmt.

Durch Drehung durch den Winkel  $+\frac{\pi}{2}$  verwandelt sich diese Kurve in eine congruente, welche jetzt aber symmetrisch in Bezug auf die *reelle* Axe ist. Es ist diese Kurve die fragliche Bahn von  $y$ .

Die Bestimmung der Bahn von  $x$  bedarf nach diesem Beispiel keiner besonderen Erläuterung.

Wir wollen uns nunmehr besonders mit dem Falle beschäftigen, wo die Axen der gegebenen Ellipse mit den Coordinatenaxen zusammenfallen.

Durch Vergrößerung der Coordinaten ist zuerst die Gleichung in die des Kreises

$$x^2 + y^2 = c^2$$

oder

$$(x + iy)(x - iy) = c^2$$

zu verwandeln.

Wir haben also hier

$$\beta = \frac{\pi}{2},$$

wonach  $\rho$  gegeben ist durch

$$\rho = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Wenn wir jetzt  $x$  die reelle Axe beschreiben lassen, so durchläuft  $\bar{w}$  den Kreis

$$u^2 + v^2 = \rho^2 v^2$$

und die imaginäre Axe, also  $w$  denselben Kreis und die reelle Axe. Die axiale Regelfläche dieser letzteren besteht aus der Ebene der reellen Axen; es beschreibt daher  $y'$  die reelle und  $y$  die imaginäre Axe, m.a.W.: mit reellen Werten von  $x$  stimmen entweder reelle oder rein imaginäre Werte von  $y$  überein.

Das Problem der Schneidung mit einem Strahlenbüschel liefert nach dem oben Erörterten nichts Neues. Nur können wir bemerken, dass der Punkt  $W$  jetzt durch

$$\rho W = X + iY$$

bestimmt ist, so dass die Lage des Punktes  $W_1 = \rho W$  in der Ebene  $[w]$  dieselbe ist wie diejenige des Scheitels  $P$  in der Diagonalebene.

§ 10. Wir gehen jetzt über zur Gleichung *dritten* Grades.

Es handelt sich zuerst darum, zu erforschen, wie eine Gleichung dritten Grades in der in § 4, 5, 6 und 7 dargelegten Weise entstehen kann.

Wir erinnern uns, dass eine Gleichung in  $w_1$  und  $w_1'$ , deren Grad eine *unteilbare Zahl* ist,

1° entweder unmittelbar gegeben war,

2° oder durch die Elimination einer Grösse  $\bar{w}$  erhalten wurde.

Die dem 1<sup>ten</sup> Falle angehörenden Gleichungen waren

$$\begin{aligned} \text{A.} \quad & F_A(w_1, w_1') \equiv (aw_1 + a'w' + a_0)^m - (bw_1 + b'w_1' + b_0)^n = 0, \\ \text{B.} \quad & F_B(w_1, w_1') \equiv (aw_1 + a'w' + a_0)^m (bw_1 + b'w_1' + b_0)^n - 1 = 0. \end{aligned}$$

Die Gleichungen des 2<sup>ten</sup> Falles ergaben sich durch die Elimination von  $\bar{w}$  aus den folgenden Paaren:

$$\begin{aligned} \text{C.} \dots & \begin{cases} f(w_1, \bar{w}) \equiv (a_1 w_1 + a_0)^m - (b_1 w_1 + \bar{b} \bar{w} + b_0)^n = 0, & \frac{m}{n} \geq \frac{m'}{n'}; \\ f'(w_1', \bar{w}) \equiv (a_1' w_1' + a_0')^{m'} - (b_1' w_1' + \bar{b} \bar{w} + b_0')^{n'} = 0, \end{cases} \\ \text{D.} \dots & \begin{cases} f(w_1, \bar{w}) \equiv (a_1 w_1 + a_0)^\mu - (b_1 w_1 + \bar{b} \bar{w} + b_0)^\nu = 0, \\ f'(w_1', \bar{w}) \equiv (a_1' w_1' + a_0')^\mu - (b_1' w_1' + \bar{b} \bar{w} + b_0')^\nu = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

mit drei Unterfällen, n.l.

$$D_1. \dots \mu > 2\nu, \quad D_2. \dots \mu < 2\nu, \quad D_3. \dots \mu = 2\nu, \text{ d.h. } \mu = 2, \nu = 1;$$

$$\text{E.} \dots \begin{cases} f(w_1, \bar{w}) \equiv (a_1 w_1 + a_0)^m (b_1 w_1 + \bar{b} \bar{w} + b_0)^n - 1 = 0, & \frac{m}{n} \geq \frac{m'}{n'}; \\ f'(w_1', \bar{w}) \equiv (a_1' w_1' + a_0')^{m'} (b_1' w_1' + \bar{b} \bar{w} + b_0')^{n'} - 1 = 0, \end{cases}$$

$$\text{F.} \dots \begin{cases} f(w_1, \bar{w}) \equiv (a_1 w_1 + a_0)^\mu (b_1 w_1 + \bar{b} \bar{w} + b_0)^\nu - 1 = 0, \\ f'(w_1', \bar{w}) \equiv (a_1' w_1' + a_0')^\mu (b_1' w_1' + \bar{b} \bar{w} + b_0')^\nu - 1 = 0; \end{cases}$$

$$\text{G.} \dots \begin{cases} f(w_1, \bar{w}) \equiv (a_1 w_1 + a_0)^m (b_1 w_1 + \bar{b} \bar{w} + b_0)^n - 1 = 0, \\ f'(w_1', \bar{w}) \equiv (a_1' w_1' + a_0')^{m'} (b_1' w_1' + \bar{b} \bar{w} + b_0')^{n'} = 0. \end{cases}$$

In allen anderen Fällen, d.h. wenn die Form, welche mit der höchsten Zahl ( $m$ ,  $m'$  oder  $\mu$ ) potenzirt wird, ein Glied mit  $\bar{w}$  enthält, oder wenn die Gleichung aus der Elimination zweier Grössen  $\bar{w}$  und  $\bar{w}'$  entsteht, erhält man eine Gleichung, deren Grad wenigstens zwei Theiler hat.

Es kann aber geschehen, dass eine solche Gleichung in zwei oder mehrere Gleichungen zu zerlegen ist, deren eine von untheilbarem Grade ist. Dieser Fall wird aber in dieser Abhandlung nicht betrachtet.

Wir wenden uns vielmehr zu den Gleichungen dritten Grades, welche einer der 7 Rubriken A—G zuzuordnen sind.

Mit Hinweisung auf das in § 4, 5, 6 und 7 Dargelegte, bemerken wir zuerst, dass der Grad  $\Delta$  der resultirenden Gleichung durch die folgenden Ausdrücke gegeben ist:

$$\text{A : } \Delta = m;$$

$$\text{B : } \Delta = m + n;$$

$$\text{C : } 1^\circ \frac{m}{n} > \frac{m'}{n'}, \Delta = mn'; \quad 2^\circ \frac{m}{n} < \frac{m'}{n'}, \Delta = m'n';$$

$$\text{D : } \Delta = \mu\nu;$$

$$\text{E : } \Delta = mn' + m'n + nn';$$

$$\text{F : } \Delta = (2\mu + \nu)\nu;$$

$$\text{G : } \Delta = mn' + m'n.$$

Beachten wir, dass in der parabolischen Gleichung immer  $m > n$ ,  $m' > n'$ ,  $\mu > \nu$  gelten muss, so folgt, dass wir *kubische* Gleichungen in den folgenden Fällen erhalten:

- A  $A_1$   $m=3, n=1$ ;  $A_2$   $m=3, n=2$ ;  
 B  $m=2, n=1$ ;  
 C  $C_1$   $m=3, n=1, m'=2, n'=1$ ;  $C_2$   $m=2, n=1, m'=3, n'=1$ ;  
 D  $\mu=3, \nu=1$  (also  $D_1$ );  
 E niemals;  
 F  $\mu=1, \nu=1$ ;  
 G  $m=1, n=1, m'=2, n'=1$ .

Indem wir  $C_1$  mit  $C_2$  gleichwertig achten, da Vertauschung der Größen  $w_1$  und  $w_1'$  zulässig ist, so erübrigen wir die folgenden 7 Typen:

$$\begin{aligned} F_{A_1}(w_1, w_1') &\equiv (aw_1 + a'w_1' + a_0)^3 - (bw_1 + b'w_1' + b_0) = 0; \\ F_{A_2}(w_1, w_1') &\equiv (aw_1 + a'w_1' + a_0)^3 - (bw_1 + b'w_1' + b_0)^2 = 0; \\ F_B(w_1, w_1') &\equiv (aw_1 + a'w_1' + a_0)^2 (bw_1 + b'w_1' + b_0) - 1 = 0; \\ F_C(w_1, w_1') &\equiv \bar{b}'(a_1w_1 + a_0)^3 - \bar{b}(a_1'w_1' + a_0')^2 - \bar{b}'(b_1w_1 + b_0) + \bar{b}(b_1'w_1' + b_0') = 0; \\ F_D(w_1, w_1') &\equiv \bar{b}'(a_1w_1 + a_0)^3 - \bar{b}(a_1'w_1' + a_0')^3 - \bar{b}'(b_1w_1 + b_0) + \bar{b}(b_1'w_1' + b_0') = 0; \\ F_F(w_1, w_1') &\equiv \{\bar{b}'(b_1w_1 + b_0) - \bar{b}(b_1'w_1' + b_0')\}(a_1w_1 + a_0)(a_1'w_1' + a_0) + \\ &\quad + \bar{b}(a_1w_1 + a_0) - \bar{b}'(a_1'w_1' + a_0') = 0; \\ F_G(w_1, w_1') &\equiv b(a_1w_1 + a_0)(a_1'w_1' + a_0')^2 + \\ &\quad + \{\bar{b}'(b_1w_1 + b_0) - \bar{b}(b_1'w_1' + b_0')\}(a_1w_1 + a_0) - \bar{b} = 0. \end{aligned}$$

Durch Verschiebung des Anfangspunktes sind diese Gleichungen in die folgenden einfacheren Formen zu bringen, wo noch  $w_1$  durch  $x_1$ ,  $w_1'$  durch  $y$  und die Coefficienten durch andere ersetzt sind.

$$\begin{aligned} F_{A_1}(x, y) &\equiv (ax + by)^3 + cx + dy = 0; \\ F_{A_2}(x, y) &\equiv (ax + by)^3 + (cx + dy)^2 = 0; \\ F_B(x, y) &\equiv (ax + by)^3 (cx + dy) - e = 0; \\ F_C(x, y) &\equiv ax^3 + by^2 + cx + d = 0; \\ F_D(x, y) &\equiv ax^3 + by^3 + cx + dy + e = 0; \\ F_F(x, y) &\equiv ax^2y + bxy^2 + cxy + dx + ey = 0; \\ F_G(x, y) &\equiv axy^2 + bx + cy + d = 0. \end{aligned}$$

Wir werden von diesen Kurven nach einander die kennzeichnenden Eigenschaften ermitteln und nachher untersuchen, durch welche Transformationen eine gegebene kubische Kurve in eine der obigen Typen umgeformt werden kann.

$$A_1 \quad F(x, y) \equiv (ax + by)^3 + cx + dy = 0.$$

Diese Kurve  $F_{A_1}$  hat im Ursprunge einen *Wendepunkt* mit der Gerade

$$cx + dy = 0$$

als Tangente.

Sie hat ausserdem im Unendlichen auf der Gerade

$$ax + by = 0$$

einen *Rückkehrpunkt* mit der unendlich fernen Gerade als Tangente.

$$A_2 \quad F(x, y) \equiv (ax + by)^3 + (cx + dy)^2 = 0.$$

Diese Kurve  $F_{A_2}$  hat im Ursprunge einen *Rückkehrpunkt*, mit der Gerade

$$cx + dy = 0$$

als Tangente.

Sie hat noch im Unendlichen auf der Gerade

$$ax + by = 0$$

einen *Wendepunkt*, mit der unendlich fernen Gerade als Tangente.

$$B \quad F(x, y) \equiv (ax + by)^2 (cx + dy) - e = 0.$$

Diese Kurve  $F_B$  hat im Unendlichen auf der Gerade

$$ax + by = 0$$

einen *Rückkehrpunkt* mit dieser Gerade als Tangente.

Sie hat noch im Unendlichen auf der Gerade

$$cx + dy = 0$$

einen *Wendepunkt* mit dieser Gerade als Tangente.

$$C \quad F(x, y) \equiv ax^3 + by^2 + cx + d = 0,$$

oder, für  $b = -1$ ,

$$y^2 = ax^3 + cx + d.$$

Diese Kurve  $F_C$  ist symmetrisch in Bezug auf die  $x$ -Axe und hat einen *Wendepunkt* im Unendlichen.

Sie hat auf der  $x$ -Axe einen Doppelpunkt, wenn die Bedingung

$$4c^3 + 27ad^2 = 0$$

erfüllt ist. In diese Kurve lässt sich jede kubische Kurve durch eine projektive Transformation umformen.

$$D \quad F(x, y) \equiv ax^3 + by^3 + cx + dy + e = 0,$$

oder für  $a = 1, b = 1$

$$x^3 + y^3 + cx + dy + e = 0.$$

Diese Kurve  $F_D$  hat drei unendlich ferne Punkte, deren Richtungen durch eine Binomialgleichung bestimmt werden. Die Asymptoten convergiren alle nach dem Anfangspunkt. Dieser liegt auf der Kurve von *Hesse*, während eine der Geraden, in welche sein Polkegelschnitt ausgeartet ist, im Unendlichen liegt.

Auch diese Kurve kann durch eine projektive Transformation aus jeder kubischen Kurve erhalten werden.

Sie hat einen Doppelpunkt, wenn

$$(4c^3 + 4d^3 + 27e^2)^2 = 64c^3d^3.$$

$$F \quad F(x, y) \equiv ax^2y + bxy^2 + cxy + dx + ey = 0.$$

Diese Kurve  $F_F$  hat drei reelle unendlich fernen Punkte, deren zwei *cotangential* sind. Die Asymptoten der cotangentialen Punkte fallen mit der  $x$ -Axe und der  $y$ -Axe zusammen. Der Anfangspunkt liegt auf der Kurve.

$$G \quad F(x, y) \equiv axy^2 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Diese Kurve  $F_G$  ist symmetrisch in Bezug auf die  $x$ -Axe.

Sie berührt die unendlich ferne Gerade im unendlich fernen Punkte der  $x$ -Axe und hat einen *Wendepunkt* im Unendlichen auf der  $y$ -Axe, mit dieser Axe als Tangente.

Sie hat einen Doppelpunkt im Unendlichen, wenn

$$b = 0,$$

und einen Doppelpunkt auf der  $x$ -Axe, wenn der Bedingung

$$4bd = c^2$$

genügt wird.

Aus dem Vorhergehenden erhellt, dass wir eine kubische Kurve



unmittelbar mittels der hyperbolischen und parabolischen Congruenzen analysiren können, wenn sie, *nöthigenfalls nach Verschiebung*, einer der obigen 7 Typen angehört.

Jede andere kubische Kurve ist, wenn sie nicht als Ausartungsbestandteil eines Typus höheren Grades betrachtet werden kann, erst durch eine projektive Transformation auf einen der vorigen Typen zurückzuführen.

Weil die projektive Transformation im Allgemeinen nötig ist, so wollen wir die Kurven vom Geschlecht 1 alle in den nämlichen Typus überführen, und zwar in die Kurve  $E_C$ , deren Gleichung lautet:

$$y^2 = ax^3 + cx + d.$$

Zuerst wird die Coordinate  $y$  mittels der Transformation

$$y^2 = y'^2$$

in eine Grösse  $y'$  verwandelt, und diese durch die Verschiebung

$$y' = y'' + d$$

in eine Grösse  $y''$ , welche alsdann mit  $x$  verbunden ist durch die Beziehung

$$y'' = ax^3 + cx,$$

oder

$$\frac{y''}{a+c} = \frac{a}{a+c} x^3 + \frac{c}{a+c} x.$$

Sollte  $a+c=0$  sein, so ersetzen wir  $x$  durch  $px$ .

Die Grösse  $y'''$ , welche durch

$$y''' = \frac{y''}{a+c}$$

bestimmt ist, ergibt sich aus dem Schnittpunkt der Ebene  $z = ph$ , wo

$$p = \frac{a}{a+c}$$

ist, mit dem Strahl, welcher in der Congruenz

$$x' = x^3$$

dem Punkte  $x$  entstammt.

Wir beschäftigen uns also mit der Congruenz

$$w' = w^3,$$

wo der Homogeneitätsfaktor  $c$  gleich 1 gesetzt ist.

Überdies nehmen wir an, dass  $x$  derart vergrößert ist, dass

$$a + c = 1.$$

Zuerst wollen wir die Bahn von  $y$  erforschen, wenn  $x$  die reelle Axe beschreibt.

Aus der Gleichung folgt schon sofort, dass diese Bahn aus der reellen und aus der imaginären Axe besteht.

Zweitens wollen wir untersuchen, welche Bahn  $x$  durchläuft, wenn  $y$  die reelle Axe beschreibt.

Wenn  $y$  sich längs der reellen Axe bewegt, so durchläuft  $y'$  ebenfalls die reelle Axe, also auch  $y''$ . Die entsprechende Bahn von  $x$  ist alsdann (siehe (38a) S. 389) durch

$$x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + \mu x_3^2 = 0$$

bestimmt, wo

$$\mu = \frac{1-p}{p} = \frac{c}{a},$$

also durch

$$3x^2 - y^2 + \frac{c}{a} = 0.$$

Der übrige Teil der Bahn von  $x$  ist die reelle Axe.

Die Bahn von  $x$  besteht deshalb aus der reellen Axe und aus einer Hyperbel, deren Axen mit der reellen und mit der imaginären Axe zusammenfallen und deren Asymptoten mit der reellen Axe einen Winkel von  $60^\circ$  einschliessen.

Ist  $\frac{c}{a}$  positiv, so schneidet die imaginäre Axe die Kurve.

Drittens wollen wir erörtern, welche die Bahn von  $x$  ist, wenn  $y$  die imaginäre Axe beschreibt.

Wenn  $y$  die imaginäre Axe durchläuft, bewegt  $y'$  sich längs der reellen Axe, ebenso  $y''$ . Die Bahn von  $x$  ist demnach mit der des vorigen Falles identisch.

Viertens wollen wir die Bahn von  $x$  bestimmen, wenn  $y$  in ihrer Ebene die Gerade

$$y = x \operatorname{tg} \psi$$

durchläuft.

Die Gleichung dieser Gerade lautet in homogenen Coordinaten:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x + iy}{x - iy} = \frac{1 + i \operatorname{tg} \psi}{1 - i \operatorname{tg} \psi} = e^{2i\psi}$$

Die Bahn von  $y' = y^2$  ist alsdann durch

$$\frac{x_1}{x_2} = e^{4i\psi},$$

d.h. durch

$$x \sin 2\psi - y \cos 2\psi = 0$$

angewiesen.

Die Grösse  $y' = y' - d$  beschreibt sonach die Gerade

$$x \sin 2\psi - y \cos 2\psi + d \sin 2\psi = 0,$$

oder

$$i x_1 e^{-2i\psi} - i x_2 e^{2i\psi} + \frac{2 d \sin 2\psi}{p} x_4 = 0,$$

wonach (siehe S. 381)

$$\alpha_1 = i e^{-2i\psi}, \alpha_2 = -i e^{2i\psi}, \mu \alpha_3 + \alpha_4 = \frac{2 d \sin 2\psi}{p}, p = \frac{a}{a + c} = a.$$

Diese Bahn befindet sich in der Ebene  $z = ph$ , oder  $x_3 = \frac{1-p}{p} x_4 =$   
 $= \frac{c}{a} x_4$ , mithin  $\mu = \frac{c}{a}$ .

Die axiale Regelfläche dieser Gerade schneidet die Abbildungsebene in der kubischen Kurve (Gl. (19a), S. 381)

$$\alpha_1 x_1^3 + \alpha_2 x_2^3 + \mu (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) x_3^2 + (\mu \alpha_3 + \alpha_4) x_3^3 = 0,$$

oder

$$ie^{-2i\psi}(x + iy)^3 - ie^{2i\psi}(x - iy)^3 + \frac{c}{a} \{ie^{-2i\psi}(x + iy) - ie^{2i\psi}(x - iy)\} +$$

$$+ \frac{2 d \sin 2\psi}{a} = 0,$$

oder auch

$$x^3 \sin 2\psi - 3x^2 y \cos 2\psi - 3xy^2 \sin 2\psi + y^3 \cos 2\psi + \frac{c}{a}(x \sin 2\psi - y \cos 2\psi) + \frac{d \sin 2\psi}{a} = 0.$$

Die Asymptoten dieser kubischen Kurve convergiren alle nach dem Nullpunkt, welcher somit ein Punkt der *Hessischen* Kurve ist.

Die Gesamtheit der Asymptoten wird dargestellt durch

$$i e^{-2i\psi} x_1^3 - i e^{2i\psi} x_2^3 = 0,$$

oder durch

$$\frac{x_1}{x_2} = e^{\frac{i(4\psi + 2k\pi)}{3}},$$

also, wenn wir

$$x = r \cos \Theta, \quad y = r \sin \Theta$$

setzen, durch

$$\Theta = \frac{2\psi + k\pi}{3},$$

d.h.:

$$\Theta_1 = \frac{2\psi}{3}; \quad \Theta_2 = \frac{2\psi}{3} + \frac{\pi}{3}; \quad \Theta_3 = \frac{2\psi}{3} + \frac{2\pi}{3}.$$

Die Asymptoten schliessen einen Winkel von  $60^\circ$  ein, und eine von ihnen bildet mit der reellen Axe den Winkel  $\frac{2\psi}{3}$ .

Wenn wir

$$\operatorname{tg} 2\psi = \lambda$$

setzen, so lässt sich die Gleichung der kubischen Kurve folgendermassen schreiben:

$$y\left(3x^2 - y^2 + \frac{c}{a}\right) - \lambda\left(x^3 - 3xy^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}\right) = 0.$$

Hieraus erhellt, dass, wenn die Bahn von  $y$  den Strahlenbüschel um den Nullpunkt beschreibt, die Bahn von  $x$  einen *Büschel* kubischer Kurven durchläuft.

Setzen wir noch

$$\operatorname{tg} \psi = t,$$

wonach  $t$  der Parameter des in der  $y$ -Ebene befindlichen Büschels darstellt, so sind die beiden Parameter  $t$  und  $\lambda$  verknüpft durch die Beziehung

$$\lambda = \frac{2t}{1 - t^2},$$

oder

$$\lambda t^2 + 2t - \lambda = 0;$$

hieraus folgt, dass ein Wert  $t$  einen Wert  $\lambda$  bestimmt, aber ein Wert  $\lambda$  zwei Werte  $t$ .

Die nämliche kubische Kurve in der  $x$ -Ebene gehört ja auch zwei auf einander senkrechten Geraden an.

Sämtliche kubische Kurven schneiden die reelle Axe in den Punkten, für welche im Diagram  $y = 0$  ist.

Schliesslich wollen wir untersuchen, welche Bahn  $x$  beschreibt, wenn  $y$  einen Kreis um den Nullpunkt als Mittelpunkt durchläuft.

Es sei dieser Kreis gegeben durch

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

oder

$$x_1 x_2 - R^2 x_3^2 = 0.$$

Die Bahn von  $y' = y^2$  ist alsdann ebenfalls ein Kreis mit dem Nullpunkte als Mittelpunkt. Ihre Gleichung ist

$$x_1 x_2 - R^4 x_4^2 = 0,$$

oder

$$x^2 + y^2 = R^4.$$

Die Bahn von  $y'' = y' - d$  ergibt sich nun aus

$$(x + d)^2 + y^2 = R^4,$$

oder

$$x_1 x_2 + d(x_1 + x_2)x_3 + (d^2 - R^4)x_3^2 = 0.$$

Wenn wir diese Bahn in die Ebene  $z = ph$  legen, so erhält sie die folgende Gleichung:

$$x_1 x_2 + d(x_1 + x_2) \frac{x_4}{p} + (d^2 - R^4) \frac{x_4^2}{p^2} = 0,$$

während

$$x_3 = \mu x_4 = \frac{1-p}{p} x_4.$$

Indem wir noch diese Gleichungen mit den Gleichungen (59), (60) und (61) auf S. 398 identifizieren, zeigt sich, dass wir

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= 1, \\ \gamma_1 &= \gamma_2 = \frac{d}{p}, \\ \gamma_3 &= \frac{d^2 - R^4}{p^2},\end{aligned}$$

und sonach

$$\begin{aligned}\gamma_0' &= \frac{1-p}{p}, \quad \gamma_0'' = \frac{(1-p)^2}{p^2}, \\ \gamma_1' &= \gamma_2' = \frac{(1-p)d}{p^2}\end{aligned}$$

zu setzen haben.

Die Regelfläche der Strahlen, welche auf dem in der  $y''$ -Ebene befindliche Kreise ruhen, schneidet die  $x$ -Ebene in der Kurve 6<sup>ten</sup> Grades (siehe (62a), S. 398)

$$\begin{aligned}x_1^3 x_2^3 + \frac{1-p}{p} (x_1^2 + x_2^2) x_1 x_2 x_3^2 + \frac{d}{p} (x_1^3 + x_2^3) x_3^3 + \frac{(1-p)^2}{p^2} x_1 x_2 x_3^4 + \\ + \frac{(1-p)d}{p^2} (x_1 + x_2) x_3^5 + \frac{d^2 - R^4}{p^2} x_3^6 = 0,\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2)^3 + \frac{2c}{a} (x^4 - y^4) + \frac{2d}{a} x (x^2 - 3y^2) + \frac{c^2}{a^2} (x^2 + y^2) + \\ + \frac{2cd}{a^2} x + \frac{d^2}{a^2} - \frac{R^4}{a^2} = 0.\end{aligned}$$

Diese Kurve ist tricircular.

Von den 9 Schnittpunkten der in den Kreispunkten gelegten Tangenten sind höchstens 3 reell. Diese befinden sich auf der reellen Axe. Sie sind (siehe (63a) und (64a)) durch

$$ax^2 + cx + d = 0$$

angewiesen. Sie liefern also diejenigen Werte von  $x$ , für welche  $y$  null wird.

Die Brennpunkte bilden den einzigen reellen Bestandteil der Ausartungsfigur, welche die obige Kurve 6<sup>ten</sup> Grades zum Gesamtschnitte der Regelfläche ergänzt.

Die Schnittpunkte der Kurve mit der  $x$ -Axe sind aus

$$x^6 + \frac{2c}{a}x^4 + \frac{2d}{a}x^3 + \frac{c^2}{a^2}x^2 + \frac{2cd}{a^2}x + \frac{d^2}{a^2} - \frac{R^4}{a^2} = 0,$$

oder durch

$$(ax^3 + cx + d)^2 - R^4 = 0$$

bestimmt.

Wir bemerken wiederum, dass dem *Büschel* concentrischer Kreise um den Nullpunkt in der  $y$ -Ebene ein Büschel tricircularer Kurven 6<sup>ten</sup> Grades entspricht, dem die 6-fache unendlich ferne Gerade angehört. Sämmtliche Elementen des Büschels haben in den Kreispunkten die Tangenten gemein.

Dieser Büschel ist also zugleich eine Schar.

Der Parameter des Büschels concentrischer Kreise ist  $R^2$ , derjenige der Kurven 6<sup>ten</sup> Grades ist  $R^4$ . *Einem* in der  $y$ -Ebene liegenden Kreise ist also eine in der  $x$ -Ebene liegende Kurve 6<sup>ten</sup> Grades zugeordnet, während eine in der  $z$ -Ebene liegende Kurve 6<sup>ten</sup> Grades mit *zwei* Kreisen in der  $y$ -Ebene übereinstimmt, deren jedoch einer imaginär ist.

Ein Strahl des Strahlenbüschels um den Nullpunkt schneidet einen Kreis des concentrischen Kreisbüschels in zwei Punkten  $y$ , welche jedoch entgegengesetzten Werten von  $y$  entsprechen. Vermöge der gegebenen Gleichung liefern beide dieselben drei Werte für  $x$ .

Es gehört jedes Element des Büschels kubischer Kurven zu 2 Strahlen des in der  $y$ -Ebene befindlichen Strahlenbüschels, welche zusammen mit einem Kreise des Kreisbüschels 4 Punkte  $y$  also 6 Punkte  $x$  bestimmen.

Aus diesem geht hervor, dass jede kubische Kurve des Büschels jede Kurve 6<sup>ten</sup> Grades der Büschelschar in 6 *reellen* Punkten schneidet, so lange die genannten 4 Werte für  $y$  ausschliesslich imaginäre Werte für  $x$  bestimmen.

Von den 18 Schnittpunkten einer kubischen Kurve mit eine Kurve 6<sup>ten</sup> Grades sind also immer *wenigstens* 12 imaginär.

Wir beendigen diese Betrachtungen mit der Bemerkung, dass, weil der Strahlenbüschel und der Büschel concentrischer Kreise in der  $y$ -Ebene sich rechtwinklig schneiden, auch die kubischen Kurven und die Kurven 6<sup>ten</sup> Grades *orthogonale Trajektorien* sind, und ausserdem die  $x$ -Ebene in *elementare Quadrate* einteilen.

Bevor wir die Erörterung dieser kubischen Gleichung schliessen, wollen wir uns noch kurz beschäftigen mit der Frage nach der Anzahl der Zweige des Diagrammes, und nach dem Geschlecht dieser Kurve.

In der gegebenen Gleichung

$$y^2 = ax^3 + cx + d$$

wird die Bedingung dreier reellen Schnittpunkte mit der  $x$ -Axe durch die folgenden Ungleichheiten angewiesen:

$$4c^3 + 27ad^2 < 0 \text{ für } a > 0,$$

und

$$4c^3 + 27ad^2 > 0 \text{ für } a < 0.$$

In diesem Falle enthält demnach die Kurve zwei Zweige.

Dagegen giebt es nur einen Zweig, wenn

$$4c^3 + 27ad^2 > 0 \text{ für } a > 0,$$

und

$$4c^3 + 27ad^2 < 0 \text{ für } a < 0.$$

Ein *Doppelpunkt* ist vorhanden, falls

$$4c^3 + 27ad^2 = 0.$$

Wenn es zwei Zweige giebt, so müssen, falls  $x$  die reelle Axe beschreibt, die beiden Werte von  $y$  zuerst reell, dann imaginär, dann wieder reell und schliesslich wieder imaginär werden.

Mit dieser Bewegung von  $y$  ist ebenso eine bestimmte Bahn von  $y'$  verbunden;  $y'$  beschreibt zuerst die positive, dann die negative, nachher wieder die positive und endlich wieder die negative Seite der reellen Axe, während die Bahn von  $y''$  erhalten wird, indem man die Bahn von  $y'$  einen Betrag  $d$  in der positiven Richtung verschiebt.

Wenn  $x$  sich längs der reellen Axe bewegt, so umhüllt der Congruenzstrahl in der Congruenz  $x' = x^3$  die Fokalkurve 3<sup>ter</sup> Klasse in der Ebene der reellen Axen. Diese Kurve hat im Nullpunkte der  $x'$ -Ebene einen Rückkehrpunkt mit der Verbindungslinie der Nullpunkte als Tangente. Ausserdem befindet sich im Unendlichen auf der reellen Axe ein Wendepunkt, dessen Tangente mit der reellen Axe der  $x$ -Ebene zusammenfällt.

Weil einem positiven  $x$  ein positives  $x'$  entspricht, so darf zwischen den beiden Abbildungsebenen kein reeller Teil der Kurve



liegen. Wir erhalten somit eine Kurve, wie in der Fig. 21 (hinten angefügte Figurentafel) skizzirt ist.

Wir wollen den Abstand der Abbildungsebenen der Einfachheit wegen der Einheit gleich setzen. Die Gleichung der Kurve (der Einhüllenden von  $\frac{z}{1} = \frac{x-t}{t^3-t}$ ) lautet alsdann:

$$4(1-z)^3 + 27x^2z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

Eine neue Abbildungsebene ( $y''$ ), in der Höhe  $z = ph = p = \frac{a}{a+c} = a$ , wird die Ebene der reellen Axen in der Gerade  $z = a$  schneiden. In dieser Abbildungsebene wird auf der reellen Axe der Nullpunkt  $\bar{O}'$  der  $y'$ -Ebene in den Punkt gelegt, welcher im Abstand  $d$  auf der negativen Seite von der  $z$ -Axe entfernt ist.

Die reelle Axe der  $y'$ -Ebene wird daher durch

$$z = a$$

dargestellt, und der Nullpunkt  $\bar{O}'$  dieser Ebene durch

$$\begin{aligned} x &= -d, \\ z &= a. \end{aligned}$$

Indem wir für die reelle Axe  $a < 0$  oder  $a > 1$  wählen, so wird der Ausdruck

$$4c^3 + 27ad^2 = 4(1-a)^3 + 27ad^2 \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

einen positiven Wert erhalten für  $a < 0$ , wenn

$$d^2 < \frac{4(1-a)^3}{-27a},$$

und einen negativen Wert für  $a > 1$ , wenn

$$d^2 < \frac{4(a-1)^3}{27a}.$$

Wenn wir  $\bar{O}'$  auf der Kurve angenommen hätten, so würden wir

$$d^2 = \frac{4(1-a)^3}{-27a}$$

(siehe (59)) bekommen haben.

Hieraus geht hervor, dass wir eine Kurve mit *zwei* Zweigen

erhalten, wenn der Nullpunkt  $\bar{O}'$  der  $y'$ -Ebene *innerhalb* der Fokalkurve angenommen wird.

Eine Kurve mit *einem* Zweige finden wir offenbar, wenn wir den Nullpunkt  $\bar{O}'$  *ausserhalb* der Fokalkurve legen.

Eine *rationale* Kurve wird sich aber ergeben, sobald wir den Nullpunkt  $\bar{O}'$  *auf* der Fokalkurve wählen.

Dass das Vorhandensein zweier Zweigen mit der Lage von  $\bar{O}'$  *innerhalb* der Fokalkurve zusammenhängt, lässt sich auch folgendermassen nachweisen.

Wir denken uns drei zu der  $x$ -Axe parallele Geraden, die eine,  $l_1$ , unterhalb der  $x$ -Ebene, die zweite,  $l_2$ , zwischen den Abbildungsebenen, die dritte,  $l_3$ , oberhalb der  $x'$ -Ebene.

Die Gerade  $l_1$  schneidet die Kurve in zwei reellen endlichen Punkten  $A_1$  und  $B_1$ , die Gerade  $l_2$  schneidet die Kurve nicht im Endlichen, die Gerade  $l_3$  trifft die Kurve in den reellen endlichen Punkten  $A_3$  und  $B_3$ .

Ein Punkt  $P_k$  auf einer dieser Geraden,  $l_k$ , wird durch den Abstand  $p_k$  von  $P_k$  zum Schnittpunkte von  $l_k$  mit der  $z$ -Axe angewiesen; dieser Abstand wird in derselben Richtung positiv gerechnet wie die Punkte der reellen  $x$ -Axe.

Wir stellen uns auch noch vor, dass der Congruenzstrahl über die Fokalkurve rollt, und zwar mit der Anfangslage ( $x = +\infty$ ,  $x' = +\infty$ ). Für den Schnittpunkt  $P_1$  des Strahles mit  $l_1$  wird nun gelten

$$-\infty < p_1 < b_1,$$

bis der Berührungspunkt in  $B_1$  angelangt ist, wo  $p_1 = b_1$ .

Indem der Strahl weiter rollt, nimmt  $p_1$  wiederum ab, bis der Berührungspunkt (nach zweimaligem Durchgang durch das Unendliche) in den Punkt  $A_1$  gelangt ist, wo  $p_1 = a_1 = -b_1$ .

Nachher nimmt  $p_1$  wiederum zu und erhält schliesslich den Wert  $+\infty$ .

Es erhellt, dass  $P_1$  die Strecke  $A_1 B_1$  *dreimal* zurücklegt.

Befindet sich nun  $\bar{O}'$  auf  $l_1$  *innerhalb* der Kurve, d.h. *innerhalb* der Strecke  $A_1 B_1$ , so passirt der Punkt  $P_1$  *dreimal* den Punkt  $\bar{O}'$ .

Anfangs ist  $y'$  negativ, von  $-\infty$  an, also  $y$  imaginär; dann wird  $y'$  positiv (in maximo  $= \bar{O}' B_1$ ), daher  $y$  reell; nachher wird  $y'$  wiederum negativ (in minimo  $\bar{O}' A_1$ ), also  $y$  wieder imaginär; und schliesslich wird  $y'$  wieder positiv, bis  $+\infty$ , daher  $y$  wieder reell. Das Diagramm hat demnach *zwei* Zweige.

Wenn  $\bar{O}'$  auf  $l_1$  *ausserhalb* der Strecke  $A_1 B_1$  läge, so würde  $P_1$  nur *einmal* den Punkt  $\bar{O}'$  passiren, es würde  $y'$  somit nur *einmal*

das Vorzeichen wechseln und  $y$  nur *einmal* von imaginär reell werden, wonach das Diagramm nur *einen* Zweig hätte.

Wenn der Strahl über die Fokalkurve rollt, so durchläuft sein Schnittpunkt  $P_2$  mit  $l_2$  diese Gerade von  $+\infty$  an bis  $-\infty$  *ohne* Rückkehrpunkte. Falls  $\bar{O}'$  also auf  $l_2$  liegt, wird  $P_2$  nur einmal den Punkt  $\bar{O}'$  passieren, so dass jeder zwischen den reellen Axen liegende Punkt  $\bar{O}'$  einem *einteiligen* Diagramm entspricht:

Der Schnittpunkt  $P_3$  des Strahles mit  $l_3$  wird sich längs  $l_3$  bewegen, zuerst von  $+\infty$  an bis  $B_3$ , dann zurück von  $B_3$  bis  $A_3$  und endlich wieder zurück von  $A_3$  bis  $-\infty$ . Die Strecke  $A_3B_3$  wird deshalb auch hier *dreimal* zurückgelegt.

Ein *innerhalb* der Strecke  $A_3B_3$  angenommener Punkt  $\bar{O}'$  wird demnach dreimal von  $P_3$  durchlaufen. Einem solchen Punkte  $\bar{O}'$  entspricht ein *zweiteiliges* Diagramm.

Ebenso leuchtet ein, dass ein *ausserhalb* der Strecke  $A_3B_3$  auf  $l_3$  befindlicher Punkt  $\bar{O}'$  einem *einteiligen* entspricht.

Mit diesen Darlegungen wollen wir die Untersuchung der erwähnten Gleichung dritten Grades und gleichfalls diesen Abschnitt abschliessen.

Obgleich nur wenige Gleichungen 3<sup>ten</sup> Grades und gar keine Gleichungen höheren Grades behandelt sind, dürften die herbeigeführten Beispiele zu einer weiteren Anwendung der hier gefolgten Methode ausreichen.

---

## ERRATUM.

S. 217 Z. 5 von oben lies:  $(m - n) (\xi_2 - \tau \xi_1)$  u. s. w.  
statt  $(m + n) (\xi_2 - \tau \xi_1)$  u. s. w.

---



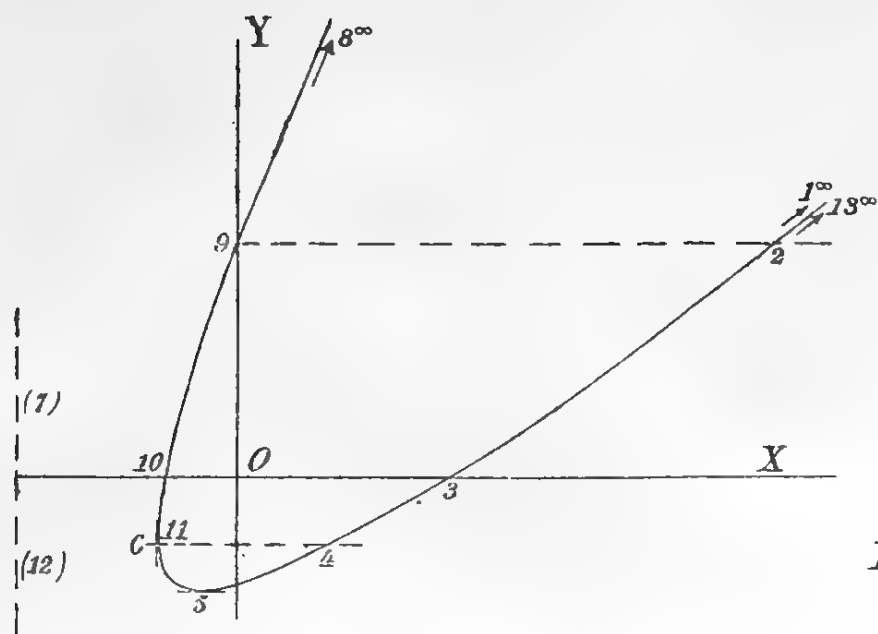


Fig 18.

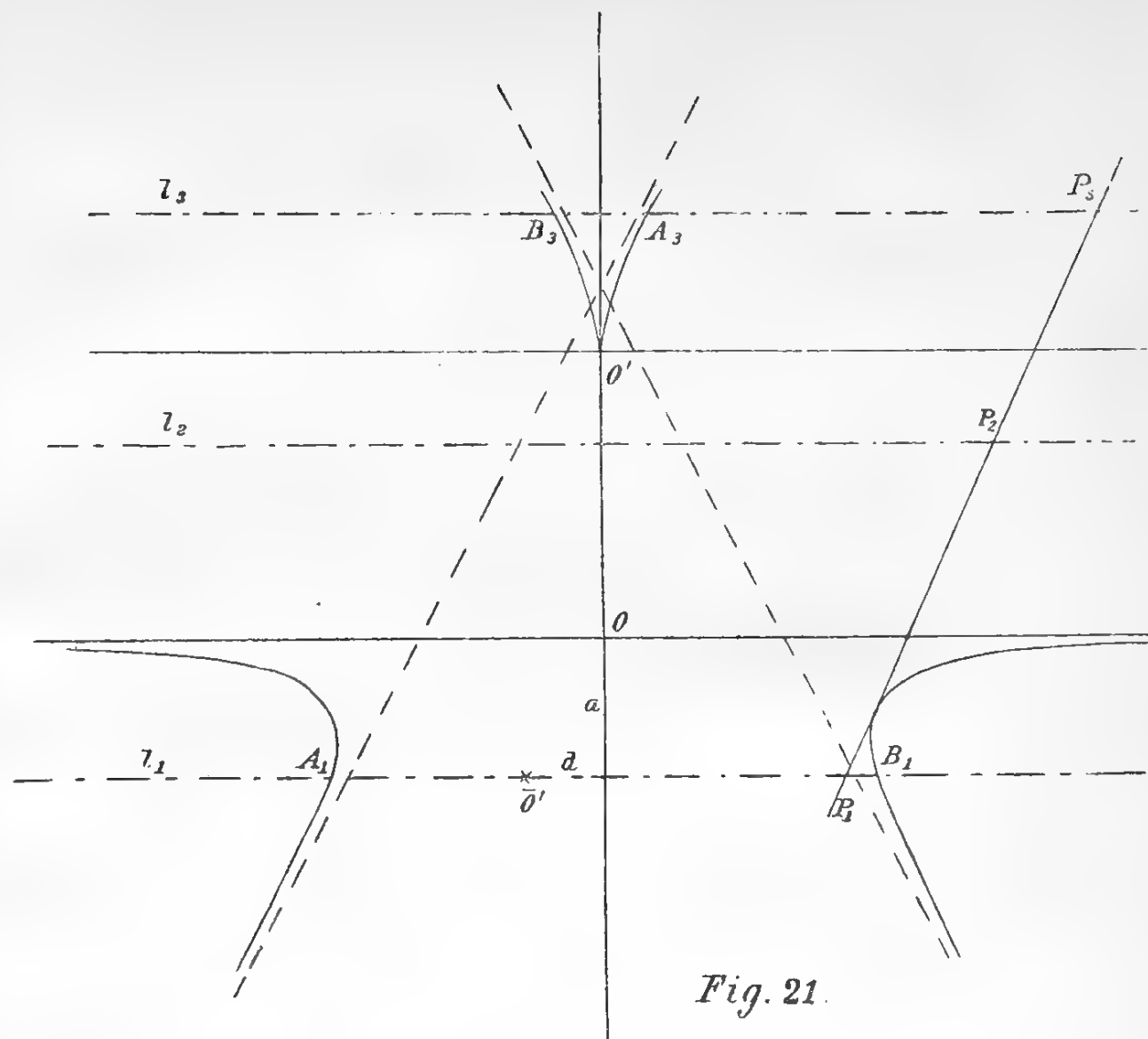
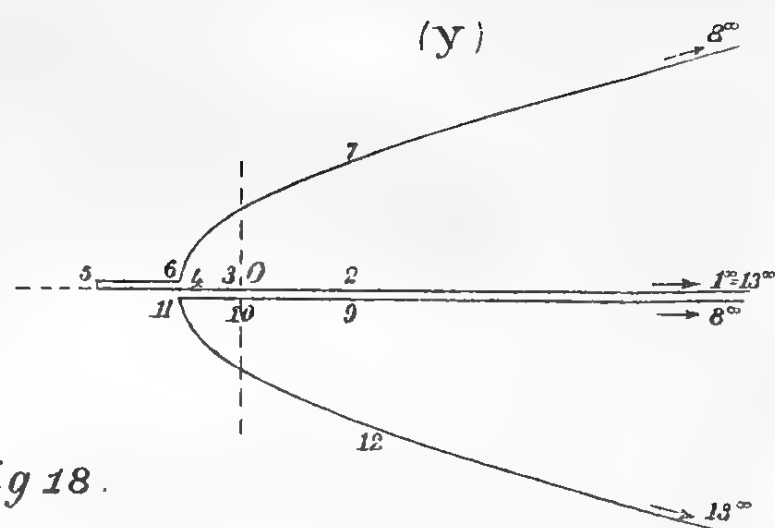


Fig. 21.

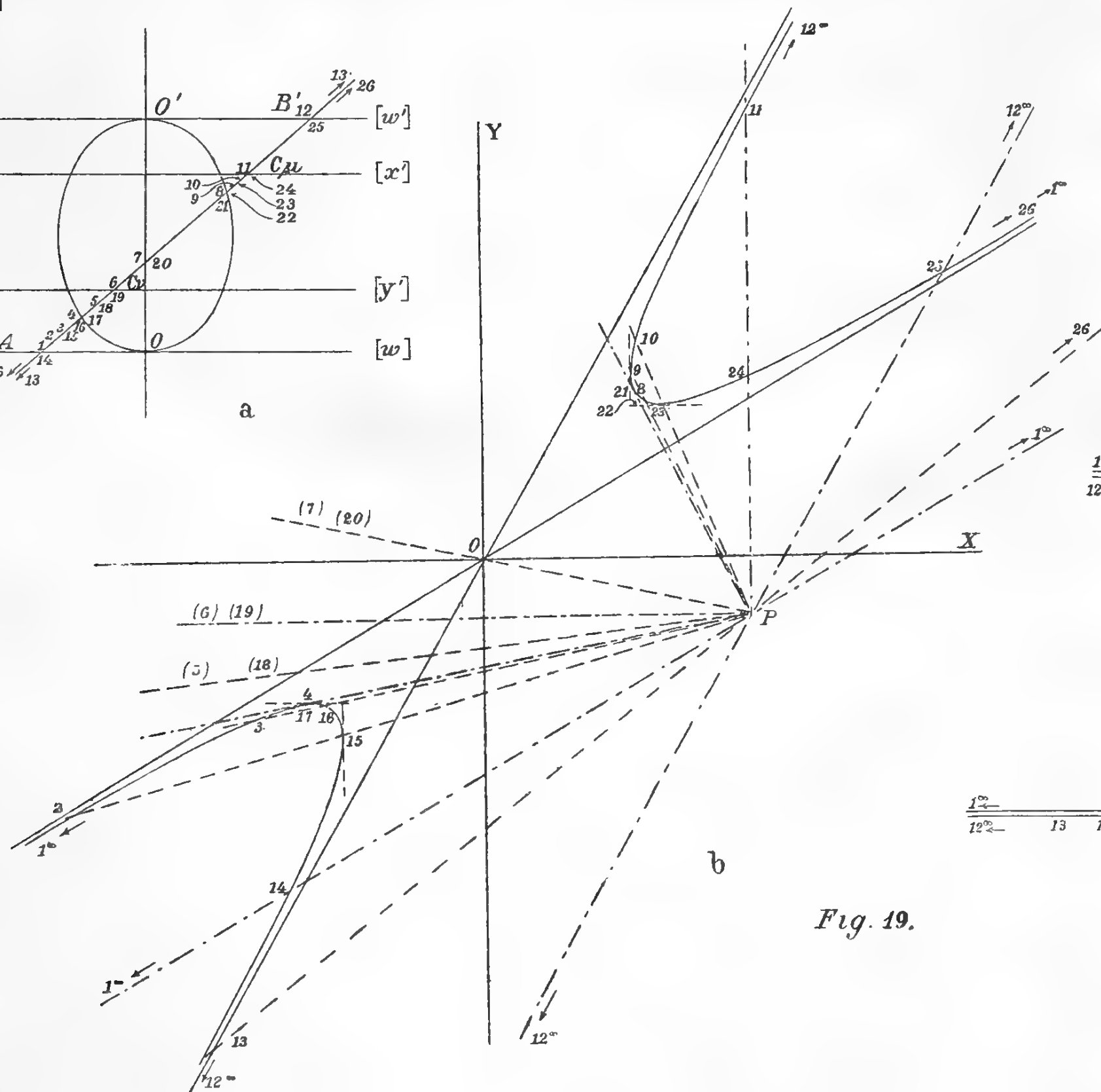
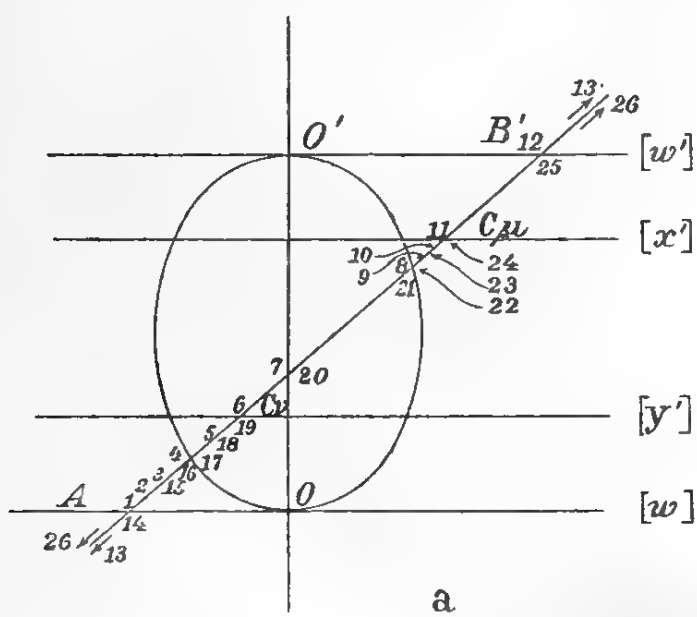
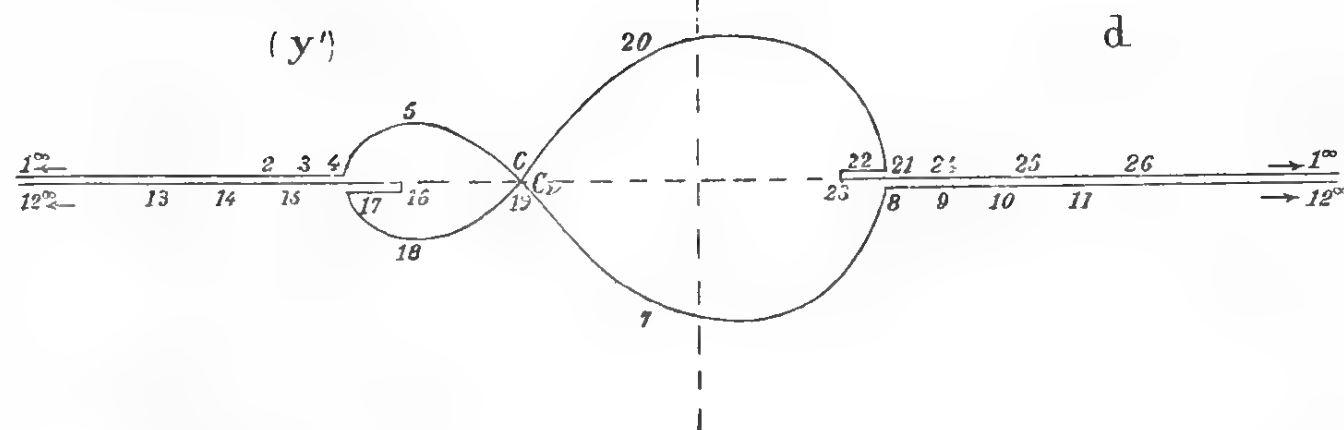
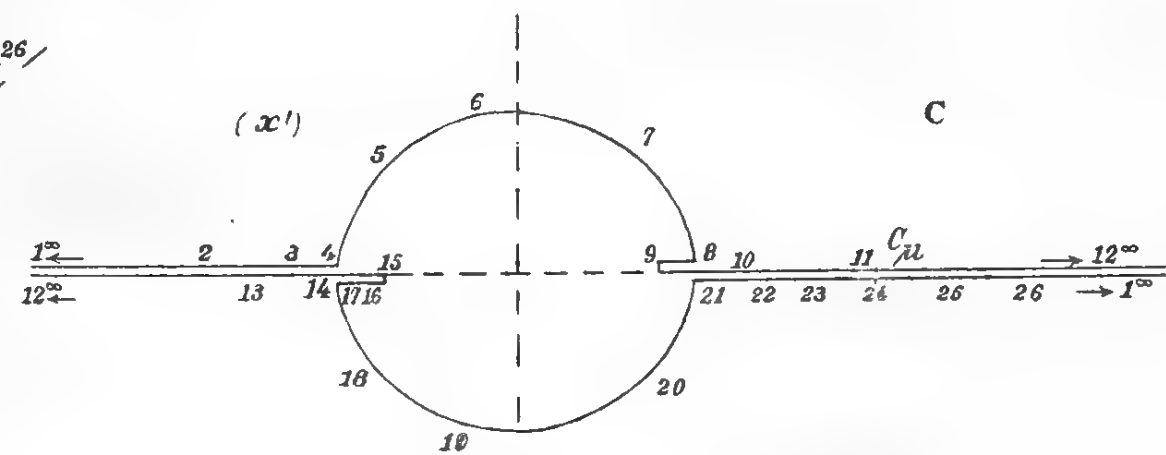
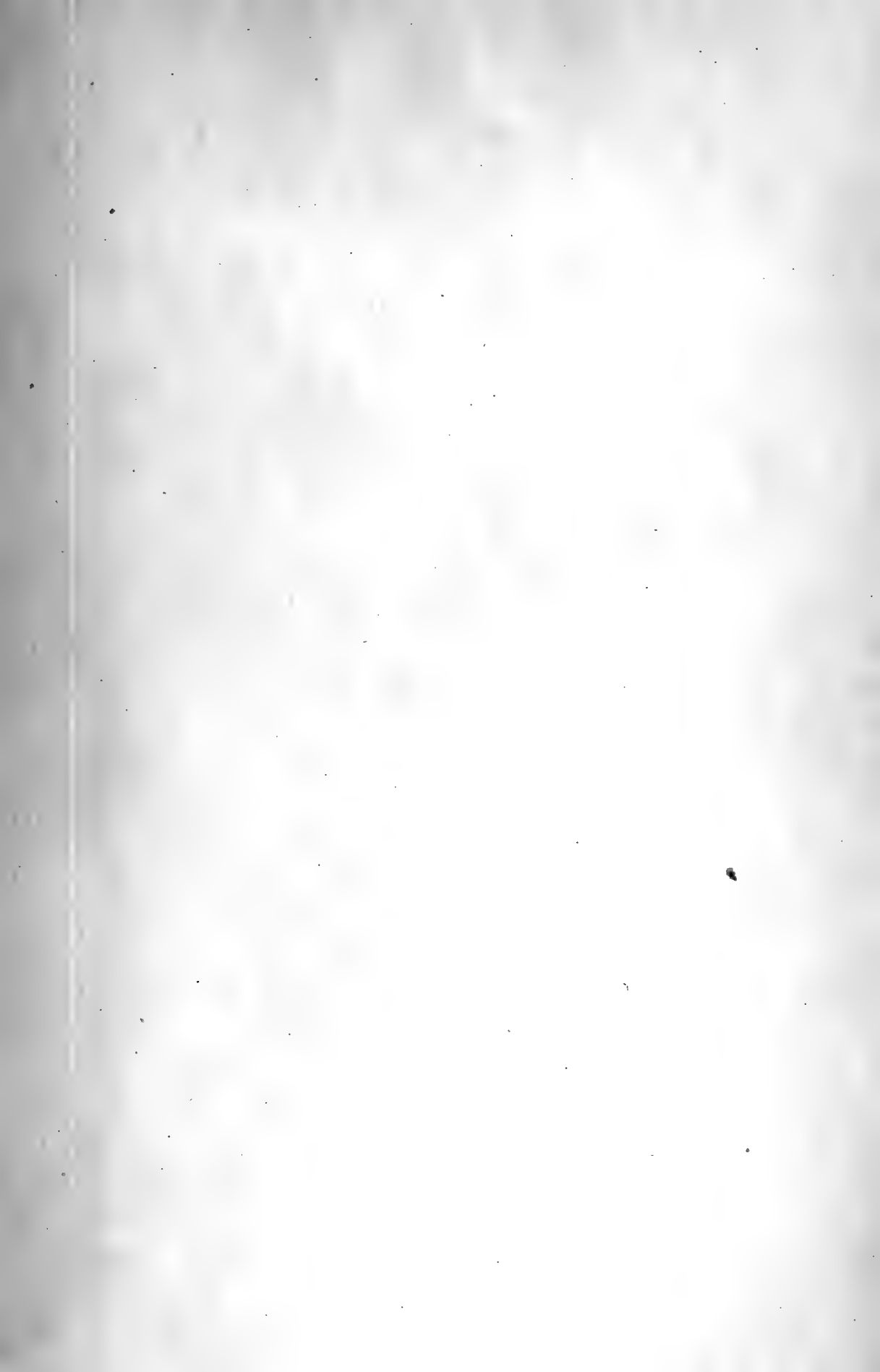


Fig. 19.



















GEDRUKT BIJ  
—° JOH. ENSCHEDÉ EN ZONEN °—  
HAARLEM